

Introduction à la géométrie différentielle

Luc Haine

Professeur à l'Université catholique de Louvain

Ecole de mathématique

Chemin du Cyclotron 2

B-1348 Louvain-la-Neuve

12 août 2020

Table des matières

1	Variétés différentielles	7
1.1	Notion de variété	7
1.2	Exemples de variétés	10
1.2.1	Le cercle S^1	10
1.2.2	La sphère S^n	10
1.2.3	L'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$	12
1.2.4	Variétés grassmanniennes $Gr(m, \mathbb{R}^N)$	13
1.2.5	Produit de variétés	14
1.3	Topologie d'une variété	15
1.4	Sous-variétés	16
1.5	Morphismes entre variétés	22
1.6	Exercices	24
2	Espace tangent et champs de vecteurs	27
2.1	Espace tangent et dérivations ponctuelles	27
2.2	Champs de vecteurs et dérivations	33
2.3	Courbes intégrales et flots	37
2.3.1	Le cas autonome	37
2.3.2	Champs de vecteurs non autonomes	42
2.4	Champs gradients et topologie des variétés	44
2.5	Le crochet de Lie	47
2.6	Exercices	51
2.6.1	Immersion, plongements, submersions	51
2.6.2	Champs de vecteurs	54
2.6.3	Crochet de Lie	56
3	Formes différentielles	59
3.1	Formes extérieures	59
3.2	Formes différentielles	65
3.2.1	Fibrés extérieurs	65
3.2.2	La différentielle extérieure	67
3.3	Intégration sur les variétés orientables	77
3.3.1	Variétés orientables	77
3.3.2	Le théorème de Stokes-Cartan	81

3.4	Exercices	89
4	Eléments de géométrie riemannienne	95
4.1	Connexion de Levi-Civita	95
4.2	Preuve de Chern du théorème de Gauss-Bonnet	102
4.3	Holonomie et courbure	110
4.4	Champs de tenseurs	114
	4.4.1 Fibrés tensoriels	114
	4.4.2 Tenseur de Riemann et symboles de Christoffel	116
4.5	Exercices	123

Introduction

Le titulaire d'un cours d'introduction à la géométrie différentielle se trouve confronté au problème d'introduire une foule de concepts nouveaux et fondamentaux pour avoir des bases solides dans le domaine, sans perdre de vue l'objectif de montrer le plus rapidement possible leur utilisation pour établir des résultats attractifs et pertinents. Le présent ouvrage, basé sur une longue expérience de cet enseignement au niveau du bac 3 en mathématique à l'Université catholique de Louvain, propose de relever le défi pour un enseignement de quatre heures par semaine, théorie et exercices, durant un semestre.

Le chapitre 1 présente la notion de variété différentielle abstraite en la reliant au concept plus familier de sous-variété de l'espace euclidien. Nous adoptons le point de vue développé dans [2] de ne pas mettre de topologie à priori sur une variété, et nous montrons qu'il existe une topologie canonique sur toute variété provenant de la topologie euclidienne.

Le chapitre 2 introduit les notions d'espace tangent, de champs de vecteurs et de crochet de Lie des champs de vecteurs. On y traite des exemples explicites montrant le lien entre les champs de vecteurs et la topologie des variétés, mais aussi en suggérant l'intérêt d'étendre des champs de vecteurs (définis par exemple sur le plan) à des variétés compactes, pour aborder des problèmes globaux d'équations différentielles.

Le chapitre 3 introduit les formes différentielles en vue d'établir le théorème de Stokes-Cartan, qui est une vaste généralisation des théorèmes classiques de l'analyse vectorielle. Nous n'avons pas choisi la présentation axiomatique de la différentielle extérieure, donnée dans la plupart des ouvrages. Nous avons adopté le point de vue développé dans [1] d'introduire cette notion comme une généralisation de la notion de flux d'un champ de vecteurs à travers le bord d'un cube infinitésimal, mettant en évidence la relation entre la différentielle extérieure et le bord orienté du cube.

Le chapitre 4 donne les bases de géométrie riemannienne nécessaires à la compréhension des théories physiques modernes, notamment la relativité générale. La présentation se distingue d'autres ouvrages par l'accent mis sur

la méthode du repère mobile due à Elie Cartan, inspirée de la mécanique classique, en suivant les ouvrages [3] et [4]. Ce point de vue a l'avantage de ne pas oblitérer le contenu géométrique de la connexion de Levi-Civita. Pour une surface plongée dans l'espace euclidien à trois dimensions, le transport parallèle d'un vecteur tangent est obtenu en faisant rouler le plan tangent (vu comme un solide) le long d'une courbe sur la surface, sans glissement et sans pivotement. Le chapitre donne aussi la preuve due à Shiing-shen Chern du théorème de Gauss-Bonnet, en vue de l'étendre en dimension supérieure, en établissant le lien avec la somme des indices des points singuliers d'un champ de vecteurs. Outre le fait d'établir le théorème de Poincaré-Hopf en dimension 2, cette démonstration offre une application spectaculaire de la formule de Stokes-Cartan.

Tous les chapitres sont complétés par une série d'exercices de difficultés variées, dont certains sont tirés ou inspirés des références. C'est avec plaisir que je remercie les assistants qui ont assuré ces exercices au fil des années, Didier Vanderstichelen, Paul Arnaud Songhafouo Tsopméné, Grégoire Naisse et Daniel Zimmer.

Chapitre 1

Variétés différentielles

On est familier avec l'idée d'une surface dans l'espace euclidien à trois dimensions. Néanmoins certaines surfaces non-orientables, comme le plan projectif, n'ont pas de réalisation dans l'espace euclidien à trois dimensions. La notion de variété abstraite, que nous allons introduire dans ce chapitre, est très utile pour manier de tels objets géométriques.

1.1 Notion de variété

Dans cette Section on introduit la notion d'atlas sur un ensemble et de variété, indépendamment de toute notion de topologie. On verra dans la Section 3 qu'une variété est munie naturellement d'une topologie canonique.

Définition 1.1.1. *Soit M un ensemble.*

1) *Une carte de M est un couple (U, φ) avec $U \subset M$ et φ une bijection de U sur un ouvert de \mathbb{R}^n . U s'appelle le domaine de la carte et n la dimension de la carte. Pour $p \in U$, on appelle $\varphi(p) = (x_1, \dots, x_n)$, les coordonnées locales de p dans la carte (U, φ) .*

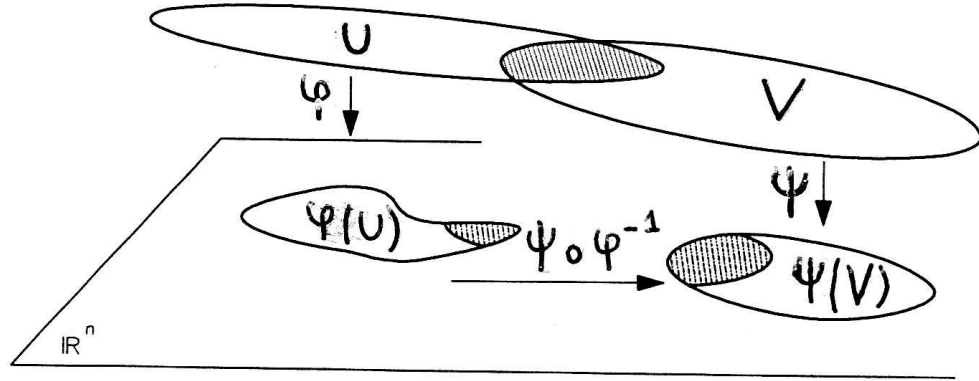
2) *Soit $k \geq 1$ un entier. Deux cartes (U, φ) et (V, ψ) de dimensions respectives n et m , sont C^k compatibles si $U \cap V = \emptyset$ ou si $U \cap V \neq \emptyset$ et*

- $\varphi(U \cap V)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n ,
- $\psi(U \cap V)$ est un ouvert de \mathbb{R}^m ,
- $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ est un difféomorphisme de classe C^k .

Dès que $U \cap V \neq \emptyset$, la dernière condition implique que les deux cartes sont nécessairement de même dimension $n = m$.

Remarque 1.1.2. Si $k = 0$, les changements de cartes sont seulement des homéomorphismes. Dans ce cas le fait que deux cartes qui s'intersectent ont nécessairement la même dimension est un résultat non trivial de topologie.

Définition 1.1.3. Un ensemble $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de cartes C^k compatibles sur M , tel que $\cup_{i \in I} U_i = M$ s'appelle un atlas de classe C^k .



Lemme 1.1.4. Soit \mathcal{A} un atlas de classe C^k sur un ensemble M . Si (U, φ) et (V, ψ) sont deux cartes C^k compatibles avec \mathcal{A} , alors elles sont C^k compatibles.

Démonstration. Si $U \cap V = \emptyset$, il n'y a rien à établir. Soit $p \in U \cap V$. Il existe $(W, \theta) \in \mathcal{A}$ telle que $p \in W$. Par hypothèse (U, φ) et (V, ψ) sont C^k compatibles avec (W, θ) . Puisque

$$\theta(U \cap V \cap W) = \theta(U \cap W) \cap \theta(V \cap W),$$

on en déduit que $\theta(U \cap V \cap W)$ est ouvert dans $\theta(W)$. Comme

$$\varphi(U \cap V \cap W) = (\varphi \circ \theta^{-1})(\theta(U \cap V \cap W)),$$

puisque $\varphi \circ \theta^{-1}$ est un difféomorphisme de classe C^k , c'est en particulier un homeomorphisme de classe C^k , et donc $\varphi(U \cap V \cap W)$ est ouvert dans $\varphi(U \cap W)$. En écrivant

$$\varphi(U \cap V) = \bigcup_{p \in U \cap V} \varphi(U \cap V \cap W_p),$$

avec W_p domaine d'une carte locale de \mathcal{A} contenant p , on en déduit que $\varphi(U \cap V)$ est ouvert dans $\varphi(U)$. De même $\psi(U \cap V)$ est ouvert dans $\psi(V)$. Il reste à montrer que $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ est de classe C^k (par

symétrie, il en sera de même pour l'application inverse). Il suffit de vérifier ceci au voisinage de $\varphi(p)$ pour $p \in U \cap V$ arbitraire. Or sur $\varphi(U \cap V \cap W)$ (avec W domaine d'une carte locale de \mathcal{A} contenant p) on a :

$$\psi \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ \theta^{-1}) \circ (\theta \circ \varphi^{-1}),$$

ce qui montre que cette application est de classe C^k sur cet ouvert, comme composée de deux applications de classe C^k . \square

Proposition 1.1.5. *Tout atlas \mathcal{A} (de classe C^k) de M est contenu dans un unique atlas maximal (de classe C^k) pour l'inclusion.*

Démonstration. Soit \mathcal{A}' l'ensemble de toutes les cartes de M , C^k compatibles avec \mathcal{A} . Par le Lemme 1.1.4, \mathcal{A}' est un atlas de classe C^k , et $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$. Si \mathcal{A}'' est un atlas de classe C^k tel que $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}''$, toutes ses cartes sont C^k compatibles avec \mathcal{A} , et donc $\mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}'$, i.e. $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}'$. Ceci établit l'existence d'un atlas maximal pour l'inclusion. Il reste à établir l'unicité. Soient $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ deux atlas de classe C^k tels que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_i, i = 1, 2$. Par le Lemme 1.1.4, $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ est un atlas de classe C^k . Donc si \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 sont maximaux pour l'inclusion, nécessairement $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$. \square

Un atlas de classe C^k maximal pour l'inclusion est dit saturé.

Définition 1.1.6. *On appelle variété de classe C^k la donnée d'un couple (M, \mathcal{A}) , où M est un ensemble et \mathcal{A} est un atlas saturé de M , de classe C^k .*

Terminologie. Quand $k = 0$, on parle de variété topologique, quand $k = 1, 2, \dots$ de variété différentielle de classe C^k , quand $k = \infty$, on parle de variété de classe C^∞ ou de variété lisse. La dimension en un point p de la variété est la dimension de toute carte locale en p . Si la dimension est la même en tout point, on l'appelle la dimension de la variété.

En pratique, on se donne une structure de variété de classe C^k en spécifiant l'ensemble M et un atlas de classe C^k . La structure de variété sous-jacente est donnée par l'unique atlas maximal de classe C^k , qui contient cet atlas. Deux atlas définissent la même variété si leurs atlas saturés (de classe C^k) respectifs coïncident. Un critère commode pour vérifier ceci est le suivant.

Proposition 1.1.7. *Deux atlas \mathcal{B} et \mathcal{C} de classe C^k , d'un ensemble M , définissent la même structure de variété de classe C^k si et seulement si leur union $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ est encore un atlas de classe C^k . Dans ce cas, on dit que les atlas \mathcal{B} et \mathcal{C} sont C^k équivalents.*

Démonstration. Appelons \mathcal{A} et \mathcal{A}' les atlas saturés de \mathcal{B} et \mathcal{C} respectivement. Si $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$, puisque $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ et $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}'$, $\mathcal{B} \cup \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, donc $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ est un atlas de classe C^k . Réciproquement, si $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ est un atlas de classe C^k , puisque \mathcal{A} et \mathcal{A}' sont saturés, on a que $\mathcal{B} \subset \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ et $\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \subset \mathcal{A}'$. Par l'unicité du saturé de $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$, on en déduit que $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$. \square

1.2 Exemples de variétés

1.2.1 Le cercle S^1

Soit $S^1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 = 1\}$, le cercle unité dans le plan. On va définir deux atlas de classe C^∞ sur S^1 . Un premier atlas $\mathcal{A} = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$, formé de deux cartes, est défini à partir des projections stéréographiques :

$$\begin{aligned}\varphi_1 : U_1 = S^1 \setminus \{(0, 1)\} &\rightarrow \mathbb{R}, & \varphi_1(u, v) &= \frac{u}{1-v} = x, \\ \varphi_2 : U_2 = S^1 \setminus \{(0, -1)\} &\rightarrow \mathbb{R}, & \varphi_2(u, v) &= \frac{u}{1+v} = y.\end{aligned}$$

Puisque $xy = \frac{u^2}{1-v^2}$, le changement de cartes est donné par

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R} \setminus \{0\} : x \rightarrow \frac{1}{x},$$

qui est un difféomorphisme de classe C^∞ .

Un autre atlas $\mathcal{B} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{1 \leq i \leq 4}$ est obtenu en projetant sur les axes de coordonnées

$$\begin{aligned}\varphi_1 : U_1 = \{(u, v) \in S^1 : v > 0\} &\rightarrow]-1, 1[, & \varphi_1(u, v) &= u, & \varphi_1^{-1}(u) &= (u, \sqrt{1-u^2}), \\ \varphi_2 : U_2 = \{(u, v) \in S^1 : v < 0\} &\rightarrow]-1, 1[, & \varphi_2(u, v) &= u, & \varphi_2^{-1}(u) &= (u, -\sqrt{1-u^2}), \\ \varphi_3 : U_3 = \{(u, v) \in S^1 : u > 0\} &\rightarrow]-1, 1[, & \varphi_3(u, v) &= v, & \varphi_3^{-1}(v) &= (\sqrt{1-v^2}, v), \\ \varphi_4 : U_4 = \{(u, v) \in S^1 : u < 0\} &\rightarrow]-1, 1[, & \varphi_4(u, v) &= v, & \varphi_4^{-1}(v) &= (-\sqrt{1-v^2}, v).\end{aligned}$$

On vérifie facilement que les changements de cartes sont des difféomorphismes C^∞ . On a par exemple

$$\varphi_4 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_4) =]-1, 0[\rightarrow \varphi_4(U_1 \cap U_4) =]0, 1[: u \rightarrow \sqrt{1-u^2},$$

l'application inverse envoyant $v \rightarrow -\sqrt{1-v^2}$. Les deux atlas \mathcal{A} et \mathcal{B} sont en fait C^∞ équivalents et définissent la même structure de variété C^∞ sur S^1 .

1.2.2 La sphère S^n

Soit $S^n = \{(u_1, \dots, u_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} u_i^2 = 1\}$, la sphère unité dans \mathbb{R}^{n+1} . On définit un atlas $\mathcal{A} = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ sur S^n à partir des projections stéréographiques

$$\begin{aligned}\varphi_1 : U_1 = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \varphi_1(u_1, \dots, u_{n+1}) &= \left(\frac{u_1}{1-u_{n+1}}, \dots, \frac{u_n}{1-u_{n+1}} \right) = (x_1, \dots, x_n), \\ \varphi_2 : U_2 = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, -1)\} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \varphi_2(u_1, \dots, u_{n+1}) &= \left(\frac{u_1}{1+u_{n+1}}, \dots, \frac{u_n}{1+u_{n+1}} \right) = (y_1, \dots, y_n).\end{aligned}$$

Puisque

$$y_i = x_i \frac{1 - u_{n+1}}{1 + u_{n+1}} \text{ et } \sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^n u_i^2}{(1 - u_{n+1})^2} = \frac{1 - u_{n+1}^2}{(1 - u_{n+1})^2} = \frac{1 + u_{n+1}}{1 - u_{n+1}},$$

on obtient le changement de cartes

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\} &\rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\} \\ (x_1, \dots, x_n) &\rightarrow \left(\frac{x_1}{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \dots, \frac{x_n}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right), \end{aligned}$$

qui est un difféomorphisme de classe C^∞ ; l'inverse est donné par $(y_1, \dots, y_n) \rightarrow (y_1 / \sum_{i=1}^n y_i^2, \dots, y_n / \sum_{i=1}^n y_i^2)$.

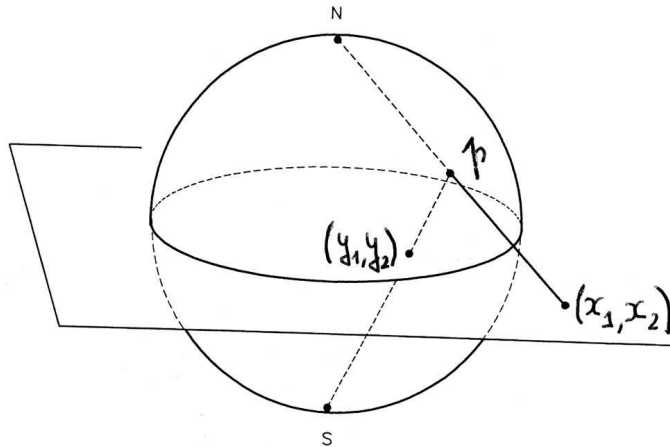
Pour $n = 2$, si l'on pense à un point $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ comme au nombre complexe $z = x_1 + ix_2$, on voit que le changement de carte s'écrit

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C} \setminus \{0\} &\rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ z = x_1 + ix_2 &\rightarrow \frac{1}{\bar{z}} = \frac{x_1 + ix_2}{x_1^2 + x_2^2} = y_1 + iy_2. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Si l'on considère alors l'atlas C^∞ équivalent $\mathcal{A}' = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \overline{\varphi_2})\}$, on voit donc que le changement de carte est donné par l'application holomorphe

$$\overline{\varphi_2} \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \overline{\varphi_2}(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C} \setminus \{0\} : z \rightarrow \frac{1}{\bar{z}}. \quad (1.2)$$

Cet atlas définit une structure de variété complexe de dimension 1 sur S^2 , i.e. les cartes sont modelées sur des ouverts de \mathbb{C} et les changements de cartes sont holomorphes. Avec cette structure, S^2 s'appelle la *sphère de Riemann*.



1.2.3 L'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

On cherche à compactifier \mathbb{R}^n de sorte que deux droites parallèles se rencontrent en un point à l'infini. Pour ce faire, on identifie \mathbb{R}^n à l'ensemble des points de coordonnées $(x_1, \dots, x_n, 1)$ dans \mathbb{R}^{n+1} . Un tel point définit une unique droite vectorielle de \mathbb{R}^{n+1} , non située dans l'hyperplan $x_{n+1} = 0$. On ajoute des "points à l'infini" en ajoutant les droites de l'hyperplan $x_{n+1} = 0$. Formellement on définit

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \{\text{droites vectorielles de } \mathbb{R}^{n+1}\} = \frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim}, \quad (1.3)$$

où la relation d'équivalence \sim est définie comme suit

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \sim (y_1, \dots, y_{n+1}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.q. } (x_1, \dots, x_{n+1}) = \lambda(y_1, \dots, y_{n+1}). \quad (1.4)$$

On note la classe d'équivalence d'un point $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, $[x] = [(x_1, \dots, x_{n+1})] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

On construit un atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{1 \leq i \leq n+1}$ sur l'ensemble $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ comme suit. Soit

$$U_i = \{[(x_1, \dots, x_{n+1})] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) : x_i \neq 0\}, \quad (1.5)$$

l'ensemble des droites vectorielles de \mathbb{R}^{n+1} qui ne sont pas situées dans l'hyperplan $x_i = 0$. Chacune de ces droites contient un unique point dont la $i^{\text{ème}}$ coordonnée vaut 1. Les coordonnées restantes de ce point fournissent les coordonnées locales dans la carte U_i . Précisément, on définit

$$\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$$

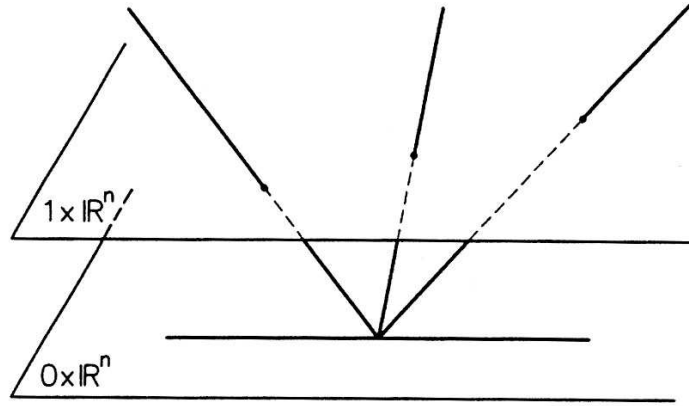
$$\varphi_i([(x_1, \dots, x_{n+1})]) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \hat{1}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right), \quad (1.6)$$

où la notation $\hat{1}$ signifie que la coordonnée est omise. Le changement de cartes $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$, est donné par

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \begin{cases} \left(\frac{y_1}{y_{j-1}}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_{j-1}}, \frac{1}{y_{j-1}}, \dots, \frac{\widehat{y_{j-1}}}{y_{j-1}}, \frac{y_j}{y_{j-1}}, \dots, \frac{y_n}{y_{j-1}} \right), & \text{si } i < j, \\ (y_1, \dots, y_n), & \text{si } i = j, \\ \left(\frac{y_1}{y_j}, \dots, \frac{y_{j-1}}{y_j}, \frac{\widehat{y_j}}{y_j}, \dots, \frac{1}{y_j}, \frac{y_i}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j} \right) & \text{si } i > j, \end{cases}$$

qui est bien un difféomorphisme de classe C^∞ .

On peut visualiser $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ comme suit. Une droite vectorielle de \mathbb{R}^3 a deux points de percée dans la sphère S^2 . Donc $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = S^2 / \sim$, où $p \sim q$ ssi p et q sont diamétralement opposés sur S^2 . Donc $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ s'identifie à l'hémisphère Nord de S^2 , avec identification des points diamétralement opposés sur l'équateur. $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ contient un ruban de Möbius, et est donc non orientable. On peut montrer que $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ne se plonge pas dans \mathbb{R}^3 , mais bien dans \mathbb{R}^4 . Cette terminologie sera définie précisément ultérieurement.



1.2.4 Variétés grassmanniennes $Gr(m, \mathbb{R}^N)$

Les variétés grassmanniennes sont des variétés très importantes qui généralisent l'espace projectif. Pour $1 \leq m \leq N - 1$, on définit

$$Gr(m, \mathbb{R}^N) = \{\text{sous-espaces vectoriels } V \text{ de dimension } m \text{ de } \mathbb{R}^N\}.$$

Clairement, $Gr(1, \mathbb{R}^N) = \mathbb{P}^{N-1}(\mathbb{R})$. Un sous-espace V est déterminé par une base de m vecteurs linéairement indépendants v_1, \dots, v_m , c.à.d. par une matrice $M = (v_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq N}$ de rang m , dont les lignes sont données par les coordonnées de v_i dans la base canonique $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, $1 \leq j \leq N$, de \mathbb{R}^N , i.e. $v_i = \sum_{j=1}^N v_{ij} e_j$. Deux telles matrices M et M' définissent le même sous-espace vectoriel V si et seulement si $M' = gM$, où $g \in GL(m, \mathbb{R})$ est une matrice inversible $m \times m$. Dans ce cas on écrira $M \sim M'$ et on notera $[M]$ la classe d'équivalence de M . On peut donc écrire

$$Gr(m, \mathbb{R}^N) = \{[M] : M \text{ est une matrice } m \times N \text{ de rang } m\}.$$

Pour $I : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq N$, une suite d'indices, on notera M_I la sous-matrice $m \times m$ de M formée par les colonnes i_1, \dots, i_m de M . On construit un atlas $\mathcal{A} = \{(U_I, \varphi_I)\}$ comme suit

$$\begin{aligned} U_I &= \{[M] \in Gr(m, \mathbb{R}^N) : \det(M_I) \neq 0\}, \\ \varphi_I : U_I &\rightarrow \mathbb{R}^{m(N-m)}, \quad \varphi_I([M]) = (M_I^{-1}M)_{I^c}, \end{aligned}$$

où $(M_I^{-1}M)_{I^c}$ est la sous-matrice $m \times (N - m)$ de $M_I^{-1}M$ obtenue en supprimant de $M_I^{-1}M$ les colonnes correspondant aux indices de I (l'ensemble de ces colonnes forme évidemment la matrice identité $m \times m$). On vérifie facilement que le changement de cartes est donné par

$$\varphi_J \circ \varphi_I^{-1} : \varphi_I(U_I \cap U_J) \rightarrow \varphi_J(U_I \cap U_J), \quad \varphi_J \circ \varphi_I^{-1}(M_{I^c}) = (M_J^{-1}M)_{J^c},$$

où M est une matrice $m \times N$ telle que M_I est la matrice identité. Ce changement de cartes est donc donné par des fonctions rationnelles dont les dénominateurs ne s'annulent pas, puisque $\det(M_J) \neq 0$. Clairement les U_I recouvrent $Gr(m, \mathbb{R}^N)$ et on a donc défini ainsi une structure de variété C^∞ sur $Gr(m, \mathbb{R}^N)$, dont la dimension est $m(N - m)$.

L'exemple le plus simple d'une variété grassmannienne qui n'est pas un espace projectif est $Gr(2, \mathbb{R}^4)$, l'espace des plans vectoriels dans \mathbb{R}^4 . C'est une variété de dimension 4. L'atlas décrit ci-dessus est dans ce cas formé de six cartes correspondant aux six choix possibles de mineurs 2×2 non nuls dans une matrice 2×4 de rang 2. Par exemple si $[M] \in U_I \cap U_J$ avec $I = \{1, 2\}$ et $J = \{1, 3\}$, il existe un unique représentant M de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

et un unique représentant M' de la forme

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & y_1 & 0 & y_2 \\ 0 & y_3 & 1 & y_4 \end{pmatrix},$$

tels que $[M] = [M']$. Le changement de cartes $\varphi_J \circ \varphi_I^{-1} : \varphi_I(U_I \cap U_J) \rightarrow \varphi_J(U_I \cap U_J)$ est alors calculé comme suit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & y_1 & 0 & y_2 \\ 0 & y_3 & 1 & y_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x_1}{x_3} & 0 & x_2 - \frac{x_1 x_4}{x_3} \\ 0 & \frac{1}{x_3} & 1 & \frac{x_4}{x_3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dans le domaine d'intersection des deux cartes, les coordonnées (y_1, y_2, y_3, y_4) sont des fonctions rationnelles des coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) , et donc de classe C^∞ , puisque $x_3 \neq 0$ sur $\varphi_I(U_I \cap U_J)$.

1.2.5 Produit de variétés

Soient M et N des variétés de classe C^k , définies par des atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ et $\mathcal{B} = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$. On définit sur l'ensemble $M \times N$ un atlas $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}_{(\alpha, \beta) \in A \times B}$, de classe C^k , où

$$\varphi_\alpha \times \psi_\beta : U_\alpha \times V_\beta \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \psi_\beta(V_\beta), \quad (p, q) \rightarrow (\varphi_\alpha(p), \psi_\beta(q)).$$

On vérifie que la structure de variété C^k ainsi définie ne dépend que de la classe d'équivalence des atlas \mathcal{A} et \mathcal{B} . Donc, par exemple, le tore de dimension 2, $T^2 = S^1 \times S^1$, est naturellement muni d'une structure de variété C^∞ . Il en va de même pour le tore de dimension n , $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ (n fois).

1.3 Topologie d'une variété

On va munir une variété M d'une topologie canonique (ne dépendant que de sa structure de variété). Dans d'autres présentations, on peut partir d'un espace topologique M , imposer aux domaines des cartes locales d'être des ouverts de M , et aux applications coordonnées d'être des homéomorphismes.

Théorème 1.3.1. *Soit (M, \mathcal{A}) une variété de classe C^k . Elle est munie d'une topologie dont les ouverts sont les réunions des domaines des cartes. Cette topologie est dite canonique.*

Démonstration. Si \mathcal{O} désigne l'ensemble des ouverts, il faut vérifier :

- (T1) \emptyset et M sont des ouverts,
- (T2) toute réunion d'ensembles de \mathcal{O} est dans \mathcal{O} ,
- (T3) toute intersection finie d'ensembles de \mathcal{O} est dans \mathcal{O} .

(T1) et (T2) sont évidents. Il suffit de vérifier (T3) pour deux éléments de \mathcal{O} . Soient donc

$$A = \cup_{j \in J} U_j \quad \text{et} \quad B = \cup_{k \in K} U_k,$$

deux réunions de domaines de cartes ; on a

$$A \cap B = \cup_{(j,k) \in J \times K} (U_j \cap U_k),$$

donc il suffit de montrer que les $U_j \cap U_k$ sont des domaines de cartes de la variété, i.e. compatibles avec les autres. Montrons que $(U_j \cap U_k, \varphi_j)$ est une carte compatible. En effet, pour toute carte (U, φ) , les ensembles $\varphi_j(U_j \cap U_k \cap U) = \varphi_j(U_j \cap U_k) \cap \varphi_j(U_j \cap U)$ et $\varphi(U_j \cap U_k \cap U) = \varphi(U_j \cap U) \cap \varphi(U_k \cap U)$ sont ouverts, comme intersection de deux ouverts. Le changement de cartes $\varphi \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_j \cap U) \rightarrow \varphi(U_j \cap U)$ étant un difféomorphisme de classe C^k , il en est de même de sa restriction $\varphi \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_j \cap U_k \cap U) \rightarrow \varphi(U_j \cap U_k \cap U)$. \square

Proposition 1.3.2. *Pour toute carte (U, φ) , l'application de U sur $\varphi(U)$ est un homéomorphisme, la variété M étant munie de la topologie canonique.*

Démonstration. Comme φ est bijective de U sur $\varphi(U)$, il reste à vérifier qu'elle est bicontinue. Montrons que φ est continue. Soit W un ouvert de $\varphi(U)$, il faut montrer que $\varphi^{-1}(W)$ est un ouvert de M . Pour cela, il suffit de voir que le couple $(\varphi^{-1}(W), \varphi)$ est une carte de la variété M , i.e. c'est une carte compatible avec une carte arbitraire de la variété M . Soit (V, ψ) une telle carte. On a que

$$\varphi(\varphi^{-1}(W) \cap V) = W \cap \varphi(U \cap V),$$

est ouvert, puisque W et $\varphi(U \cap V)$ sont ouverts. Le changement de cartes $\psi \circ \varphi^{-1}$ restreint à cet ouvert est un difféomorphisme de classe C^k sur l'ouvert $\psi(\varphi^{-1}(W) \cap V) = (\psi \circ \varphi^{-1})(W \cap \varphi(U \cap V))$. Montrons que φ^{-1} est continue, c.à.d. que φ est ouverte. Soit $O \subset U$ un ouvert de M . Par définition $O = \cup_i U_i$

avec (U_i, φ_i) carte locale de M . Puisque (U_i, φ_i) est compatible avec (U, φ) , $\varphi(U_i \cap U) = \varphi(U_i)$ est ouvert dans $\varphi(U)$, et donc $\varphi(O) = \cup_{i \in I} \varphi(U_i)$ est ouvert dans $\varphi(U)$. \square

Pour d'autres caractérisations de la topologie canonique d'une variété, nous renvoyons aux exercices. On voit facilement que la dimension des cartes d'une variété est constante sur toute composante connexe de la variété.

Avertissement. Dans la suite, sauf mention explicite du contraire, nous supposons que les variétés sont *séparées*, c'est-à-dire que deux points distincts appartiennent toujours à des domaines de cartes disjoints. Nous supposons également que les variétés sont *à base dénombrable*. Cela signifie qu'il existe un ensemble d'ouverts qui est dénombrable et que tout ouvert de la variété est union d'éléments de cet ensemble (appelé base de la topologie de la variété). On peut montrer que ceci équivaut à l'existence d'un atlas dénombrable définissant la variété.

1.4 Sous-variétés

Définition 1.4.1. Soit (M, \mathcal{A}) une variété de classe C^k de dimension n . On dit que $N \subset M$ est une sous-variété de dimension d de M , si pour tout $p \in N$, il existe une carte (U, φ) de M en p telle que

$$\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}). \quad (1.7)$$

On dit que la carte (U, φ) linéarise $U \cap N$

La proposition suivante est facile à établir.

Proposition 1.4.2. Soit (M, \mathcal{A}) une variété de classe C^k et N une sous-variété de M . Lorsque (U, φ) parcourt les cartes de M du type (1.7), les $(U \cap N, \varphi|_{U \cap N})$ forment un atlas de classe C^k de N . En particulier N a une structure canonique de variété de classe C^k .

On peut montrer que la topologie canonique d'une sous-variété N d'une variété M est la topologie induite par la topologie canonique de la variété M , c.à.d. que les ouverts de N sont de la forme $O \cap N$ avec O ouvert de M .

L'espace euclidien $M = \mathbb{R}^n$ est naturellement muni d'une structure de variété de classe C^k , pour tout $k \geq 0$, définie par l'atlas formé d'une seule carte $\{(M, \varphi = id)\}$, où id est l'application identité. L'atlas saturé définissant la structure de variété est formé de toutes les cartes (U, φ) où U est un ouvert de \mathbb{R}^n et $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ est un difféomorphisme de classe C^k . La Définition 1.4.1 particularisée à ce cas devient donc

Définition 1.4.3. $N \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de classe C^k de dimension d , si pour tout $p \in N$, il existe U un ouvert de \mathbb{R}^n contenant p , et un difféomorphisme φ de classe C^k de U sur son image $\varphi(U)$, tel que $\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$.

Rappelons le théorème fondamental d'inversion locale.

Théorème 1.4.4. (Théorème d'inversion locale). Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^k , $k \geq 1$, définie sur un ouvert U de \mathbb{R}^n . Soit $p \in U$ un point tel que la différentielle $Df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est inversible. Alors, il existe un ouvert $V \subset U$ contenant p tel que la restriction de f à V est un difféomorphisme de classe C^k de V sur $f(V)$.

Le théorème suivant exprime que localement toute sous-variété de \mathbb{R}^n est définie par un système d'équations.

Théorème 1.4.5. Soit N un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) N est une sous-variété de \mathbb{R}^n de classe C^k , $k \geq 1$, et de codimension m (i.e. de dimension $n - m$),
- ii) Pour tout $p \in N$, il existe un ouvert V de \mathbb{R}^n contenant p et une application $f : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^k , telle que $Df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est de rang m et $V \cap N = f^{-1}(0)$.

De plus, l'espace tangent en p est donné par $T_p N = \ker Df_p$.

Démonstration. $i) \Rightarrow ii)$ Soit $p \in N$. Par hypothèse, il existe U un ouvert de \mathbb{R}^n contenant p et φ un difféomorphisme de classe C^k de U sur $\varphi(U)$ tel que $\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^{n-m} \times \{0\})$. Définissons

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad f(x) = (\varphi_{n-m+1}(x), \dots, \varphi_n(x)).$$

f est de classe C^k et $U \cap N = f^{-1}(0)$. Puisque Df_p est la matrice $m \times n$ formée des m dernières lignes de $D\varphi_p$ qui est non singulière, Df_p est de rang m . Donc $ii)$ est établie en prenant $V = U$ et f comme ci-dessus.

$ii) \Rightarrow i)$ Soit $p \in N$ et choisissons V et $f = (f_1, \dots, f_m)$ comme en $ii)$. Par hypothèse, la matrice jacobienne $Df_p = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ est de rang m . Modulo une permutation des coordonnées, on peut supposer que la matrice $m \times m$

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ n-m+1 \leq j \leq n}},$$

est non singulière, i.e. $\det A \neq 0$. Définissons

$$\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n : \varphi(x) = (x_1, \dots, x_{n-m}, f_1(x), \dots, f_m(x)).$$

On calcule facilement que

$$D\varphi_p = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ * & A \end{pmatrix},$$

avec Id la matrice identité $(n-m) \times (n-m)$. Puisque $\det(D\varphi_p) = \det A \neq 0$, par le théorème d'inversion locale, il existe un ouvert U de \mathbb{R}^n contenant p tel que la restriction de φ à U est un difféomorphisme de classe C^k sur $\varphi(U)$. Puisque $N \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\}$ et que φ est un difféomorphisme de U sur $\varphi(U)$,

$$\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^{n-m} \times \{0\}),$$

i.e. (U, φ) est une carte de classe C^k linéarisant $U \cap N$.

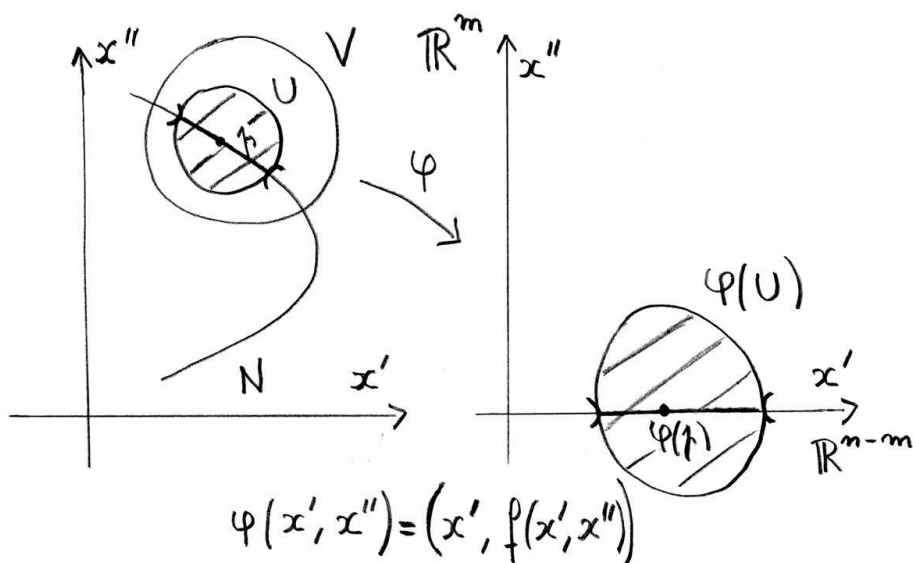
L'espace tangent en p à N est donné par

$$T_p N = D\varphi_{\varphi(p)}^{-1}(\mathbb{R}^{n-m} \times \{0\}).$$

Soit $v \in \mathbb{R}^{n-m}$. On a

$$\begin{aligned} Df_p(d\varphi_{\varphi(p)}^{-1}(v, 0)) &= D(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}(v, 0) \\ &= \frac{d}{dt} \left(f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv, 0) \right)_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

puisque $f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv, 0) = 0$, pour t suffisamment petit. Ceci montre que $T_p N \subset \ker Df_p$. Comme $\dim T_p N = n - m$ et $\dim \ker Df_p = n - m$, on en déduit que $T_p N = \ker Df_p$. \square



Remarque 1.4.6. Le Théorème 1.4.5 s'applique en particulier au cas où $N = f^{-1}(0)$ et f est une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe $C^k, k \geq 1$, telle que la différentielle Df_p est surjective en tout point $p \in N$.

Exemple. Soit $O(N, \mathbb{R}) = \{\text{matrices } A, N \times N : AA^T = I\}$ (groupe orthogonal). On identifie l'ensemble des matrices $N \times N$ à \mathbb{R}^{N^2} et l'ensemble des matrices symétriques à $\mathbb{R}^{N(N+1)/2}$. Avec cette identification, si l'on définit

$$f : \mathbb{R}^{N^2} \rightarrow \mathbb{R}^{N(N+1)/2}, \quad f(A) = AA^T - I,$$

on a $O(N, \mathbb{R}) = f^{-1}(0)$. On calcule

$$Df_A(B) = \frac{d}{dt} f(A+tB)|_{t=0} = \frac{d}{dt} ((A+tB)(A^T+tB^T) - I)|_{t=0} = BA^T + AB^T.$$

Montrons que Df_A est surjective si $A \in O(n, \mathbb{R})$. Soit C une matrice symétrique ($C = C^T$), et soit $B = \frac{1}{2}CA$, alors

$$Df_A(B) = \frac{1}{2}(CAA^T + AA^TC^T) = \frac{1}{2}(C + C^T) = C,$$

et donc Df_A est surjective. Du Théorème 1.4.5 on déduit que $O(N, \mathbb{R})$ est une sous-variété lisse de \mathbb{R}^{N^2} de dimension $N(N-1)/2$. Elle a deux composantes connexes, données par $SO(N, \mathbb{R}) = \{A \in O(N, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$ et $\{A \in O(N, \mathbb{R}) : \det A = -1\}$. Les ensembles $O(N, \mathbb{R})$ et $SO(N, \mathbb{R})$ sont des groupes, munis d'une structure de variété différentielle de classe C^∞ ; ce sont des *groupes de Lie*. $SO(N, \mathbb{R})$ s'appelle le groupe orthogonal spécial. On a

$$T_A O(N, \mathbb{R}) = \ker Df_A = \{B : BA^T + AB^T = 0\}.$$

En particulier, l'espace tangent en l'identité

$$T_I O(N, \mathbb{R}) = T_I SO(N, \mathbb{R}) = \{B : B + B^T = 0\},$$

est donné par les matrices antisymétriques. C'est l'*algèbre de Lie* du groupe.

On peut aussi caractériser les sous-variétés de \mathbb{R}^n en termes d'une paramétrisation locale.

Théorème 1.4.7. Soit N un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) N est une sous-variété de \mathbb{R}^n de classe $C^k, k \geq 1$, et de dimension d ,
- ii) Pour tout $p \in N$, il existe un ouvert O de \mathbb{R}^n , contenant p , un ouvert D de \mathbb{R}^d contenant 0 , et une application $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k telle que $f(0) = p$, f étant un homéomorphisme de D sur $N \cap O$ (muni de la topologie induite par celle de \mathbb{R}^n), et Df_0 étant injective.

De plus, l'espace tangent en p est donné par $T_p N = \text{im } Df_0$.

Démonstration. $i) \Rightarrow ii)$ Soit $p \in N$. Par hypothèse, il existe un ouvert U de \mathbb{R}^n , et un difféomorphisme φ de classe C^k de U sur $\varphi(U)$ tel que $\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$. On peut toujours supposer (modulo une translation) que $\varphi(p) = 0$. On pose alors $D = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$ et $f(x_1, \dots, x_d) = \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0)$; φ étant un homéomorphisme de U sur $\varphi(U)$, il en résulte immédiatement que f est un homéomorphisme de D sur $f(D)$. La matrice

$$Df_0 = \left(\frac{\partial \varphi_i^{-1}}{\partial x_j}(0) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq d}},$$

est de rang maximal d , puisque $D\varphi_0^{-1}$ est non singulière.

$ii) \Rightarrow i)$ Par hypothèse, la matrice jacobienne $Df_0 = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq d}}$ est de rang d . Modulo une permutation des coordonnées dans \mathbb{R}^n , on peut supposer que la matrice $d \times d$

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0) \right)_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq d}},$$

est non singulière, i.e. $\det A \neq 0$. Définissons

$$g : D \times \mathbb{R}^{n-d} \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ g(x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_{n-d}) = (f_1(x), \dots, f_d(x), y_1 + f_{d+1}(x), \dots, y_{n-d} + f_n(x)).$$

On a $g(x, 0) = f(x)$. On calcule facilement que

$$Dg_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ * & Id \end{pmatrix},$$

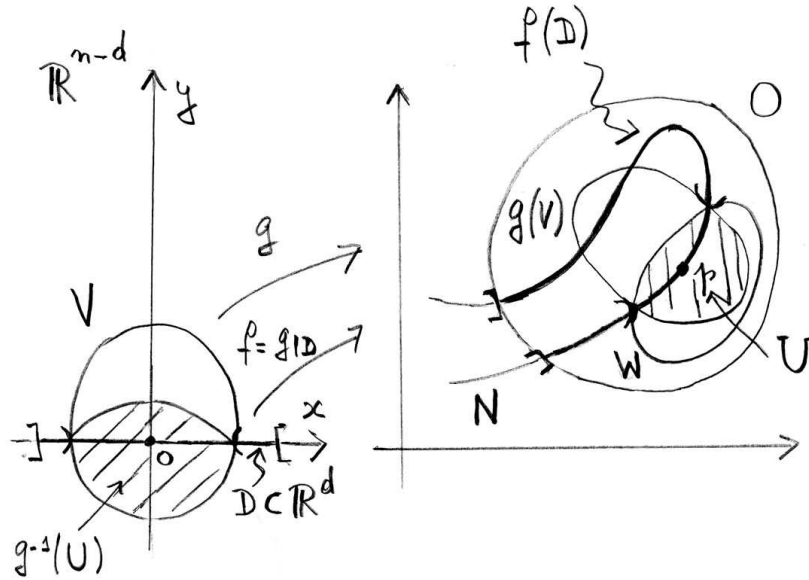
avec Id la matrice identité $(n-d) \times (n-d)$, et donc $\det(Dg_0) = \det A \neq 0$. Par le théorème d'inversion locale, il existe $V \subset D \times \mathbb{R}^{n-d}$ un ouvert contenant 0 tel que g soit un difféomorphisme de classe C^k de V sur $g(V)$. Puisque f est un homéomorphisme de D sur $O \cap N$, il existe $W \subset O$ ouvert de \mathbb{R}^n tel que $f(V \cap (D \times \{0\})) = W \cap N$. Soit $U = g(V) \cap W$. L'application

$$\varphi = g^{-1}|_U : U \rightarrow g^{-1}(U),$$

est un difféomorphisme de classe C^k , tel que

$$\varphi(U \cap N) = V \cap (D \times \{0\}) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}).$$

Le couple (U, φ) est une carte linéarisante en p . Clairement $\text{im } Df_0 = T_p N$. \square

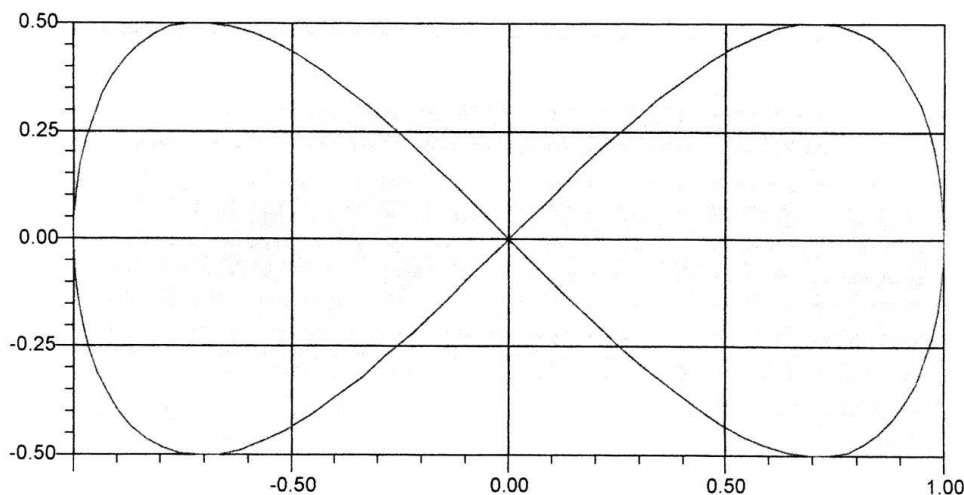


Remarque 1.4.8. 1) Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe $C^k, k \geq 1$, définie sur un ouvert D de \mathbb{R}^d . Si Df_p est injective en tout point $p \in D$ et si f est un homéomorphisme de D sur $f(D)$ (muni de la topologie induite par \mathbb{R}^n), le Théorème 1.4.7 implique que $f(D)$ est une sous-variété de \mathbb{R}^n .

2) La condition que f soit un homéomorphisme de D sur $f(D)$ est essentielle, comme le montre l'exemple suivant. Soit l'application $f :]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^∞ , définie par

$$f(t) = \left(\sin t, \frac{1}{2} \sin(2t) \right).$$

C'est un paramétrage de la lemniscate $y^2 - x^2 + x^4 = 0$. On vérifie facilement que $f'(t) \neq 0, \forall t$, et que f est injective (donc en bijection avec son image). L'image d'un petit voisinage de 0 par f n'est pas un ouvert de $N = f(]-\pi, \pi[)$, car la trace sur N d'un voisinage ouvert de $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ aussi petit que l'on veut, contient toujours des points $f(t)$ avec t proche de $\pm\pi$. On se convainc facilement que N n'est pas une sous-variété lisse de \mathbb{R}^2 .



1.5 Morphismes entre variétés

Définition 1.5.1. Soient M et N des variétés de classe C^k , $k \geq 0$. Une application $f : M \rightarrow N$ est de classe C^l , avec $0 \leq l \leq k$, si pour tout $p \in M$, il existe des cartes (U, φ) de M et (V, ψ) de N telles que $p \in U$, $f(U) \subset V$ et

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V),$$

soit de classe C^l . Cette application s'appelle l'expression locale de f dans les cartes (U, φ) et (V, ψ) .

Il est utile d'observer que

Remarque 1.5.2. Si f est de classe C^l , alors ses expressions locales dans toutes cartes (U, φ) et (V, ψ) telles que $f(U) \subset V$ sont de classes C^l .

En effet, soit $x \in \varphi(U)$, $p = \varphi^{-1}(x)$ et des cartes (U_0, φ_0) et (V_0, ψ_0) dans lesquelles l'expression locale de f est de classe C^l , avec $p \in U_0$. Il suffit de noter que

$$W = (\varphi_0 \circ \varphi^{-1})^{-1}(\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1})^{-1}(\psi_0(V \cap V_0)) \quad (1.8)$$

est un ouvert de $\varphi(U)$, contenant x , et que, dans celui-ci,

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ \psi_0^{-1}) \circ (\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1}) \circ (\varphi_0 \circ \varphi^{-1}),$$

ce qui prouve que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est de classe C^l au voisinage de x puisque les changements de cartes $\psi \circ \psi_0^{-1}$ et $\varphi_0 \circ \varphi^{-1}$ sont des difféomorphismes de classe C^k et $0 \leq l \leq k$. En ce qui concerne (1.8), on remarque que $\psi_0(V \cap V_0)$ est ouvert par définition de la compatibilité des cartes, ensuite on conclut en utilisant le fait que $\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1}$ et $\varphi_0 \circ \varphi^{-1}$ sont continues.

Chemin faisant, nous venons de voir que

Remarque 1.5.3. Si f est de classe C^l et si les domaines des cartes (U, φ) et (V, ψ) contiennent p et $f(p)$ respectivement, alors on peut toujours restreindre U pour qu'en outre $f(U) \subset V$.

En particulier, *les fonctions de classe C^l entre variétés sont continues.* Nous utiliserons ce fait librement dans la suite.

Exemple. Soit $f : S^2 \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ l'application définie par $f(x_1, x_2, x_3) = [(x_1, x_2, x_3)]$. On munit S^2 de l'atlas formé par les six cartes $\psi_1^+ : U_1^+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 : x_1 > 0\} \rightarrow \{(x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 : x_2^2 + x_3^2 < 1\}$, $\psi_1^+(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3)$; $\psi_1^- : U_1^- = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 : x_1 < 0\} \rightarrow \{(x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 : x_2^2 + x_3^2 < 1\}$, $\psi_1^-(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3)$, etc. $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ est muni de l'atlas défini en 1.2.3. Soit, par exemple, $(x_1, x_2, x_3) \in U_3^+$, i.e. $x_3 > 0$. Son image appartient au domaine de la carte (U_3, φ_3) de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, avec $U_3 = \{[(x_1, x_2, x_3)] : x_3 \neq 0\}$. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} U_3^+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 : x_3 > 0\} & \xrightarrow{f} & U_3 = \{[(x_1, x_2, x_3)] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : x_3 \neq 0\} \\ \downarrow \psi_3^+ & & \downarrow \varphi_3 \\ \psi_3^+(U_3^+) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\} & \xrightarrow{\varphi_3 \circ f \circ (\psi_3^+)^{-1}} & \varphi_3(U_3) = \mathbb{R}^2 \end{array}$$

On calcule facilement que l'expression locale de f dans ces cartes est

$$\varphi_3 \circ f \circ (\psi_3^+)^{-1}(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}} \right),$$

qui est bien une fonction de classe C^∞ sur le disque unité ouvert $\psi_3^+(U_3^+)$.

Définition 1.5.4. Soient M et N deux variétés de classe C^k , $k \geq 1$. Une bijection $f : M \rightarrow N$ de classe C^k dont l'inverse est de classe C^k s'appelle un *difféomorphisme de classe C^k* .

Lorsqu'on spécialise la Définition 1.5.1 à M une variété de classe C^k et $N = \mathbb{R}$ muni de sa structure canonique de variété de classe C^k , on obtient la définition d'une fonction de classe C^l , $0 \leq l \leq k$, sur M .

Définition 1.5.5. Soit M une variété de classe C^k , $k \geq 0$. Une application $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^l , avec $0 \leq l \leq k$, si pour tout $p \in M$, il existe une carte locale (U, φ) de M , telle que $p \in U$ et

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R},$$

est de classe C^l . Clairement, il suffit de vérifier ceci pour toutes les cartes d'un atlas définissant la structure de variété de classe C^k de M .

Notation. Dans la suite on notera $C^l(M, N)$ l'ensemble des applications de classe C^l entre deux variétés M et N de classe C^k , $k \geq l$; $C^l(M, \mathbb{R})$ ou plus simplement $C^l(M)$ dénotera donc l'ensemble des fonctions de classe C^l sur M à valeurs réelles.

1.6 Exercices

1. Définir un atlas sur $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, à l'aide de cartes locales du type $(x, y, z) \rightarrow (x, y)$, $(x, y, z) \rightarrow (y, z)$, $(x, y, z) \rightarrow (x, z)$. Montrer que cet atlas est C^∞ compatible avec l'atlas défini par les projections stéréographiques à partir du pôle nord et du pôle sud.

2. **Variétés grassmanniennes** $Gr(k, \mathbb{R}^n)$. Dans cet exercice on construit des variétés très importantes qui généralisent l'espace projectif. Soit $0 < k < n$ et soit

$$M(k, n) = \{\text{matrices } A, k \times n, \text{ de rang } k\}.$$

(a) Les lignes de $A \in M(k, n)$ engendrent un sous-espace vectoriel de dimension k de \mathbb{R}^n . Montrer que A et A' engendrent le même sous-espace vectoriel si et seulement si il existe une matrice inversible g , $k \times k$, telle que $A' = gA$.

(b) Nous disons que $A, A' \in M(k, n)$ sont équivalentes, $A \sim A'$, si elles engendrent le même sous-espace vectoriel de dimension k et nous définissons

$$Gr(k, \mathbb{R}^n) = M(k, n) / \sim (= \{\text{sous-espaces vectoriels de dimension } k \text{ de } \mathbb{R}^n\}).$$

Nous notons $[A]$ la classe d'équivalence correspondante.

Pour $J : 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$, un choix de k indices, on notera A_J la sous-matrice $k \times k$ de A formée par les colonnes j_1, \dots, j_k de A . Soit $U_J = \{[A] \in Gr(k, \mathbb{R}^n) : \det m_J(A) \neq 0\}$. Définissons

$$\varphi_J : U_J \rightarrow \mathbb{R}^{k(n-k)}, \quad \varphi_J([A]) = (A_J^{-1}A)_{J^c},$$

où $(A_J^{-1}A)_{J^c}$ est la sous-matrice $k \times (n-k)$ de $A_J^{-1}A$ obtenue en supprimant de $A_J^{-1}A$ les colonnes correspondant aux indices J . Montrer que l'ensemble $\mathcal{A} = \{(U_J, \varphi_J)\}_J$ définit un atlas de classe C^∞ sur $Gr(k, \mathbb{R}^n)$.

(c) Calculer explicitement les changements de cartes pour $Gr(2, \mathbb{R}^4)$, la grassmannienne des plans de \mathbb{R}^4 .

(d) Montrer que $Gr(1, \mathbb{R}^n) = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$. Qu'en est-il de $Gr(n-1, \mathbb{R}^n)$?

3. Soit $T = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ le tore de dimension n et $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow T$ la projection canonique. Montrer qu'il est possible de définir un atlas C^∞ sur T à partir des ensembles $\pi(U)$ où U est un ouvert de \mathbb{R}^n suffisamment petit pour que $\pi|_U : U \rightarrow \pi(U)$ soit bijective.

Indication. Bien qu'un atlas soit défini indépendamment d'une topologie, vous aurez besoin d'utiliser la topologie quotient sur T .

4. Soit M une variété dont la structure est définie par un atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de classe C^k . Démontrer que O est ouvert pour la topologie canonique de M ssi $\varphi_i(O \cap U_i)$ est un ouvert de $\varphi_i(U_i)$ pour tout $i \in I$.

5. Soit $M = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{p_1, p_2\}$ avec $p_1 \neq p_2$. Soit l'atlas sur M défini par les deux cartes $\varphi_i : U_i = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{p_i\} \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2$, avec

$$\varphi_i(x) = x, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad \varphi_i(p_i) = 0.$$

Montrer que M est une variété C^∞ et que M n'est pas un espace topologique séparé pour la topologie canonique de cette variété.

6. Montrer que la dimension des cartes est constante sur toute composante connexe M d'une variété de classe $C^k, k \geq 0$, munie de sa topologie canonique. Construire une variété non connexe dont la dimension n'est pas définie.

7. Sur $M = \mathbb{R}$, on considère les deux atlas C^∞ suivants $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, id)\}$ et $\mathcal{B} = \{(\mathbb{R}, \varphi)\}$, où $id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est l'identité et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $\varphi(x) = x^3$.

- (a) Ces deux atlas définissent-ils la même structure de variété C^∞ sur \mathbb{R} ?
 (b) Ces deux variétés sont-elles C^∞ difféomorphes ?

8. Parmi les sous-ensembles suivants, lesquels sont des sous-variétés (de classe $C^k, k \geq 0$) de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 ? Donner alors la dimension et la classe C^k .

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1\}$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } x^2 + y^2 - x = 0\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x|\}.$$

9. **Le groupe spécial linéaire $SL(n, \mathbb{R})$ comme sous-variété de \mathbb{R}^{n^2} .**

(a) Soit A une matrice (n, n) . Montrer que

$$\det(I + tA) = 1 + t \operatorname{tr}(A) + O(t^2),$$

avec I la matrice identité et $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$, la trace de A .

(b) Le groupe spécial linéaire est défini comme suit

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{\text{matrices } A (n, n) : \det A = 1\}.$$

Montrer que $SL(n, \mathbb{R})$ est une sous-variété de \mathbb{R}^{n^2} de codimension 1.

(c) Calculer l'espace tangent $T_A SL(n, \mathbb{R})$. En déduire que l'espace tangent en l'unité du groupe $T_I SL(n, \mathbb{R})$ est formée des matrices de trace nulle.

(d) $GL(n, \mathbb{R}) = \{\text{matrices } A (n, n) : \det A \neq 0\}$, est-il une sous-variété de \mathbb{R}^{n^2} ? Dans l'affirmative, donner sa dimension et l'espace tangent en chaque point.

10. Soit N une sous-variété (de dimension d) de classe C^k d'une variété M (de dimension n) de classe C^k .

(a) Montrer que pour toute carte (V, ψ) de la variété N en p , il existe une carte linéarisante (U, φ) de M en p telle que $U \cap N \subset V$ et $\varphi|_{U \cap N} = \psi|_{U \cap N}$.

(b) En déduire que la topologie canonique de N est la topologie induite par la topologie canonique de M .

11. **Les variétés de Stiefel.** Soient $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n$. Définissons l'ensemble

$$V(k, n) = \{A \in \mathbb{R}^{k \times n} : AA^T = Id_{k \times k}\}.$$

On appelle $V(k, n)$ une variété de Stiefel.

(a) Montrer que

$$V(k, n) = \{(v_1, v_2, \dots, v_k) \in \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ fois}} : (v_i, v_j) = \delta_{ij}\},$$

où (\cdot, \cdot) est le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n .

(b) Montrer que $V(k, n)$ est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^{k \times n}$.

(c) Montrer que $V(k, n)$ est une sous-variété de classe C^∞ de $\mathbb{R}^{k \times n}$. Déterminer la dimension de la sous-variété $V(k, n)$ de deux façons différentes. Donner l'espace tangent en un point $A \in V(k, n)$.

(d) Montrer que l'application $f : V(k, n) \rightarrow Gr(k, n)$ définie par $f(v_1, \dots, v_k) =$ sous-espace vectoriel engendré par v_1, \dots, v_k , est un morphisme de classe C^∞ .

(e) En déduire que $Gr(k, n)$ est une variété compacte.

Chapitre 2

Espace tangent et champs de vecteurs

La conception intuitive de l'espace tangent à une surface est liée au fait que la surface est plongée dans l'espace euclidien à trois dimensions. Pour une variété abstraite, il est nécessaire de définir l'espace tangent avec précision, ce que nous ferons dans ce chapitre.

2.1 Espace tangent et dérivations ponctuelles

Soit M une variété de classe C^k , $k \geq 1$ et $p \in M$. On note

$$C_p = \{c : I \rightarrow M \text{ de classe } C^1 : I \text{ est un intervalle ouvert de } \mathbb{R} \\ \text{contenant } 0 \text{ et } c(0) = p\}.$$

On dit que deux courbes $c_1, c_2 \in C_p$ sont équivalentes si elles ont même tangente dans une carte locale (U, φ) en p ; on écrira $c_1 \sim c_2$. Cette notion est indépendante du choix de la carte locale, puisque si (V, ψ) est une autre carte locale en p , et $c \in C_p$, et si v et w désignent les vecteurs tangents aux courbes $\varphi(c(t))$ en $\varphi(p)$ et $\psi(c(t))$ en $\psi(p)$ respectivement, on a

$$w = \frac{d}{dt}\psi(c(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(c(t)))|_{t=0} = D(\psi \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)}v, \quad (2.1)$$

Définition 2.1.1. *L'espace tangent en p est l'espace quotient*

$$T_pM = C_p / \sim,$$

par la relation d'équivalence définie ci-dessus. On note $[c]$ un élément de T_pM .

On notera

$$\theta_p^\varphi : T_pM \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

l'application qui donne les coordonnées d'un vecteur tangent en p dans la carte locale (U, φ) :

$$\theta_p^\varphi([c]) = \frac{d}{dt}\varphi(c(t))|_{t=0}. \quad (2.2)$$

Cette application est injective par définition de l'espace tangent, elle est aussi surjective puisque tout $v \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrire

$$v = \theta_p^\varphi[c(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv)].$$

L'application θ_p^φ définit une structure d'espace vectoriel sur T_pM , par transport de la structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R}^n .

Proposition 2.1.2. *La structure d'espace vectoriel obtenue sur T_pM est indépendante du choix de la carte locale en p .*

Démonstration. Si v_1, v_2 et w_1, w_2 sont les expressions locales de deux vecteurs tangents $[c_1], [c_2] \in T_pM$ dans deux cartes locales (U, φ) et (V, ψ) en p , il faut vérifier que

$$t \rightarrow \varphi^{-1}(\varphi(p) + t(v_1 + v_2)) \quad \text{et} \quad t \rightarrow \psi^{-1}(\psi(p) + t(w_1 + w_2)),$$

sont deux courbes équivalentes dans C_p . En effet, leurs projections dans la carte locale (V, ψ) ont même tangente $w_1 + w_2$ en $\psi(p)$ puisque

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\psi \circ \varphi^{-1}(\varphi(p) + t(v_1 + v_2)) &= D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}(v_1 + v_2) \\ &= D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}(v_1) + D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}(v_2) \\ &= w_1 + w_2, \end{aligned}$$

en utilisant la linéarité de l'application différentielle $D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}$. Donc la définition de $[c]_1 + [c]_2$ est indépendante du choix de la carte locale, il en va de même de $\lambda[c], \forall \lambda \in \mathbb{R}$. \square

Définition 2.1.3. *Soit $f : M \rightarrow N$ un morphisme de classe C^1 entre deux variétés de classe $C^k, k \geq 1$. On définit l'application linéaire tangente $T_p f : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ par*

$$T_p f([c]) = [f \circ c]. \quad (2.3)$$

On l'appelle aussi la différentielle de f en p , et on la note aussi df_p ou $df(p)$.

L'expression en coordonnées locales de l'application tangente $T_p f$ est donnée par la différentielle de l'expression locale, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, de l'application f . En effet, si (U, φ) et (V, ψ) sont deux cartes locales respectivement

en p et $f(p)$, telles que $f(U) \subset V$, on a

$$\begin{aligned}
\theta_{f(p)}^\psi(T_f([c])) &= \frac{d}{dt}\psi(f(c(t)))|_{t=0}, \\
&= \frac{d}{dt}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(c(t)))|_{t=0}, \\
&= D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}\left(\frac{d}{dt}\varphi(c(t))|_{t=0}\right), \\
&= D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}\left(\theta_p^\varphi([c])\right). \tag{2.4}
\end{aligned}$$

Proposition 2.1.4. *L'application tangente $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ est linéaire.*

Démonstration. La formule (2.4) montre que

$$\begin{aligned}
\theta_{f(p)}^\psi \circ T_p f &= D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \circ \theta_p^\varphi \Leftrightarrow \\
T_p f &= (\theta_{f(p)}^\psi)^{-1} \circ D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \circ \theta_p^\varphi.
\end{aligned}$$

Comme les applications $\theta_{f(p)}^\psi$, $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}$ et θ_p^φ sont linéaires, on en déduit que $T_p f$ est linéaire, comme composée d'applications linéaires. \square

Dans le cas où $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 sur M , df_p est une application linéaire de $T_p M$ vers $T_{f(p)} \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}$ et l'on écrit

$$df_p([c]) = \frac{d}{dt}f(c(t))|_{t=0}.$$

On vérifie aussi facilement la règle de dérivation des fonctions composées

$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p,$$

pour $f : M_1 \rightarrow M_2$ et $g : M_2 \rightarrow M_3$ des applications de classe C^1 entre variétés de classes C^k , $k \geq 1$.

Définition 2.1.5. *Soit $f : M \rightarrow N$ un morphisme de classe C^k entre variétés de classe C^k , $k \geq 1$.*

- 1) f est une immersion en $p \in M$ ssi $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ est injective.
- 2) f est une immersion ssi f est une immersion en tout point.
- 3) f est une submersion en p ssi $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ est surjective.
- 4) f est une submersion ssi f est une submersion en tout point.
- 5) f est un plongement ssi f est une immersion et f est un homéomorphisme de M sur $f(M)$, avec $f(M)$ munie de la topologie induite par N .

Théorème 2.1.6. *Soit un morphisme de classe C^k entre deux variétés M et N de classe C^k , $k \geq 1$.*

- i) *Soit $q \in N$. Si f est une submersion en tout $p \in f^{-1}(q)$, alors $f^{-1}(q)$ est une sous-variété de classe C^k de M et $T_p f^{-1}(q) = \ker df_p$.*

ii) Si f est un plongement, alors $f(M)$ est une sous-variété de classe C^k de N , C^k difféomorphe à M , et pour tout $p \in M$, on a $T_{f(p)}f(M) = \text{im } df_p$.

Démonstration. Puisque la notion de sous-variété est une notion locale, en passant à des cartes locales, on déduit aisément les résultats des Théorèmes 1.4.5 et 1.4.7. \square

Dans la suite, nous supposons toujours que les variétés sont de classe C^∞ , on dit aussi variétés lisses. En effet, un théorème de Whitney, qui dépasse le niveau d'un cours introductif de géométrie différentielle, garantit qu'une variété de classe C^k , $k \geq 1$, est C^k difféomorphe à une unique variété de classe C^∞ . On peut dans ce cas donner une autre définition équivalente de l'espace tangent.

Définition 2.1.7. Soit M une variété lisse et $p \in M$. On dit que deux fonctions C^∞ , f et g , définies respectivement sur des voisinages ouverts U et V de p , à valeurs réelles, ont même germe en p s'il existe un ouvert $W \subset U \cap V$ et contenant p , tel que $f|_W = g|_W$. On note $f \sim_p g$ la relation d'équivalence ainsi définie. $\mathcal{F}_p(M)$ désigne l'espace des germes de fonctions C^∞ en p , c'est une algèbre pour l'addition et la multiplication des fonctions.

Définition 2.1.8. Une application $\delta : \mathcal{F}_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ est une dérivation ponctuelle en p si $\forall f, g \in \mathcal{F}_p(M)$ et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

- 1) $\delta(\alpha f + \beta g) = \alpha \delta(f) + \beta \delta(g)$,
- 2) $\delta(fg) = f(p)\delta(g) + g(p)\delta(f)$.

On note \mathcal{D}_p l'espace vectoriel réel des dérivations ponctuelles en p .

Si $f(x) = \alpha$ est constante au voisinage de p , on a $\delta(\alpha) = \delta(\alpha \cdot 1) = \alpha \delta(1)$ et $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = 1 \cdot \delta(1) + 1 \cdot \delta(1)$. On en déduit que $\delta(1) = 0$ et $\delta(\alpha) = 0$.

Exemple 2.1.9. Soit (U, φ) une carte locale en p . Notons (x_1, \dots, x_n) les coordonnées locales. On définit des dérivations ponctuelles en p , $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ comme suit. Soit f une fonction C^∞ définie sur un voisinage ouvert W de p . Notons F , l'expression locale de la restriction de f à $U \cap W$, i.e. $F = f \circ \varphi^{-1}$ définie sur $\varphi(U \cap W)$, on pose

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p f = \frac{\partial F}{\partial x_i}(\varphi(p)). \quad (2.5)$$

Si f, g sont deux germes en p , et F, G désignent leurs expressions locales dans la carte (U, φ) , on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (fg) &= \frac{\partial (FG)}{\partial x_i}(\varphi(p)) = F(\varphi(p)) \frac{\partial G}{\partial x_i}(\varphi(p)) + G(\varphi(p)) \frac{\partial F}{\partial x_i}(\varphi(p)) \\ &= f(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (g) + g(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (f), \end{aligned}$$

donc la propriété 2) est satisfaite et $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ est une dérivation ponctuelle en p (la propriété 1) est évidente).

Lemme 2.1.10. (Lemme de Hadamard). *Soit O un ouvert convexe de \mathbb{R}^n et soit $a \in O$. Alors, toute fonction $F \in C^\infty(O)$ peut se mettre sous la forme*

$$F(x) = F(a) + \sum_{i=1}^n H_i(x)(x_i - a_i),$$

avec $H_i(x) \in C^\infty(O)$ et $H_i(a) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(a)$.

Démonstration. Pour tout $x \in O$, puisque le segment de droite joignant a à x est contenu dans O , on peut écrire

$$\begin{aligned} F(x) - F(a) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} F(a + t(x - a)) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(a + t(x - a))(x_i - a_i) dt \\ &= \sum_{i=1}^n H_i(x)(x_i - a_i), \end{aligned}$$

avec

$$H_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_i}(a + t(x - a)) dt.$$

Clairement $H_i(a) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(a)$, ce qui établit le résultat. \square

On définit une application

$$\Delta : T_p M \rightarrow \mathcal{D}_p; \quad \Delta([c]) = \delta_{[c]},$$

avec $\delta_{[c]}$ la dérivation ponctuelle en p définie par

$$\delta_{[c]}(f) = df_p([c]) = \frac{d}{dt} f(c(t))|_{t=0},$$

représentant la dérivée en p dans la direction du vecteur tangent $[c]$. $\delta_{[c]}$ est une dérivation ponctuelle en p et l'application Δ est clairement linéaire, puisque df_p est une application linéaire.

Théorème 2.1.11. *L'application $\Delta : T_p M \rightarrow \mathcal{D}_p$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Démonstration. Injectivité. Soit (U, φ) une carte locale en p . On a

$$\begin{aligned} \delta_{[c]}(f) &= \frac{d}{dt}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(c(t)))|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) \frac{d}{dt} \varphi_i(c(t))|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p (f) v_i, \quad v = (v_1, \dots, v_n) = \theta_p^\varphi([c]) \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (2.6)$$

i.e.

$$\delta_{[c]} = \sum_{i=1}^n v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p.$$

Si φ_i désigne la i ème composante de φ , on a

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p (\varphi_j) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_j \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}. \quad (2.7)$$

Supposons que $\delta_{[c]} = 0$, alors (2.6) et (2.7) donnent

$$\delta_{[c]}(\varphi_i) = v_i = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq n,$$

i.e. $v = \theta_p^\varphi([c]) = 0$ et donc $[c] = 0$, ce qui établit l'injectivité.

Surjectivité. Soit $\delta \in \mathcal{D}_p$. Soit (U, φ) une carte locale en p telle que $\varphi(U)$ soit un ouvert convexe de \mathbb{R}^n . Soit $f \in \mathcal{F}_p$. Posons $a = \varphi(p)$ et $F = f \circ \varphi^{-1}$. Par le Lemme de Hadamard, on a

$$\begin{aligned} F(x) &= F(a) + \sum_{i=1}^n H_i(x)(x_i - a_i) \\ \Leftrightarrow f(\varphi^{-1}(x)) &= f(p) + \sum_{i=1}^n H_i(x)(x_i - a_i), \quad \forall x \in \varphi(U) \\ \Leftrightarrow f &= f(p) + \sum_{i=1}^n h_i(\varphi_i - \varphi_i(p)) \text{ sur } U, \text{ avec } h_i = H_i \circ \varphi \in C^\infty(U). \end{aligned}$$

Comme $h_i(p) = H_i(\varphi(p)) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(\varphi(p)) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p (f)$, en appliquant δ à l'identité précédente, en utilisant les axiomes d'une dérivation ponctuelle en p et le fait que δ appliqué à une constante est zéro, on obtient

$$\begin{aligned} \delta(f) &= \delta(f(p)) + \sum_{i=1}^n h_i(p)(\delta(\varphi_i) - \delta(\varphi_i(p))) + \sum_{i=1}^n (\varphi_i(p) - \varphi_i(p))\delta(h_i) \\ \Leftrightarrow \delta(f) &= \sum_{i=1}^n \delta(\varphi_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p (f) \Leftrightarrow \delta = \sum_{i=1}^n \delta(\varphi_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p, \end{aligned}$$

ce qui, en vertu de (2.6), montre que $\delta = \delta_{[c]}$ avec $[c] = (\theta_p^\varphi)^{-1}(v)$, $v = (\delta(\varphi_1), \dots, \delta(\varphi_n))$, et établit la surjectivité. Ceci achève la démonstration. \square

2.2 Champs de vecteurs et dérivations

Un champ de vecteurs X sur une variété lisse M est la donnée en chaque point $p \in M$, d'un vecteur tangent $X_p \in T_pM$. On demande que la dépendance en p soit C^∞ . Pour définir précisément ceci, nous introduisons le fibré tangent.

Définition 2.2.1. Soit M une variété lisse. La réunion disjointe de tous les espaces tangents $T_pM, p \in M$,

$$TM = \coprod_{p \in M} T_pM, \quad (2.8)$$

s'appelle le fibré tangent à M (le symbole \coprod se lit "union disjointe"). On note

$$\pi : TM \rightarrow M,$$

la projection naturelle sur la base ; $\pi(\xi) = p$, si $\xi \in T_pM$.

Théorème 2.2.2. Le fibré tangent TM est naturellement muni d'une structure de variété C^∞ .

Démonstration. Soit (U, φ) une carte locale de M . Rappelons que pour $p \in U$, on note $\theta_p^\varphi : T_pM \rightarrow \mathbb{R}^n$, l'application linéaire qui donne les coordonnées d'un vecteur tangent en p dans la carte locale (voir (2.2)). On définit une carte de TM :

$$\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n, \quad \tilde{\varphi}(\xi) = (\varphi(\pi(\xi)), \theta_{\pi(\xi)}^\varphi(\xi)).$$

Soit (V, ψ) une autre carte locale en p et soit $(\pi^{-1}(V), \tilde{\psi})$ la carte locale correspondante de TM . Pour $\xi \in \pi^{-1}(U \cap V)$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\xi) &= (\psi(\pi(\xi)), \theta_{\pi(\xi)}^\psi(\xi)) \\ &= (\psi \circ \varphi^{-1}(\varphi(\pi(\xi))), \theta_{\pi(\xi)}^\psi \circ (\theta_{\pi(\xi)}^\varphi)^{-1} \circ \theta_{\pi(\xi)}^\varphi(\xi)) \\ &= (\psi \circ \varphi^{-1}(\varphi(\pi(\xi))), D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(\pi(\xi))} \circ \theta_{\pi(\xi)}^\varphi(\xi)), \end{aligned}$$

où, dans la dernière égalité, on a utilisé le fait que le passage des coordonnées locales d'un vecteur tangent dans la carte locale (U, φ) vers la carte locale (V, ψ) est donné par la différentielle du changement de cartes (voir (2.1)), i.e.

$$\theta_{\pi(\xi)}^\psi \circ (\theta_{\pi(\xi)}^\varphi)^{-1} = D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(\pi(\xi))}.$$

Donc le changement de cartes sur TM est donné par

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} &: \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n, \\ \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x, v) &= (\psi \circ \varphi^{-1}(x), D(\psi \circ \varphi^{-1})_x v). \end{aligned}$$

Puisque le changement de cartes $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ est de classe C^∞ , la différentielle $D(\psi \circ \varphi^{-1})_x$ est aussi de classe C^∞ , et donc le changement de cartes $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ sur TM est de classe C^∞ , ce que nous voulions établir. \square

Définition 2.2.3. *Un champ de vecteurs sur M est une application $X \in C^\infty(M, TM)$ telle que $\pi \circ X = id$. On appelle souvent une telle application "une section du fibré tangent". On note $X(p)$ (ou X_p) $\in T_pM$, la valeur du champ au point $p \in M$. On notera $\Gamma(TM)$ ou $Vect(M)$, l'ensemble des champs de vecteurs sur M .*

Soit $X \in Vect(M)$ un champ de vecteurs sur une variété M de dimension n , et soit (U, φ) une carte locale de M , avec (x_1, \dots, x_n) les coordonnées locales. Pour tout point $p \in U$, les vecteurs $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$, $1 \leq i \leq n$, forment une base de T_pM et l'on peut donc écrire

$$X_p = \sum_{i=1}^n v_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \quad \forall p \in U. \quad (2.9)$$

En notant $v(p) = (v_1(p), \dots, v_n(p))$, l'expression locale de X dans la carte est donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1}(x) &= (x, \theta_{\varphi^{-1}(x)}^\varphi(X_{\varphi^{-1}(x)})), \\ &= (x, v(\varphi^{-1}(x))), \end{aligned}$$

où $v(\varphi^{-1}(x))$ est une fonction de classe C^∞ sur $\varphi(U)$; de façon équivalente, ceci signifie que les fonctions v_i définies sur U en (2.9) sont des fonctions de classe C^∞ , i.e. $v_i \in C^\infty(U)$.

Nous noterons $C^\infty(M)$ l'ensemble des fonctions $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ . C'est une algèbre pour l'addition et la multiplication des fonctions. Nous allons montrer que les champs de vecteurs sur M peuvent être vus comme des opérateurs différentiels linéaires agissant sur $C^\infty(M)$.

Définition 2.2.4. *Une dérivation de l'algèbre $C^\infty(M)$ est une application $D : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ telle que $\forall f, g \in C^\infty(M)$ et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a*

- 1) $D(\alpha f + \beta g) = \alpha D(f) + \beta D(g)$,
- 2) $D(fg) = fD(g) + gD(f)$.

Nous noterons $\mathcal{D}er C^\infty(M)$ l'espace vectoriel réel de ces dérivations.

On a une application linéaire naturelle

$$L : Vect(M) \rightarrow \mathcal{D}er C^\infty(M), \quad X \rightarrow L_X, \quad (2.10)$$

avec L_X la dérivation de $C^\infty(M)$ définie comme suit

$$L_X(f)(p) = X_p(f), \quad \forall f \in C^\infty(M), \forall p \in M, \quad (2.11)$$

où X_p est pensé comme la dérivation ponctuelle en p correspondant au vecteur tangent X_p . Par abus de notation, on utilise la même notation pour le vecteur tangent en un point et la dérivation ponctuelle qui lui est associée. Donc $X_p(f) = df_p(X_p)$. La dérivation L_X s'appelle **la dérivée de Lie dans la direction du champ X** . Nous allons établir que L est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Nous commençons par quelques préliminaires.

Définition 2.2.5. Soit $h \in C^\infty(M)$ une fonction définie sur une variété lisse M . On appelle support de h l'ensemble

$$\text{supp}(h) = \overline{\{x \in M : h(x) \neq 0\}}. \quad (2.12)$$

Lemme 2.2.6. Soient $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ avec $0 < r_1 < r_2$. Il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que

- 1) $f(x) = 1$ si $\|x\| \leq r_1$,
- 2) $0 < f(x) < 1$ si $r_1 < \|x\| < r_2$,
- 3) $f(x) = 0$ si $\|x\| \geq r_2$.

Démonstration. Soit $a > 0$. La fonction $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_a(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t^2 - a^2}}, & \text{si } |t| < a, \\ 0, & \text{si } |t| \geq a, \end{cases}$$

est C^∞ et son support est l'intervalle $[-a, a]$. La fonction

$$g_a(t) = \frac{\int_{-\infty}^t f_a(u) du}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(u) du}$$

est nulle sur $] -\infty, -a]$, croît de 0 à 1 sur $[-a, a]$, et vaut 1 pour $t \geq a$. Pour $0 < a < b$, la fonction $g_a(b - t)$ vaut 1 sur $] -\infty, b - a]$, décroît de 1 à 0 sur $[b - a, b + a]$ et vaut 0 pour $t \geq b + a$. La fonction

$$f_{r_1, r_2}(x) = g_a(b - \|x\|^2), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

avec a, b définis par $b - a = r_1^2$ et $b + a = r_2^2$ est une fonction C^∞ sur \mathbb{R}^n qui a toutes les propriétés demandées. \square

Proposition 2.2.7. (Existence des fonctions plateau). Soit M une variété lisse, soit W un ouvert de M et $p \in W$. Alors, il existe un ouvert relativement compact V qui contient p et satisfait $\overline{V} \subset W$, et il existe une fonction $h : M \rightarrow [0, 1]$ de classe C^∞ telle que $h = 1$ sur V et $\text{supp}(h) \subset W$.

Démonstration. Soit (U, φ) une carte locale en p telle que $U \subset W$ et $\varphi(p) = 0$. On choisit r_1, r_2 tels que $0 < r_1 < r_2$ et $B[0, r_2] \subset \varphi(U)$ ($B[0, r_2]$, la boule fermée de centre 0 et de rayon r_2). Soit f une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R}^n , satisfaisant les propriétés du Lemme 2.2.6. On définit $h : M \rightarrow [0, 1]$ par

$$h(q) = \begin{cases} f(\varphi(q)), & \text{si } q \in U, \\ 0, & \text{si } q \notin U, \end{cases}$$

et on pose $V = \varphi^{-1}(B(0, r_1))$ ($B(0, r_1)$, la boule ouverte de centre 0 et de rayon r_1). Par définition, $h = 1$ sur V , $\overline{V} = \varphi^{-1}(B[0, r_1]) \subset U \subset W$ est compact, et $\text{supp}(h) = \varphi^{-1}(B[0, r_2]) \subset U \subset W$. La fonction h est de classe C^∞ sur U et si $q \notin U$, elle s'annule sur un voisinage ouvert de q , puisque $q \in \text{supp}(h)^c$. Puisque h est de classe C^∞ au voisinage de tout point, $h \in C^\infty(M)$. Comme elle possède toutes les propriétés voulues, la démonstration est complète. \square

Lemme 2.2.8. Soient $f \in C^\infty(M)$, $W \subset M$ un ouvert et $D \in \mathcal{D}er C^\infty(M)$. Alors, si $f|_W = 0$, on a aussi $D(f)|_W = 0$.

Démonstration. Soit $p \in W$ et $h : M \rightarrow [0, 1]$ une fonction plateau, avec les propriétés énoncées dans la Proposition 2.2.7. On a

$$f = (1 - h)f,$$

car sur W cela revient à $0 = 0$ et sur W^c à $f = f$, puisque $\text{supp}(h) \subset W$. En appliquant les axiomes d'une dérivation, on obtient

$$D(f) = (1 - h)D(f) + fD(1 - h),$$

d'où

$$D(f)(p) = (1 - h(p))D(f)(p) + f(p)D(1 - h)(p) = 0,$$

puisque $h(p) = 1$ et $f(p) = 0$. Comme on peut recommencer le raisonnement pour tout $p \in W$, le résultat est établi. \square

Théorème 2.2.9. L'application $L : \text{Vect}(M) \rightarrow \mathcal{D}er C^\infty(M)$, définie en (2.10), qui envoie X sur la dérivée de Lie L_X , est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration. L est injective. Soit $X \in \text{Vect}(M)$ tel que $L_X = 0$. Montrons que $X = 0$, i.e. $X_p = 0, \forall p \in M$. Soit $p \in M, f \in C^\infty(W), W$ voisinage ouvert de p , nous allons montrer que $X_p(f) = 0$. Soit h une fonction plateau en p telle que $\text{supp}(h) \subset W$. Définissons $fh \in C^\infty(M)$ par

$$(fh)(x) = \begin{cases} f(x)h(x), & \text{si } x \in W, \\ 0, & \text{si } x \in W^c. \end{cases}$$

Puisque $L_X(fh) = 0$, on a

$$L_X(fh)(p) = X_p(fh) = X_p(f) = 0,$$

la dernière égalité résultant du fait que fh et f définissent le même germe en p , puisque $f = fh$ sur un voisinage de p .

L est surjective. Inversément, soit $D \in \mathcal{D}er C^\infty(M)$, nous allons construire un champ de vecteurs $X \in \text{Vect}(M)$ tel que $D = L_X$. Définissons X_p une dérivation ponctuelle en p par

$$X_p(f) = D(fh)(p), \tag{2.13}$$

avec fh définie comme dans la première partie.

La définition ne dépend pas des choix particuliers que nous avons faits. En effet, si nous remplaçons f par f' un germe équivalent, et h par h' une autre

fonction plateau en p , les fonctions fh et $f'h'$ coïncident sur un voisinage ouvert de p ; donc, par le Lemme 2.2.8, $D(fh) = D(f'h')$ sur ce voisinage, et en particulier $D(fh)(p) = D(f'h')(p)$.

Montrons que X_p est bien une dérivation locale en p . En effet, si f et g sont des germes de fonctions en p , et h est une fonction plateau en p , on a

$$\begin{aligned} X_p(fg) &= D(fgh^2)(p) = (gh)(p)D(fh)(p) + (fh)(p)D(gh)(p) \\ &= g(p)X_p f + f(p)X_p g. \end{aligned}$$

Il faut aussi vérifier que $p \rightarrow X_p$ définit un champ de vecteurs lisse sur M . Soit (U, φ) une carte locale. Soit $p \in U$ et h une fonction plateau en p telle que $h|_V = 1$, $V \subset U$ et $\text{supp}(h) \subset U$. En vertu de (2.7), (2.9) et (2.13), on a

$$X_q = \sum_{i=1}^n X_q(\varphi_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_q = \sum_{i=1}^n D(\varphi_i h)(q) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_q, \quad \forall q \in V,$$

et, puisque $D(\varphi_i h) \in C^\infty(M)$, $X_q(\varphi_i) \in C^\infty(V)$; comme on peut recommencer le raisonnement au voisinage de chaque point $p \in U$, $X_q(\varphi_i) \in C^\infty(U)$, ce qui établit le caractère lisse.

Il reste à vérifier que $L_X = D$. Soit $f \in C^\infty(M)$ et soit $p \in M$. Par définition de la dérivée de Lie (2.11) et par la définition de X_p (2.13), on a

$$L_X(f)(p) = X_p(f) = D(fh)(p).$$

Or $D(fh)(p) = D(f)(p)$ puisque, en vertu du Lemme 2.28, comme h est une fonction plateau en p , $f = fh$ sur un voisinage de p et donc $D(f) = D(fh)$ sur ce voisinage. Donc $L_X(f) = D(f)$, $\forall f \in C^\infty(M)$, i.e. $D = L_X$. La démonstration est complète. \square

2.3 Courbes intégrales et flots

2.3.1 Le cas autonome

On utilisera parfois la terminologie "champ de vecteurs autonome" au lieu de "champ de vecteurs" lorsque l'on veut insister sur le fait que le champ de vecteurs ne dépend pas explicitement du temps.

Définition 2.3.1. *On appelle courbe intégrale d'un champ de vecteurs X sur une variété lisse M , toute courbe $c : I \rightarrow M$ de classe C^∞ définie sur un intervalle ouvert I , telle que*

$$c'(t) = X_{c(t)}, \quad \forall t \in I, \quad (2.14)$$

où $c'(t)$ est une notation abrégée pour $dc_t(1)$. On écrira aussi parfois $\frac{d}{dt}c(t)$ au lieu de $c'(t)$.

Dans une carte locale (U, φ) , $X_p = \sum_{i=1}^n v_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$, avec $v_i(p)$ des fonctions C^∞ sur U . Soit

$$\varphi(c(t)) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

l'expression en coordonnées locales de la courbe intégrale; on vérifie facilement que l'équation (2.14) se traduit par le système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{d}{dt} x_i(t) = (v_i \circ \varphi^{-1})(x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad 1 \leq i \leq n.$$

La théorie des équations différentielles ordinaires (existence et unicité de la solution du problème de Cauchy) garantit les résultats suivants :

(1) Pour tout $p \in M$, il existe un ouvert U contenant p et $\varepsilon > 0$, tels que pour tout $q \in U$, X admet une unique courbe intégrale $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$, telle que $c(0) = q$.

(2) Si $c_1 : I_1 \rightarrow M$ et $c_2 : I_2 \rightarrow M$ sont deux courbes intégrales telles que $c_1(t_*) = c_2(t_*)$ pour un $t_* \in I_1 \cap I_2$, alors $c_1(t) = c_2(t)$ pour tout $t \in I_1 \cap I_2$.

De (1) et (2) on déduit que pour tout $p \in M$, X possède une unique courbe intégrale maximale passant par p en $t = 0$, dont l'intervalle de définition sera noté I_p ("courbe intégrale maximale" signifie que toute autre courbe intégrale de X , passant par p en $t = 0$, est nécessairement définie sur un intervalle I contenu dans I_p). Nous noterons cette courbe $\phi^t(p)$, $t \in I_p$.

Nous accepterons les propriétés suivantes, qui découlent toutes de la théorie des équations différentielles ordinaires, sans démonstration.

Proposition 2.3.2. *i) L'ensemble $\Omega = \cup_{p \in M} I_p \times \{p\}$ est un ouvert de $\mathbb{R} \times M$ et l'application*

$$\phi : \Omega \rightarrow M, \quad \phi(t, p) = \phi^t(p), \quad (2.15)$$

est de classe C^∞ .

ii) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\Omega_t = \{p \in M : t \in I_p\}$ est un ouvert (éventuellement vide) de M . De plus, si $p \in \Omega_t$, alors $\phi^t(p) \in \Omega_s$ si et seulement si $p \in \Omega_{s+t}$ et, lorsqu'une de ces conditions est vérifiée, on a

$$\phi^s(\phi^t(p)) = \phi^{s+t}(p). \quad (2.16)$$

En particulier, pour $s = -t$, $\phi^{-t}(\phi^t(p)) = \phi^0(p) = p$, et ϕ^t est un difféomorphisme C^∞ de Ω_t sur Ω_{-t} , dont l'inverse est ϕ^{-t} .

L'application $\phi^t(\cdot) : \Omega_t \rightarrow \Omega_{-t}$ pour t fixé et x variable dans Ω_t , s'appelle **le flot du champ de vecteurs**. Le théorème suivant qui garantit, sous l'hypothèse de compacité de la variété, que le flot n'est pas seulement un difféomorphisme local, mais bien un difféomorphisme global est fondamental.

Théorème 2.3.3. *Si M est une variété lisse et compacte, alors pour tout $p \in M$, la courbe intégrale $\phi^t(p)$, qui passe par p en $t = 0$, est définie sur $I_p = \mathbb{R}$. Autrement dit, l'ouvert Ω sur lequel ϕ en (2.15) est défini est $\mathbb{R} \times M$.*

Démonstration. On procède par l'absurde. Supposons qu'il existe $p \in M$ tel que $I_p =]\alpha, \beta[$, avec $\beta < +\infty$. Soit $(t_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante dans I_p qui tend vers β . Puisque M est compacte, la suite $(\phi^{t_n}(p))_{n \geq 1}$ possède une valeur d'adhérence $q \in M$. Il existe un ouvert U contenant q et $\varepsilon > 0$, tels que pour tout $x \in U$, la courbe intégrale $\phi^t(x)$ est définie sur $] -\varepsilon, \varepsilon[$. Choisissons n suffisamment grand pour que $\beta - \varepsilon < t_n < \beta$ et $\phi^{t_n}(p) \in U$. Pour tout $s \in] -\varepsilon, \varepsilon[$, $\phi^{t_n}(p) \in \Omega_s$. Donc, en vertu de la Proposition 2.3.2 ii), on a

$$p \in \Omega_{t_n+s} \quad \text{et} \quad \phi^s(\phi^{t_n}(p)) = \phi^{s+t_n}(p), \quad \forall s \in] -\varepsilon, \varepsilon[$$

ce qui montre que la courbe intégrale $\phi^t(p)$ qui passe par p en $t = 0$ est définie sur un intervalle qui contient strictement $]\alpha, \beta[$, puisque $s + t_n \in]t_n - \varepsilon, t_n + \varepsilon[$ et $t_n + \varepsilon > \beta$. Ceci contredit la maximalité de $]\alpha, \beta[$. On procède de même pour établir que $\alpha > -\infty$ est également impossible. Ceci conclut la démonstration. \square

Terminologie. Une application $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ de classe C^∞ , telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $\phi^t = \phi(t, \cdot) : M \rightarrow M$ est un difféomorphisme, et telle que ϕ^0 est l'identité et $\phi^s \circ \phi^t = \phi^{s+t}$ s'appelle un **groupe à un paramètre de difféomorphismes** de M . Un groupe à un paramètre de difféomorphismes définit un champ de vecteurs sur M , via

$$X_p = \frac{d}{dt} \phi^t(p)|_{t=0}, \quad p \in M.$$

Inversement, le Théorème 2.3.3 montre que si M est compacte, tout champ de vecteurs sur M définit un groupe à un paramètre de difféomorphismes de M de sorte que, dans ce cas, les deux concepts coïncident.

Exemple 2.3.4. Soit la sphère S^2 munie de l'atlas formé des deux cartes $\varphi : U_1 = S^2 \setminus \{n\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\bar{\psi} : U_2 = S^2 \setminus \{s\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, où φ est la projection stéréographique à partir du pôle nord et $\bar{\psi}$ dénote le complexe conjugué de la projection stéréographique à partir du pôle sud. Le changement de cartes est donné par (voir (1.2))

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ z = x_1 + ix_2 &\rightarrow \frac{1}{z} = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} - i \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \equiv y_1 + iy_2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Soit le champ de vecteurs sur $S^2 \setminus \{n\}$ dont l'expression locale dans les coordonnées (x_1, x_2) de la carte U_1 est $\frac{\partial}{\partial x_1}$. On calcule son expression dans le

domaine d'intersection $U_1 \cap U_2$, en termes des coordonnées (y_1, y_2) , comme suit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \\ &= \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \frac{\partial}{\partial y_2} \\ &= (y_2^2 - y_1^2) \frac{\partial}{\partial y_1} - 2y_1y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}. \end{aligned}$$

Comme l'expression obtenue fait sens dans tout le domaine de la carte locale (y_1, y_2) , on peut donc définir un champ de vecteurs sur S^2 par

$$X|_{U_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X|_{U_2} = (y_2^2 - y_1^2) \frac{\partial}{\partial y_1} - 2y_1y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}. \quad (2.18)$$

Il y a un léger abus de notations (toujours commis en pratique) dans l'écriture ci-dessus ; strictement, il faudrait écrire

$$\begin{aligned} X_p &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \quad \forall p \in U_1, \\ X_p &= (\bar{\psi}_2(p)^2 - \bar{\psi}_1(p)^2) \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right)_p - 2\bar{\psi}_1(p)\bar{\psi}_2(p) \left(\frac{\partial}{\partial y_2} \right)_p, \quad \forall p \in U_2, \end{aligned}$$

où $\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2$ désignent les deux composantes de $\bar{\psi} : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \bar{\psi} = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2)$. Notons $\phi^t(\cdot)$ le flot de X . Dans les coordonnées (x_1, x_2) , le champ vaut $(1, 0)$ en tout point et le flot est donné par

$$\phi^t(x_1, x_2) = (x_1 + t, x_2), \quad (2.19)$$

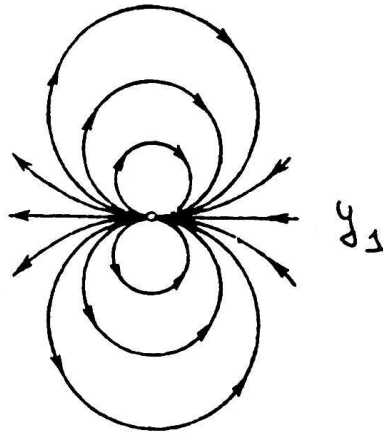
i.e. les courbes intégrales du champ sont des lignes droites horizontales, parcourues à vitesse constante. Pour trouver la forme des courbes intégrales dans les coordonnées (y_1, y_2) , il suffit de calculer l'image de ces lignes droites par le changement de cartes (2.17). On calcule facilement que la droite (2.19) est envoyée sur un cercle de centre $(0, -\frac{1}{2x_2})$ et de rayon $\frac{1}{2|x_2|}$. En effet,

$$\bar{\psi} \circ \varphi^{-1}(x_1 + t, x_2) = \left(y_1(t) = \frac{x_1 + t}{(x_1 + t)^2 + x_2^2}, y_2(t) = -\frac{x_2}{(x_1 + t)^2 + x_2^2} \right),$$

et donc

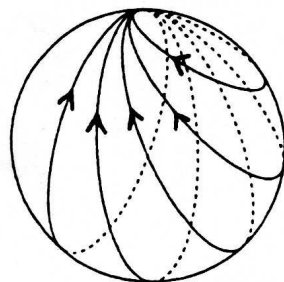
$$\begin{aligned} y_1^2(t) + \left(y_2(t) + \frac{1}{2x_2} \right)^2 &= \frac{(x_1 + t)^2}{((x_1 + t)^2 + x_2^2)^2} + \left(-\frac{x_2}{(x_1 + t)^2 + x_2^2} + \frac{1}{2x_2} \right)^2 \\ &= \frac{(x_1 + t)^2 + x_2^2}{((x_1 + t)^2 + x_2^2)^2} + \frac{1}{4x_2^2} - \frac{1}{(x_1 + t)^2 + x_2^2} \\ &= \frac{1}{4x_2^2}. \end{aligned}$$

Les courbes intégrales du champ de vecteurs X ont donc l'allure suivante dans la carte locale $(U_2, \bar{\psi})$:



Le champ de vecteurs X s'annule au pôle nord n et seulement en ce point, on dit que n est un point singulier de X . Si l'on trace un cercle autour de l'origine $(y_1, y_2) = (0, 0)$ (dont l'intérieur ne contient pas d'autres points singuliers) sur la figure ci-dessus, on voit que le nombre de tours orientés que le champ de vecteurs X fait en parcourant ce cercle dans le sens positif est 2. Cet entier s'appelle l'indice du champ de vecteurs au point singulier n , on écrit $ind_n(X) = 2$. L'étude des points singuliers isolés des champs de vecteurs sur une variété compacte M sera discutée au Chapitre 4. En particulier on montrera que la somme des indices des points singuliers ne dépend pas du champ de vecteurs, l'entier obtenu s'appelle la caractéristique d'Euler-Poincaré de M et est noté $\chi(M)$ (Théorème de Poincaré-Hopf). En acceptant ce théorème, notre exemple établit que $\chi(S^2) = 2$.

Le flot de X visualisé sur la sphère est représenté sur la figure ci-dessous :



2.3.2 Champs de vecteurs non autonomes

Définition 2.3.5. *Un champ de vecteurs non autonome sur une variété lisse M est une application $X \in C^\infty(\mathbb{R} \times M, TM)$ telle que $X(t, p) \in T_p M$, pour tout $(t, p) \in \mathbb{R} \times M$.*

Une courbe intégrale d'un tel champ de vecteurs non autonome X est une courbe $c : I \rightarrow M$, de classe C^∞ , définie sur un intervalle ouvert I telle que

$$c'(t) = X(t, c(t)), \quad \forall t \in I. \quad (2.20)$$

Contrairement au cas autonome, une telle courbe intégrale peut se recouper, vu la dépendance explicite du champ de vecteurs par rapport au temps. Dans une carte locale (U, φ) , on a $X(t, p) = \sum_{i=1}^n v_i(t, p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$, avec $v_i(t, p)$ des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R} \times U$. Soit

$$\varphi(c(t)) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

l'expression en coordonnées locales de la courbe intégrale; on vérifie facilement que l'équation (2.20) se traduit par le système d'équations différentielles ordinaires non autonome

$$\frac{d}{dt} x_i(t) = v_i(t, \varphi^{-1}(x_1(t), \dots, x_n(t))), \quad 1 \leq i \leq n.$$

A nouveau, la théorie des équations différentielles ordinaires (non autonomes) garantit que quelque soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et quelque soit $p \in M$, il existe une unique courbe intégrale maximale qui passe par p au temps $t = t_0$. On note cette courbe intégrale $c(t; t_0, p)$. Contrairement au cas autonome

$$c(t; t_0, p) \neq c(t - t_0; 0, p).$$

En effet $\gamma(t) = c(t - t_0; 0, p)$ satisfait $\gamma(t_0) = p$, mais ne vérifie pas l'équation (2.20), puisque

$$\gamma'(t) = c'(t - t_0; 0, p) = X(t - t_0, \gamma(t)) \neq X(t, \gamma(t)),$$

lorsque le champ dépend explicitement du temps.

A un champ de vecteurs X non autonome sur M , on s'empresse d'associer un champ de vecteurs autonome \tilde{X} sur la variété $\mathbb{R} \times M$ défini par

$$\tilde{X}_{(t,p)} = (1, X(t, p)) \in T_{(1,p)}(\mathbb{R} \times M) = \mathbb{R} \times T_p M.$$

On vérifie facilement que le flot $\tilde{\phi}$ du champ \tilde{X} est donné par

$$\tilde{\phi}^t(t_0, p) = (t + t_0, c(t + t_0; t_0, p)).$$

On peut alors établir semblablement au Théorème 2.3.3 le résultat suivant, dont la démonstration est laissée en exercice au lecteur.

Théorème 2.3.6. *Si M est compacte et si X est un champ de vecteurs non autonome sur M , alors quelque soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et quelque soit $p \in M$, la courbe intégrale maximale $c(t; t_0, p)$ qui passe par p en $t = t_0$ est définie sur \mathbb{R} .*

Nous terminons en donnant une application de ce dernier résultat, qui illustre l'intérêt d'adopter un point de vue géométrique dans l'étude des équations différentielles ordinaires. Nous commençons par établir un lemme.

Lemme 2.3.7. *Soit A une matrice $n \times n$ à entrées réelles. Le champ de vecteurs linéaire $X_x = Ax$ sur \mathbb{R}^n s'étend à l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, en étant tangent à l'hyperplan à l'infini $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Rappelons que l'on identifie un point $x \in \mathbb{R}^n$, de coordonnées (x_1, \dots, x_n) , avec la droite vectorielle de \mathbb{R}^{n+1} qui passe par $(x_1, \dots, x_n, 1)$, notée $[(x_1, \dots, x_n, 1)]$. L'hyperplan à l'infini dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est formé par les droites vectorielles de \mathbb{R}^{n+1} contenues dans l'hyperplan $x_{n+1} = 0$. Considérons par exemple un point $[(x_1, \dots, x_n, 1)] \in U_1 \cap U_{n+1}$, c.à.d. tel que $x_1 \neq 0$. Dans la carte locale de domaine U_1 , les coordonnées de ce point sont (voir Section 1.2.3)

$$(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{1}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1} \right).$$

Puisque dans la carte U_{n+1} , le champ est donné par

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad 1 \leq i \leq n,$$

on en déduit son expression dans les coordonnées y_i (à priori seulement tant que $y_1 \neq 0$)

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -y_1 \left(a_{11} + \sum_{j=2}^n a_{1j} y_j \right), \\ \dot{y}_i &= a_{i1} + \sum_{j=2}^n a_{ij} y_j - y_i \left(a_{11} + \sum_{j=2}^n a_{1j} y_j \right), \quad 2 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

On remarque que cette expression fait encore sens quand $y_1 = 0$ et que $\dot{y}_1 = 0$ le long de cet hyperplan. En faisant un calcul similaire dans les cartes locales restantes, on voit donc que le champ s'étend à l'hyperplan à l'infini, et qu'il lui est tangent. Ceci termine la démonstration du lemme. \square

Théorème 2.3.8. *Soit $\dot{x} = A(t)x$, $x \in \mathbb{R}^n$, une équation différentielle linéaire non autonome, où l'application $\mathbb{R} \rightarrow gl(n, \mathbb{R}) : t \rightarrow A(t)$ est C^∞ ($gl(n, \mathbb{R})$ dénote l'espace des matrices $n \times n$ à entrées réelles). Alors, la solution $x(t; t_0, x_0)$ qui en $t = t_0$ vaut x_0 , est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Puisque $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est compact, la courbe intégrale $c(t; t_0, x_0)$ du champ de vecteurs étendu à $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \amalg \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ (\amalg =union disjointe) existe pour tout $t \in \mathbb{R}$, et coïncide avec $x(t; t_0, x_0)$ tant qu'elle n'atteint pas l'hyperplan à l'infini $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$. Or cette courbe ne peut pas atteindre cet hyperplan car, en vertu du Lemme 2.3.7, une courbe intégrale passant par un point de cet hyperplan, est nécessairement entièrement contenue dans celui-ci. Ceci démontre le théorème. \square

2.4 Champs gradients et topologie des variétés

Définition 2.4.1. Soit $f : M \rightarrow N$ une application C^∞ entre variétés lisses.

- 1) $p \in M$ est un point critique ssi f n'est pas une submersion en p . Un point non critique est dit régulier.
- 2) $q \in N$ est une valeur critique ssi q est l'image d'un point critique. Une valeur non critique est dite régulière, c'est en particulier le cas si $f^{-1}(q) = \emptyset$.

Nous accepterons sans démonstration le théorème suivant.

Théorème 2.4.2. (appelé Lemme de Sard-Brown). Soit $f : M \rightarrow N$ une application de classe C^∞ entre variétés lisses. Alors, l'ensemble Δ des valeurs critiques de f est de mesure nulle. On entend par là, que la mesure de Lebesgue de $\varphi(U \cap \Delta)$ est nulle pour toute carte locale (U, φ) . En conséquence, le complémentaire de Δ est dense dans N .

Remarquons que si $\dim M < \dim N$, tout point de M est un point critique. Dans ce cas, le Lemme de Sard-Brown affirme que l'image $f(M)$ est de mesure nulle dans N . Donc, on n'a pas de phénomène du type "courbe de Peano" (courbe continue qui remplit tout un carré), avec une hypothèse de différentiabilité. En fait, il suffit d'avoir une application de classe C^1 . Mais, lorsque $\dim M = m \geq \dim N = n$, la version optimale du Lemme de Sard-Brown n'est valide qu'avec l'hypothèse que les variétés et les applications soient de classe C^{m-n+1} , ce qui laisse entrevoir la difficulté du résultat.

L'étude des points critiques des fonctions sur une variété lisse est l'objet de la théorie de Morse. Nous étudions ici le résultat le plus simple de cette théorie. Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.4.3. Soient M une variété lisse, $W \subset M$ un ouvert et $K \subset W$ un compact. Alors, il existe une fonction $h : M \rightarrow [0, 1]$ de classe C^∞ telle que $h|_K = 1$ et $\text{supp}(h) \subset W$.

Démonstration. En vertu de l'existence des fonctions plateau (Proposition 2.2.7), pour tout $p \in K$, il existe un ouvert V_p qui contient p , tel que $\overline{V_p} \subset W$,

et il existe une fonction $h_p : M \rightarrow [0, 1]$ de classe C^∞ , telle que $h_{p|_{V_p}} = 1$ et $\text{supp}(h_p) \subset W$. Puisque K est compact, on peut extraire du recouvrement $K \subset \cup_{p \in K} V_p$ un sous-recouvrement fini, i.e. il existe $p_1, \dots, p_k \in K$ tels que $K \subset \cup_{i=1}^k V_{p_i}$. La fonction

$$h = 1 - \prod_{i=1}^k (1 - h_{p_i}),$$

est de classe C^∞ sur M , prend ses valeurs dans $[0, 1]$ et vaut 1 sur K , puisque le produit $\prod_{i=1}^k (1 - h_{p_i}) = 0$ sur K . De plus, $\{x \in M : h(x) \neq 0\} \subset \cup_{i=1}^k \text{supp}(h_{p_i})$, puisque h s'annule sur $\left(\cup_{i=1}^k \text{supp}(h_{p_i})\right)^c$. Donc

$$\text{supp}(h) = \overline{\{x \in M : h(x) \neq 0\}} \subset \cup_{i=1}^k \text{supp}(h_{p_i}) \subset W,$$

et la démonstration est complète. \square

Théorème 2.4.4. *Soit M une variété lisse et compacte et soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ . Si $f^{-1}([a, b])$ ($a, b \in \mathbb{R}, a < b$) ne contient pas de points critiques, alors $\forall c \in [a, b]$, la variété $f^{-1}(c)$ est difféomorphe à $f^{-1}(a)$.*

Démonstration. On va supposer que la variété est plongée dans un espace euclidien \mathbb{R}^m , ce qui n'est pas une restriction en vertu d'un théorème de Whitney, qui affirme l'existence d'un tel plongement. L'idée est de considérer le champ de vecteurs gradient de f sur M et de réaliser le difféomorphisme à l'aide du flot de ce champ de vecteurs. Néanmoins, ce flot n'applique pas en général une variété de niveau sur une autre (car le gradient peut différer en norme le long d'une variété de niveau). Il faudra donc normaliser le champ gradient de sorte que ce soit le cas, ce qui sera possible en dehors du lieu critique de f . Commençons par donner la définition précise du champ gradient.

Le produit scalaire habituel sur \mathbb{R}^m induit un produit scalaire sur chaque espace tangent

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R},$$

par simple restriction. Le champ gradient ∇f est l'unique champ de vecteurs sur M qui vérifie

$$df_p(X_p) = \langle (\nabla f)_p, X_p \rangle, \quad \forall X_p \in T_p M, p \in M.$$

Soit $W = \{p \in M : df_p \neq 0\}$, le complémentaire de l'ensemble des points critiques de f ; W est ouvert. Par hypothèse $f^{-1}([a, b]) \subset W$. Comme M est compacte et que $f^{-1}([a, b])$ est fermé, $f^{-1}([a, b])$ est compact. Par le Lemme 2.4.3, il existe $h : M \rightarrow [0, 1]$ de classe C^∞ , telle que $h|_{f^{-1}([a, b])} = 1$ et $\text{supp}(h) \subset W$. Définissons $X \in \text{Vect}(M)$ comme suit

$$X_p = \begin{cases} \frac{h(p)}{\langle (\nabla f)_p, (\nabla f)_p \rangle} (\nabla f)_p, & \text{si } p \in W, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque le support de h est contenu dans W , X est une section de classe C^∞ du fibré tangent. Le flot ϕ de X est défini sur $\mathbb{R} \times M$, puisque M est compacte (Théorème 2.3.3). On calcule

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(\phi^t(p)) &= \frac{d}{ds}f(\phi^{t+s}(p))|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds}f(\phi^s(\phi^t(p)))|_{s=0} \\ &= df_{\phi^t(p)}(X_{\phi^t(p)}) \\ &= \langle (\nabla f)_{\phi^t(p)}, X_{\phi^t(p)} \rangle = h(\phi^t(p)) \geq 0, \end{aligned}$$

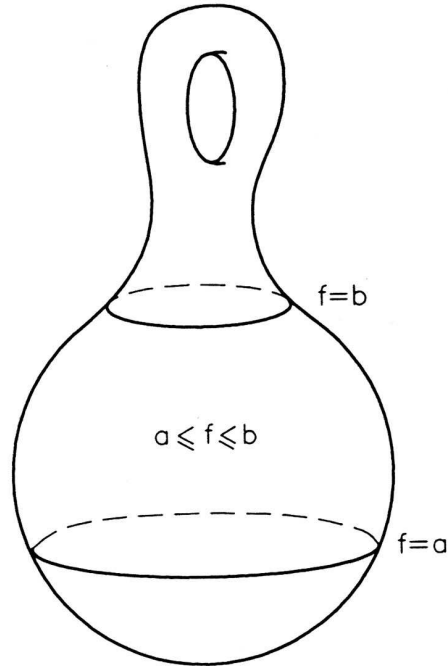
où, dans la dernière égalité, nous avons utilisé la définition de X . En particulier, puisque $h|_{f^{-1}([a,b])} = 1$, si $p \in f^{-1}(a)$, $\frac{d}{dt}f(\phi^t(p))|_{t=0} = h(p) = 1$, et donc $\phi^t(p) \in f^{-1}([a,b])$, pour $t > 0$, suffisamment petit. En fait, tant que $\phi^t(p) \in f^{-1}([a,b])$, $\frac{d}{dt}f(\phi^t(p)) = h(\phi^t(p)) = 1$. Donc

$$f(\phi^t(p)) = t + a, \quad \forall p \in f^{-1}(a), \quad \forall t \in [0, b - a].$$

Puisque, pour t fixé, ϕ^t est un difféomorphisme de M , la restriction

$$\phi^t : f^{-1}(a) \rightarrow f^{-1}(t + a), \quad t \in [0, b - a],$$

est aussi un difféomorphisme, i.e. ϕ^{c-a} est un difféomorphisme de $f^{-1}(a)$ sur $f^{-1}(c)$, $\forall c \in [a, b]$. Ceci termine la démonstration. \square



2.5 Le crochet de Lie

Proposition 2.5.1. *Soient $D_1, D_2 \in \mathcal{D}er C^\infty(M)$, avec M une variété lisse. Alors,*

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1,$$

est encore une dérivation de l'algèbre $C^\infty(M)$.

Démonstration. Soient $f, g \in C^\infty(M)$. On vérifie immédiatement que

$$[D_1, D_2](\alpha f + \beta g) = \alpha[D_1, D_2](f) + \beta[D_1, D_2](g), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

On a aussi

$$\begin{aligned} D_1 \circ D_2(fg) &= D_1(fD_2(g) + gD_2(f)) \\ &= fD_1(D_2(g)) + D_1(f)D_2(g) + D_1(g)D_2(f) + gD_1(D_2(f)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D_2 \circ D_1(fg) &= D_2(fD_1(g) + gD_1(f)) \\ &= fD_2(D_1(g)) + D_2(f)D_1(g) + D_2(g)D_1(f) + gD_2(D_1(f)), \end{aligned}$$

et donc, en soustrayant, on trouve

$$[D_1, D_2](fg) = f[D_1, D_2](g) + g[D_1, D_2](f),$$

ce qui établit le résultat. □

Puisque la dérivée de Lie $L : \text{Vect}(M) \rightarrow \mathcal{D}er C^\infty(M)$ est un isomorphisme, nous pouvons introduire la définition suivante.

Définition 2.5.2. *Soit M une variété lisse et soient $X, Y \in \text{Vect}(M)$. Le crochet de Lie de X et Y , noté $[X, Y]$, est l'unique champ de vecteurs sur M tel que*

$$[L_X, L_Y] = L_{[X, Y]}, \tag{2.21}$$

avec L_X et L_Y , la dérivée de Lie dans la direction des champs X et Y .

Notons ϕ et ψ les flots de X et Y respectivement. Soit $p \in M$ et $f \in C^\infty(M)$. Par définition de la dérivée de Lie, on a

$$L_X(L_Y(f))(p) = X_p(L_Y(f)) = \frac{\partial}{\partial t} L_Y(f)(\phi^t(p))|_{t=0}.$$

De même

$$L_Y(f)(\phi^t(p)) = Y_{\phi^t(p)}(f) = \frac{\partial}{\partial s} f(\psi^s \circ \phi^t(p))|_{s=0},$$

d'où l'on déduit que

$$[X, Y]_p(f) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \left(f(\psi^s \circ \phi^t(p)) - f(\phi^t \circ \psi^s(p)) \right) \Big|_{t=s=0}.$$

Puisque la fonction $f(\psi^s \circ \phi^t(p)) - f(\phi^t \circ \psi^s(p))$ s'annule identiquement pour $t = 0$ ou $s = 0$, nous en déduisons que le développement de Taylor de cette fonction en $(0, 0)$ est donné par

$$f(\psi^s \circ \phi^t(p)) - f(\phi^t \circ \psi^s(p)) = ts[X, Y]_p(f) + o(t^2 + s^2).$$

Ceci montre que

$$\psi^s \circ \phi^t(p) = \phi^t \circ \psi^s(p), \forall t, s \text{ suffisamment petits} \Rightarrow [X, Y]_p = 0.$$

Donc la commutation des flots des champs de vecteurs X et Y (au voisinage de chaque point) force l'annulation du crochet de Lie. Le but de cette section est de montrer que réciproquement, l'annulation du crochet de Lie force la commutation des flots (au voisinage de chaque point), ce qui n'est à priori pas évident ! Nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition 2.5.3. Soient M et N deux variétés lisses et soit $f \in C^\infty(M, N)$. Soient $X \in Vect(M)$ et $Y \in Vect(N)$. Nous dirons que les champs de vecteurs X et Y sont f -liés si

$$Y_{f(p)} = df_p(X_p), \quad \forall p \in M. \quad (2.22)$$

Pour simplifier les notations, nous écrirons souvent $f_*(X_p)$ au lieu de $df_p(X_p)$.

Lemme 2.5.4. Soient X, Y des champs f -liés. Soit ϕ le flot de X et ψ celui de Y . Alors, pour tout $p \in M$, la courbe intégrale de Y qui passe par $f(p)$ en $t = 0$ est définie sur un intervalle qui contient l'intervalle de définition maximal I_p de la courbe intégrale de X qui passe par p en $t = 0$, et l'on a

$$\psi^t(f(p)) = f(\phi^t(p)), \quad \forall t \in I_p. \quad (2.23)$$

Démonstration. Posons $c(t) = f(\phi^t(p)), t \in I_p$. Clairement $c(0) = f(p)$. En utilisant la notation introduite dans la Définition 2.3.1 et la règle de dérivation des fonctions composées, on a

$$\frac{d}{dt}c(t) = dc_t(1) = df_{\phi^t(p)}\left(\frac{d}{dt}\phi^t(p)\right) = df_{\phi^t(p)}(X_{\phi^t(p)}) = Y_{f(\phi^t(p))} = Y_{c(t)},$$

où, dans l'avant-dernière égalité, nous avons utilisé que les champs X et Y sont f -liés. Ceci montre que $c(t)$ est une courbe intégrale du champ Y qui passe par $f(p)$ en $t = 0$. Par unicité de la solution du problème de Cauchy, on a donc que $c(t) = \psi^t(f(p)), \forall t \in I_p$, ce qu'il fallait établir. \square

Lemme 2.5.5. Soient $X, Y \in Vect(M)$ et $p \in M$. Soit ϕ le flot de X et ψ celui de Y . Il existe un ouvert U de M contenant p et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout $x \in U$, les fonctions $(t, s) \rightarrow \psi^s \circ \phi^t(x)$ et $(t, s) \rightarrow \phi^t \circ \psi^s(x)$ soient définies sur $] - \varepsilon, \varepsilon[\times] - \varepsilon, \varepsilon[$.

Démonstration. Notons Ω_X (respectivement Ω_Y), l'ouvert de $\mathbb{R} \times M$ sur lequel le flot ϕ (resp. ψ) de X (resp. de Y) est défini. Définissons l'application

$$\tilde{\phi} : \mathbb{R} \times \Omega_X \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M, \quad \tilde{\phi}(s, t, x) = (t, s, \phi^t(x)).$$

Cette application est continue et envoie $(0, 0, p), p \in M$, sur lui-même. Donc $\tilde{\phi}^{-1}(\mathbb{R} \times \Omega_Y)$ est un ouvert qui contient $(0, 0, p)$. Par définition de la topologie produit, il existe un ouvert U contenant p et $\varepsilon > 0$ tel que

$$] - \varepsilon, \varepsilon[\times] - \varepsilon, \varepsilon[\times U \subset \tilde{\phi}^{-1}(\mathbb{R} \times \Omega_Y),$$

c.à.d., pour tout $x \in U$ l'application $\psi^s \circ \phi^t(x)$ est définie pour $(t, s) \in] - \varepsilon, \varepsilon[\times] - \varepsilon, \varepsilon[$. Par symétrie, quitte à restreindre U et à diminuer ε , on peut supposer que pour tout $x \in U$ l'application $\phi^t \circ \psi^s(x)$ est aussi définie pour $(t, s) \in] - \varepsilon, \varepsilon[\times] - \varepsilon, \varepsilon[$. \square

Proposition 2.5.6. *Soient X et Y des champs de vecteurs sur une variété lisse M . Alors, si ϕ dénote le flot de X , pour tout $p \in M$, on a*

$$\left(\frac{d}{dt} \phi_*^{-t} Y_{\phi^t(p)} \right)_{|t=0} = [X, Y]_p. \quad (2.24)$$

Démonstration. Soit $p \in M$. Il existe un ouvert U qui contient p et $\varepsilon > 0$, tels que pour tout $x \in U$, $\phi^t(x)$ existe pour $t \in] - \varepsilon, \varepsilon[$. Soit $f \in C^\infty(M)$. En pensant à un vecteur tangent en p comme à une dérivation locale, et en se rappelant la définition de la différentielle, on a

$$\phi_*^{-t} Y_{\phi^t(p)}(f) = Y_{\phi^t(p)}(f \circ \phi^{-t}), \quad (2.25)$$

où la fonction $f \circ \phi^{-t}$ est localement bien définie au voisinage de $\phi^t(p)$, sur l'ouvert $\phi^t(U)$. Pour $x \in \phi^t(U)$, on a

$$\begin{aligned} f \circ \phi^{-t}(x) - f(x) &= \int_0^t \frac{d}{ds} f(\phi^{-s}(x)) ds \\ &= - \int_0^t X_{\phi^{-s}(x)}(f) ds \\ &= -t \int_0^1 X_{\phi^{-tu}(x)}(f) du. \end{aligned}$$

Donc, sur $\phi^t(U)$, on peut écrire

$$f \circ \phi^{-t} = f - t g^t,$$

avec $g^t(x) = \int_0^1 X_{\phi^{-tu}(x)}(f) du$, ce qui donne

$$Y_{\phi^t(p)}(f \circ \phi^{-t}) = Y_{\phi^t(p)}(f) - t Y_{\phi^t(p)}(g^t) = L_Y(f)(\phi^t(p)) - t Y_{\phi^t(p)}(g^t). \quad (2.26)$$

Notons que

$$g^0(x) = \int_0^1 X_x(f) du = X_x(f) \Leftrightarrow g^0 = L_X(f) \text{ (restreinte à } \phi^t(U)). \quad (2.27)$$

De (2.25), (2.26) et (2.27), on déduit que

$$\left(\frac{d}{dt} \phi_*^{-t} Y_{\phi^t(p)} \right)_{|_{t=0}} (f) = X_p(L_Y(f)) - Y_p(L_X(f)) = [X, Y]_p(f), \quad (2.28)$$

où la dernière égalité provient de la définition du crochet de Lie (2.21). En vertu de l'existence des fonctions plateau, pour vérifier que deux dérivations locales sont égales, il suffit de vérifier qu'elles donnent la même valeur quand on les applique à une fonction arbitraire $f \in C^\infty(M)$. Donc l'équation (2.28) établit la formule (2.24). \square

Proposition 2.5.7. *Soient X et Y des champs de vecteurs sur une variété lisse M . Alors, si ϕ désigne le flot de X , pour tout $p \in M$, on a*

$$\frac{d}{dt} \phi_*^{-t} Y_{\phi^t(p)} = \phi_*^{-t} [X, Y]_{\phi^t(p)}, \quad \forall t \in I_p, \quad (2.29)$$

où I_p est l'intervalle de définition maximal de la courbe intégrale $\phi^t(p)$.

Démonstration. Soit $p \in M$ et $t \in I_p$. On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \phi_*^{-t} Y_{\phi^t(p)} &= \left(\frac{d}{ds} \phi_*^{-t-s} Y_{\phi^{t+s}(p)} \right)_{|_{s=0}} \\ &= \left(\frac{d}{ds} \phi_*^{-t} \circ \phi_*^{-s} Y_{\phi^s(\phi^t(p))} \right)_{|_{s=0}} \\ &= \phi_*^{-t} \left(\frac{d}{ds} \phi_*^{-s} Y_{\phi^s(\phi^t(p))} \right)_{|_{s=0}} \\ &= \phi_*^{-t} [X, Y]_{\phi^t(p)}, \quad \text{en vertu de (2.24),} \end{aligned}$$

ce qui établit (2.29). Dans l'avant dernière égalité, les opérations d/ds et ϕ_*^{-t} commutent en vertu de la linéarité de l'application $\phi_*^{-t} : T_{\phi^t(p)}M \rightarrow T_pM$. \square

Théorème 2.5.8. *Soient $X, Y \in \text{Vect}(M)$. Notons ϕ le flot de X et ψ celui de Y . Si $[X, Y] = 0$, alors pour tout $p \in M$, il existe un ouvert U de M contenant p et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout $x \in U$*

$$\psi^s \circ \phi^t(x) = \phi^t \circ \psi^s(x), \quad (2.30)$$

quels que soient $t, s \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ et réciproquement.

Démonstration. Supposons que $[X, Y] = 0$. Soit $p \in M$. Choisissons U voisinage ouvert de p et $\varepsilon > 0$ comme dans le Lemme 2.5.5. En vertu de (2.29), pour tout $x \in U$, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \phi_*^{-t} Y_{\phi^t(x)} &= \phi_*^{-t} [X, Y]_{\phi^t(x)} = 0, \quad \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\\ &\Leftrightarrow \phi_*^{-t} Y_{\phi^t(x)} = Y_x, \quad \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[. \end{aligned}$$

Cette dernière relation peut encore s'écrire

$$Y_{\phi^t(x)} = \phi_*^t Y_x, \quad \forall x \in U, \quad \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[,$$

et signifie donc que le champ de vecteurs Y est ϕ^t -lié à lui-même sur U (quelque soit $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$). De là, en vertu du Lemme 2.5.4 (formule (2.23)), on déduit que

$$\psi^s(\phi^t(x)) = \phi^t(\psi^s(x)), \quad \forall t, s \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \quad \forall x \in U.$$

Inversément, si (2.30) est vérifiée, en prenant la dérivée par rapport à s et en évaluant en $s = 0$, on trouve

$$\frac{d}{ds} \psi^s \circ \phi^t(x)|_{s=0} = \frac{d}{ds} \phi^t \circ \psi^s(x)|_{s=0} \Leftrightarrow Y_{\phi^t(x)} = \phi_*^t Y_x, \quad \forall x \in U, \quad \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[,$$

ce qui, en vertu de (2.24), implique que

$$[X, Y]_x = \left(\frac{d}{dt} \phi_*^{-t} Y_{\phi^t(x)} \right)_{t=0} = \left(\frac{d}{dt} Y_x \right)_{t=0} = 0, \quad \forall x \in U.$$

Comme on peut recommencer le raisonnement au voisinage de chaque point de M , on obtient donc que $[X, Y] = 0$. Ceci termine la démonstration. \square

2.6 Exercices

2.6.1 Immersions, plongements, submersions

1. Considérons l'application $f : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ définie par

$$f([(x_1, \dots, x_{n+1})]) = [(x_1^2, \dots, x_{n+1}^2)].$$

- Montrer que f est une application de classe C^∞ .
- Calculer $df_{[(1, \dots, 1)]}$.
- En quels points la différentielle $df_{[x]}$ est-elle injective ?

2. On considère la variété grassmannienne $Gr(k, n)$ formée des sous-espaces vectoriels de dimension k de \mathbb{R}^n , avec $0 < k < n$. Soit l'application

$$f : Gr(k, n) \rightarrow Gr(n - k, n),$$

définie par $f(V) = V^\perp$, où V^\perp dénote l'orthogonal de V .

(a) Montrer que, en coordonnées locales, f est donnée par l'opposé de l'application transposée

$$\mathbb{R}^{k(n-k)} \rightarrow \mathbb{R}^{(n-k)k} : A \rightarrow -A^T.$$

(b) En déduire l'expression de la différentielle de f en coordonnées locales.

3. Soit l'application $f :]-\infty, 1[\rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(t) = \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \frac{t(t^2 - 1)}{t^2 + 1} \right).$$

(a) Montrer que f est une immersion injective.

(b) L'application f est-elle un plongement ?

(c) L'image $f(]-\infty, 1[)$ est-elle une sous-variété de \mathbb{R}^2 ? Dessiner cette image.

4. Soit l'application $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, définie par $f([(x_1, x_2)]) = [(x_1^2, x_1x_2, x_2^2)]$.

(a) Calculer les expressions de f en coordonnées locales et montrer que f est une immersion.

(b) Cette immersion est-elle un plongement ?

(c) Donner une représentation imagée de $f(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$.

(d) Plus généralement, l'application $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ définie par $f([(x_1, x_2)]) = [(x_1^n, \dots, x_1^{n-k}x_2^k, \dots, x_2^n)]$ est-elle un plongement ?

5. Soit l'application $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \in S^1 \rightarrow (x, 2xy) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Montrer que f est une immersion.

(b) L'application f est-elle un plongement ?

(c) L'image $f(S^1)$ est-elle une sous-variété de \mathbb{R}^2 ? Dessiner cette image.

6. **Un plongement de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R}^4 .** Soit $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'application C^∞ définie par

$$F(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, yz, zx).$$

(a) Montrer que $dF_{(x,y,z)}$ est de rang 3 en tout point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ qui n'appartient pas à la droite $x = y = 0$. Calculer le noyau de $dF_{(x,y,z)}$ aux points $(x, y, z) = (0, 0, \pm 1)$.

(b) Soit $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la restriction de F à S^2 . Déduire de (a) que f est une immersion en tout point.

(c) Montrer que deux points distincts de S^2 ont la même image par f si et seulement si ils sont diamétralement opposés.

(d) En déduire que $f(S^2)$ est une sous-variété de classe C^∞ de \mathbb{R}^4 qui est C^∞ difféomorphe au plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

7. **Un plongement de $Gr(2, \mathbb{R}^4)$ dans $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$.** Soit la variété grassmannienne $Gr(2, \mathbb{R}^4)$ formée par l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension 2 de \mathbb{R}^4

$$Gr(2, \mathbb{R}^4) = \{[M] : M \text{ est une matrice } 2 \times 4 \text{ de rang } 2\},$$

où $[M]$ désigne la classe d'équivalence qui identifie les matrices dont les deux lignes engendrent le même sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 . Soit l'application

$$f : Gr(2, \mathbb{R}^4) \rightarrow \mathbb{P}^5(\mathbb{R}) : \left[\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \end{pmatrix} \right] \rightarrow [(p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34})],$$

où $p_{ij} = v_{1i}v_{2j} - v_{1j}v_{2i}$.

- (a) Montrer que f est une immersion en tout point.
- (b) Montrer que f est injective.
- (c) L'application f est-elle un plongement ?

Indications : pour (a), il suffit d'établir le résultat en calculant l'expression locale de la différentielle de f dans un système de cartes locales, par exemple $[M] = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \right]$ et $p_{12} \neq 0$, et d'esquisser la suite du calcul.

pour (b), essayer de décomposer $Gr(2, \mathbb{R}^4)$ en sous-ensembles disjoints sur lesquels f est injective.

8. Cet exercice correspond au Théorème 2.1.6. Soient M, N deux variétés de classe C^k , $k \geq 1$, et $f : M \rightarrow N$ un morphisme de classe C^k .

(a) Soit $q \in N$. Montrer que si f est une submersion en tout $p \in f^{-1}(q)$, alors $f^{-1}(q)$ est une sous-variété de classe C^k de M , et $T_p f^{-1}(q) = \ker df_p$.

(b) Montrer que si f est un plongement, alors $f(M)$ est une sous-variété de classe C^k de N , C^k difféomorphe à M , et pour tout $p \in M$, on a $T_{f(p)} f(M) = \text{im } df_p$.

9. On considère l'application

$$F : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad [t] \mapsto F([t]) = [t + \alpha],$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Montrer que l'ensemble

$$\{F^n([t]) \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad \text{où } F^n = F \circ \dots \circ F \text{ (} n \text{ fois)},$$

est dense dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} , quel que soit t .

Indication. Via l'application $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1 : [t] \mapsto e^{2\pi it}$, l'application F correspond à une rotation d'angle $2\pi\alpha$. Diviser le cercle en k intervalles semi-ouverts disjoints de longueur $2\pi/k$ et remarquer que deux des $k+1$ premiers points de l'itération sont contenus dans un même intervalle. Supposons qu'il s'agisse des points $e^{2\pi i(t+p\alpha)}$ et $e^{2\pi i(t+q\alpha)}$, avec $0 \leq q < p \leq k$. Poser $s = p - q$, considérer la sous-suite $e^{2\pi i(t+ns\alpha)}$, $n \in \mathbb{N}$, et conclure en choisissant k suffisamment grand.

10. La droite de Kronecker du tore. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, définissons $f : \mathbb{R} \rightarrow T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ par $f(t) = [(t, \alpha t)]$.

(a) Montrer que f est injective si et seulement si $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

(b) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow T$ est une immersion.

(c) Montrer que si $\alpha \in \mathbb{Q}$, alors $f(\mathbb{R})$ est une sous-variété de T , difféomorphe à S^1 .

(d) Montrer que si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, alors $f(\mathbb{R})$ est dense dans T .

Indication. Considérer la suite des intersections de $f(\mathbb{R})$ avec une "section verticale" $\{[(x, y)] \mid y \in \mathbb{R}\}$, $x \in \mathbb{R}$ fixé et utiliser l'exercice 9.

(e) En déduire que si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, f est une immersion injective qui n'est pas un plongement.

2.6.2 Champs de vecteurs

1. Soit la sphère S^2 . On considère les champs de vecteurs suivants dans la carte locale (x_1, x_2) obtenue par la projection stéréographique à partir du pôle nord :

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad Z = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad V = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

(a) Trouver l'expression de ces champs de vecteurs dans la carte locale obtenue en prenant le complexe conjugué de la projection stéréographique à partir du pôle sud. En déduire qu'ils s'étendent en des champs de vecteurs bien définis sur S^2 .

(b) Calculer explicitement les flots de ces champs de vecteurs dans chaque carte locale et représenter les graphiquement.

(c) Représenter les flots sur la sphère.

2. On considère les champs de vecteurs X, Z, V sur la sphère S^2 définis comme dans l'exercice 1. Dans chaque cas, montrer que ces champs de

vecteurs n'ont que des points singuliers isolés et vérifier que la somme des indices des points singuliers est 2 (la caractéristique d'Euler-Poincaré de S^2).

3. En considérant le champ de vecteurs suivant sur \mathbb{R}^{2n}

$$\left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) + \left(x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_4}\right) + \dots + \left(x_{2n} \frac{\partial}{\partial x_{2n-1}} - x_{2n-1} \frac{\partial}{\partial x_{2n}}\right),$$

montrer que l'on peut définir sur la sphère S^{2n-1} de dimension $2n - 1$ ($n = 1, 2, \dots$) un champ de vecteurs qui ne s'annule en aucun point.

4. Soit le champ de vecteurs $\dot{x} = x^2$ sur \mathbb{R} .

(a) Déterminer l'ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sur lequel le flot $\phi(t, x) = \phi^t(x)$ de ce champ de vecteurs est défini.

(b) A l'aide des projections stéréographiques, montrer que ce champ de vecteurs s'étend en un champ de vecteurs sur le cercle S^1 .

(c) Puisque S^1 est compact, le flot du champ de vecteurs obtenu en (b) est défini sur $\mathbb{R} \times S^1$. Ceci vous semble-t-il contradictoire avec le résultat obtenu en (a) ?

(d) Donner un exemple d'un champ de vecteurs sur \mathbb{R} qui ne s'étend pas à S^1 .

5. Dans une (des trois) cartes locales sur \mathbb{R}^2 du plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, on considère le champ de vecteurs

$$(ax_1 + bx_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + (cx_1 + dx_2) \frac{\partial}{\partial x_2},$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ des constantes arbitraires.

(a) Montrer que ce champ s'étend au plan projectif tout entier et que son extension est tangente à la droite de l'infini.

(b) Généraliser ce résultat à $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

6. On considère les deux champs de vecteurs suivants dans une (des trois) cartes locales sur \mathbb{R}^2 du plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$$-x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

(a) Montrer que ces champs s'étendent au plan projectif tout entier (cas particulier de l'exercice 5).

(b) Dans chaque cas, montrer que ces champs de vecteurs n'ont que des points singuliers isolés et calculer la somme des indices des points singuliers. En déduire la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$.

7. Sur la sphère $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, on considère la fonction hauteur $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y, z) = z$. Montrer que le champ de vecteurs gradient ∇f est donné par

$$(\nabla f)_{(x,y,z)} = (-xz, -yz, 1 - z^2).$$

(pour rappel : $df_p(u) = \langle (\nabla f)_p, u \rangle$, $\forall u \in T_p S^2$, avec $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire induit par \mathbb{R}^3).

2.6.3 Crochet de Lie

1. On considère les deux champs de vecteurs X et Y sur \mathbb{R}^2 donnés en coordonnées cartésiennes (x, y) par

$$X = \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{et} \quad Y = x \frac{\partial}{\partial y}.$$

- Donner l'expression des flots $\phi_X^t(a, b)$ et $\phi_Y^t(a, b)$, à partir d'un point arbitraire $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
- En déduire une formule exacte pour $\phi_Y^s \circ \phi_X^t(a, b) - \phi_X^t \circ \phi_Y^s(a, b)$.
- Calculer le crochet de Lie $[X, Y]$ et interpréter votre résultat.

2. Sur \mathbb{R}^2 , muni des coordonnées cartésiennes (x, y) , on considère les deux champs de vecteurs

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

- Calculer le crochet de Lie $[X, Y]$.
- Les flots de ces champs de vecteurs commutent-ils ?
- Donner l'expression explicite des flots de X et de Y .

3. On se donne sur \mathbb{R}^3 muni des coordonnées cartésiennes (x, y, z) , les champs de vecteurs

$$X = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{et} \quad Y = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}.$$

- Calculer le crochet de Lie $[X, Y]$.
- Déterminer deux matrices 3×3 , $A(t)$ et $B(t)$, telles que les flots ϕ_X^t et ϕ_Y^t , calculés à partir d'un point $(a, b, c)^T \in \mathbb{R}^3$, s'expriment comme suit

$$\phi_X^t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \phi_Y^t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = B(t) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

(c) Au vu de votre réponse à la question (b), donner une interprétation géométrique du résultat calculé en (a).

4. Soient X, Y, Z trois champs de vecteurs C^∞ sur une variété lisse. Montrer que l'identité de Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0,$$

est satisfaite.

5. Soient X et Y deux champs de vecteurs sur une variété lisse M . Désignons par ϕ et ψ les flots respectifs de X et Y . Démontrer que pour tout point $p \in M$, la courbe

$$c(t) = \begin{cases} \psi^{-\sqrt{t}} \circ \phi^{-\sqrt{t}} \circ \psi^{\sqrt{t}} \circ \phi^{\sqrt{t}}(p), & t \geq 0, \\ \phi^{-\sqrt{-t}} \circ \psi^{-\sqrt{-t}} \circ \phi^{\sqrt{-t}} \circ \psi^{\sqrt{-t}}(p), & t \leq 0, \end{cases}$$

définie pour $|t|$ suffisamment petit, est lisse et telle que

$$\dot{c}(0) = [X, Y]_p.$$

6. Redressement d'une famille de champs de vecteurs. Soit M une variété lisse, $p \in M$ et X_1, \dots, X_k des champs de vecteurs tels que $[X_i, X_j] = 0, \forall 1 \leq i, j \leq k$. Le but de cet exercice est de montrer que si $(X_1)_p, \dots, (X_k)_p$ sont linéairement indépendants, alors il existe une carte locale (W, ψ) en p telle que $\forall q \in W, (X_i)_q = \left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)_q, 1 \leq i \leq k$, où (t_1, \dots, t_n) sont les coordonnées locales.

(a) Montrer qu'on peut choisir une carte locale (U, φ) en p telle que $\varphi(p) = 0$ et $d\varphi_p((X_i)_p) = \vec{e}_i, 1 \leq i \leq k$, où \vec{e}_i sont les vecteurs unitaires dans la direction des k premiers axes de coordonnées.

(b) On considère l'application suivante définie sur un voisinage suffisamment petit de l'origine inclus à $\varphi(U)$

$$\Phi(t_1, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_n) = \phi_k^{t_k} \circ \dots \circ \phi_1^{t_1}(\varphi^{-1}(0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_n)),$$

où ϕ_i^t est le flot de X_i . Montrer que

$$(1) d\Phi_{\vec{t}}(\vec{e}_i) = (X_i)_{\Phi(\vec{t})}, \quad 1 \leq i \leq k, \quad \vec{t} = (t_1, \dots, t_n),$$

$$(2) d\Phi_0(\vec{e}_i) = \left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)_p, \quad k+1 \leq i \leq n,$$

$$(3) d(\varphi \circ \Phi)_0(\vec{e}_i) = \vec{e}_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

(c) En déduire l'existence d'un voisinage V de 0 inclus à $\varphi(U)$ sur lequel Φ est un difféomorphisme et que $(W = \Phi(V), \psi = \Phi^{-1})$ est une carte

compatible en p telle que $(X_i)_q = \left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)_q, 1 \leq i \leq k, \forall q \in W$.

7. Théorème de Frobenius. Un système de k champs de vecteurs X_1, \dots, X_k partout indépendants sur une variété M est dit *complètement intégrable* si pour tout $p \in M$ il existe un ouvert $U \subset M$ et une sous-variété N de dimension k (dite *variété intégrale*), contenue dans U , contenant p , et telle que $(X_i)_q \in T_q N$ pour tout $q \in N$ et pour tout $1 \leq i \leq k$. (L'adverbe "complètement" exprime qu'on peut trouver des sous-variétés tangentes au "champ de k -plans" engendré par les X_i dont la dimension soit la plus grande possible). On va montrer qu'un système de k champs de vecteurs est complètement intégrable si et seulement si il existe k^3 fonctions lisses $c_{ij}^l : M \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$[X_i, X_j] = \sum_{l=1}^k c_{ij}^l X_l. \quad (2.31)$$

(a) Montrer que la condition est nécessaire.

(b) Pour montrer que la condition est suffisante, on se ramène à l'exercice 6. Soit une carte (U, φ) en p telle que $(X_i)_p = \left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)_p, 1 \leq i \leq k$, où (t_1, \dots, t_n) sont les coordonnées locales. Pour $q \in U$, on a

$$(X_i)_q = \sum_{j=1}^n a_i^j(q) \left(\frac{\partial}{\partial t_j}\right)_q, \text{ avec } a_i^j \in C^\infty(U).$$

- i) Montrer qu'il existe un ouvert contenant p où la matrice $(a_i^j(q))_{1 \leq i, j \leq k}$ est inversible.
- ii) Notons $(b_i^j(q))_{1 \leq i, j \leq k}$ la matrice inverse, et soit $(X'_i)_q = \sum_{j=1}^k b_i^j(q) (X_j)_q$. Montrer que

$$(X'_i)_q = \left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)_q + \sum_{l>k} c_i^l(q) \left(\frac{\partial}{\partial t_l}\right)_q.$$

- iii) En utilisant les relations (2.31), montrer que $[X'_i, X'_j] = \sum_{l=1}^k d_{ij}^l X'_l$. A partir de ii), en déduire que $[X'_i, X'_j] = 0, 1 \leq i, j \leq k$.

Chapitre 3

Formes différentielles

L'objectif de la théorie des formes différentielles est de généraliser les théorèmes classiques d'analyse vectorielle utilisés en physique, relatifs au gradient, au rotationnel et à la divergence en toutes dimensions. Nous commençons par une étude du calcul extérieur, qui constitue une généralisation du calcul vectoriel.

3.1 Formes extérieures

Dans cette section, on introduit les définitions et propriétés des formes extérieures sur un espace vectoriel. Il est fondamental pour la suite du cours de bien maîtriser ces notions purement algébriques.

Définition 3.1.1. *Soit E un espace vectoriel réel. Une k -forme extérieure sur E est une application*

$$\omega : \underbrace{E \times \dots \times E}_{k \text{ fois}} \rightarrow \mathbb{R},$$

qui est

- 1) multilinéaire,
- 2) alternée, c.à.d. $\forall v_1, \dots, v_k \in E$, on a

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)\omega(v_1, \dots, v_k),$$

pour toute permutation $\sigma \in S_k$ de $\{1, \dots, k\}$, où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ .

L'addition de deux k -formes extérieures ainsi que la multiplication scalaire d'une k -forme extérieure par un réel sont définies de façon évidente. On note $\bigwedge^k E^*$ l'espace vectoriel des k -formes extérieures sur E . Pour $k = 1$, $\bigwedge^1 E^*$ n'est rien d'autre que le dual E^* de E . Par convention $\bigwedge^0 E^* = \mathbb{R}$. A cause du caractère alterné, si $\dim E = n$, $\bigwedge^k E^* = 0$, pour $k \geq n + 1$.

On peut aussi introduire une notion de produit entre formes extérieures qui généralise le produit vectoriel.

Définition 3.1.2. Soit $\alpha \in \bigwedge^k E^*$ et $\beta \in \bigwedge^l E^*$. Le produit extérieur de α et β est une $k+l$ -forme extérieure, notée $\alpha \wedge \beta \in \bigwedge^{k+l} E^*$, définie comme suit

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \varepsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}). \quad (3.1)$$

Proposition 3.1.3. La définition de $\alpha \wedge \beta$ donnée en (3.1) définit une $k+l$ forme extérieure sur E .

Démonstration. La multilinéarité de $\alpha \wedge \beta$ découle immédiatement de celle de α et β . Vérifions que $\alpha \wedge \beta$ est alternée. Pour $\tau \in S_{k+l}$, on a

$$\begin{aligned} & \alpha \wedge \beta(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(k+l)}) \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \varepsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma \circ \tau(1)}, \dots, v_{\sigma \circ \tau(k)}) \beta(v_{\sigma \circ \tau(k+1)}, \dots, v_{\sigma \circ \tau(k+l)}). \end{aligned}$$

En posant $\mu = \sigma \circ \tau$, puisque $\varepsilon(\mu) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$, on peut écrire la somme ci-dessus comme suit

$$\begin{aligned} & \alpha \wedge \beta(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(k+l)}) \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\mu \in S_{k+l}} \varepsilon(\tau)\varepsilon(\mu) \alpha(v_{\mu(1)}, \dots, v_{\mu(k)}) \beta(v_{\mu(k+1)}, \dots, v_{\mu(k+l)}) \\ &= \varepsilon(\tau) \alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{k+l}), \end{aligned}$$

ce qui établit le résultat. \square

Pour établir certaines propriétés du produit extérieur, il est utile d'observer que la définition (3.1) peut se réécrire comme suit

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{k+l}) = \sum_{A,B} \varepsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}), \quad (3.2)$$

où la somme porte sur toutes les partitions de $\{1, \dots, k+l\}$ en deux sous-ensembles disjoints A et B , avec σ un choix d'une permutation de $(1, \dots, k+l)$ telle que $A = \{\sigma(i), 1 \leq i \leq k\}$ et $B = \{\sigma(k+i), 1 \leq i \leq k+l\}$.

Proposition 3.1.4. (Propriétés du produit extérieur).

$$1) (\alpha + \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge \gamma + \beta \wedge \gamma, \quad \forall \alpha, \beta \in \bigwedge^k E^*, \gamma \in \bigwedge^l E^*. \quad (3.3)$$

$$2) \beta \wedge \alpha = (-1)^{kl} \alpha \wedge \beta, \quad \forall \alpha \in \bigwedge^k E^*, \beta \in \bigwedge^l E^*. \quad (3.4)$$

$$3) \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma, \quad \forall \alpha \in \bigwedge^k E^*, \beta \in \bigwedge^l E^*, \gamma \in \bigwedge^m E^*. \quad (3.5)$$

Démonstration. 1) Evident.

2) Le signe de la permutation

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k & k+1 & \dots & k+l \\ l+1 & \dots & l+k & 1 & \dots & l \end{pmatrix}$$

est $\varepsilon(\tau) = (-1)^{kl}$, et donc

$$\begin{aligned} \beta \wedge \alpha(v_1, \dots, v_{k+l}) &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \varepsilon(\sigma) \beta(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(l)}) \alpha(v_{\sigma(l+1)}, \dots, v_{\sigma(l+k)}) \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\nu = \sigma \circ \tau, \sigma \in S_{k+l}} \varepsilon(\sigma) \alpha(v_{\nu(1)}, \dots, v_{\nu(k)}) \beta(v_{\nu(k+1)}, \dots, v_{\nu(k+l)}) \\ &= (-1)^{kl} \frac{1}{k!l!} \sum_{\nu \in S_{k+l}} \varepsilon(\nu) \alpha(v_{\nu(1)}, \dots, v_{\nu(k)}) \beta(v_{\nu(k+1)}, \dots, v_{\nu(k+l)}) \\ &= (-1)^{kl} \alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{k+l}), \end{aligned}$$

puisque $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) = (-1)^{kl}\varepsilon(\sigma)$.

3) On vérifie facilement à partir des définitions que

$$\begin{aligned} \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)(v_1, \dots, v_{k+l+m}) &= \frac{1}{k!l!m!} \times \\ &\sum_{\sigma \in S_{k+l+m}} \varepsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \gamma(v_{\sigma(k+l+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l+m)}) \\ &= (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma(v_1, \dots, v_{k+l+m}). \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration de la proposition. \square

En vertu de l'associativité du produit extérieur (3.5), le produit extérieur d'un nombre arbitraire de formes extérieures est bien défini. La proposition suivante est très importante.

Proposition 3.1.5. $\forall \omega_1, \dots, \omega_k \in E^*$:

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k(v_1, \dots, v_k) = \det(\omega_i(v_j))_{1 \leq i, j \leq k}. \quad (3.6)$$

Démonstration. On démontre le résultat par induction sur k . Supposons le résultat vrai pour $k-1$, alors en utilisant (3.2) et l'hypothèse d'induction, on a

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_k)(v_1, \dots, v_k) &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \omega_1(v_i) \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_k(v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_k) \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \omega_1(v_i) \begin{vmatrix} \omega_2(v_1) & \dots & \widehat{\omega_2(v_i)} & \dots & \omega_2(v_k) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \omega_k(v_1) & \dots & \widehat{\omega_k(v_i)} & \dots & \omega_k(v_k) \end{vmatrix} \\ &= \det(\omega_i(v_j))_{1 \leq i, j \leq k}, \end{aligned}$$

où le "chapeau" signifie que l'élément sous celui-ci est omis. Ceci achève la démonstration de la proposition. \square

Soit $e_i, 1 \leq i \leq n$, une base de E . On notera $e_i^*, 1 \leq i \leq n$, la base duale de E^* , définie par

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}.$$

Proposition 3.1.6. *Soit $e_i, 1 \leq i \leq n$, une base de E . Les k -formes extérieures $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*, 0 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, forment une base de $\bigwedge^k E^*$. Précisément*

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*.$$

$$\text{En particulier, } \dim \bigwedge^k E^* = \binom{n}{k}.$$

Démonstration. Pour vérifier l'égalité, puisque le membre de gauche et le membre de droite sont des formes multilinéaires alternées, il suffit de vérifier que l'on a l'égalité quand on évalue des deux membres sur toute suite $e_{j_1}, \dots, e_{j_k}, 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$, ce qui résulte de

$$\begin{aligned} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) &= \delta_{i_1 j_1} \dots \delta_{i_k j_k}, \\ \forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n, 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n, \end{aligned}$$

que l'on établit facilement à partir de (3.6). Le même argument montre que si

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_k} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* = 0, \quad \alpha_{i_1 \dots i_k} \in \mathbb{R},$$

nécessairement tous les coefficients $\alpha_{i_1 \dots i_k}$ sont nuls, ce qui termine la démonstration de la proposition. \square

La définition suivante généralise la notion d'application transposée.

Définition 3.1.7. *Soit $\phi : E \rightarrow F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels réels E et F . On définit l'application linéaire image réciproque*

$$\phi^* : \bigwedge^k F^* \rightarrow \bigwedge^k E^*,$$

comme suit

$$\phi^*(\omega)(v_1, \dots, v_k) = \omega(\phi(v_1), \dots, \phi(v_k)), \quad \forall v_1, \dots, v_k \in E. \quad (3.7)$$

Proposition 3.1.8. *1) Soit $\phi : E \rightarrow F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels réels E et F . Alors,*

$$\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*(\alpha) \wedge \phi^*(\beta), \quad \forall \alpha \in \bigwedge^k E^*, \beta \in \bigwedge^l E^*. \quad (3.8)$$

2) Soit E, F, G des espaces vectoriels réels de dimension finie et soient $\phi : E \rightarrow F$ et $\psi : F \rightarrow G$ des applications linéaires, alors

$$(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*. \quad (3.9)$$

Démonstration. 1) En utilisant la définition du produit extérieur (3.1) et de l'image réciproque (3.7), on a

$$\begin{aligned} \phi^*(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{k+l}) &= \alpha \wedge \beta(\phi(v_1), \dots, \phi(v_{k+l})) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \varepsilon(\sigma) \alpha(\phi(v_{\sigma(1)}), \dots, \phi(v_{\sigma(k)})) \beta(\phi(v_{\sigma(k+1)}), \dots, \phi(v_{\sigma(k+l)})) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \varepsilon(\sigma) \phi^*(\alpha)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \phi^*(\beta)(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= \phi^*(\alpha) \wedge \phi^*(\beta)(v_1, \dots, v_{k+l}), \end{aligned}$$

ce qui établit 1). Pour vérifier 2), pour toute k -forme extérieure sur G et pour tout $v_1, \dots, v_k \in E$, on a d'une part

$$(\psi \circ \phi)^*(\omega)(v_1, \dots, v_k) = \omega(\psi \circ \phi(v_1), \dots, \psi \circ \phi(v_k)),$$

et d'autre part

$$\phi^*(\psi^*\omega)(v_1, \dots, v_k) = \psi^*\omega(\phi(v_1), \dots, \phi(v_k)) = \omega(\psi \circ \phi(v_1), \dots, \psi \circ \phi(v_k)),$$

ce qui établit le résultat et termine la démonstration. \square

Dans la suite nous aurons besoin de la notion suivante et de la proposition qui en découle.

Définition 3.1.9. Soit

$$\eta : \underbrace{E \times \dots \times E}_{k \text{ fois}} \rightarrow \mathbb{R},$$

une k -forme multilinéaire sur un espace vectoriel réel E de dimension finie.

On lui associe une k -forme extérieure $\text{Alt}(\eta) \in \wedge^k E^*$ comme suit

$$\text{Alt}(\eta)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma) \eta(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}). \quad (3.10)$$

En particulier si $\eta \in \wedge^k E^*$, on a $\text{Alt}(\eta) = \eta$.

Proposition 3.1.10. Soit

$$\eta : \underbrace{E \times \dots \times E}_{k \text{ fois}} \rightarrow \mathbb{R},$$

une k -forme multilinéaire et alternée en les $(k-1)$ dernières variables, alors

$$\text{Alt}(\eta)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \eta(v_i, v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k), \quad (3.11)$$

où la notation \widehat{v}_i signifie que v_i est supprimé.

Démonstration. Pour $1 \leq i \leq k$, notons

$$S_k^i = \{\sigma \in S_k : \sigma(i) = 1\},$$

et $\tau_i \in S_k$ la transposition qui échange 1 et i . Clairement $S_k = \cup_{i=1}^k S_k^i$ de sorte que

$$\text{Alt}(\eta)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^k \sum_{\sigma \in S_k^i} \varepsilon(\sigma) \eta(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}).$$

Puisque

$$\sigma \in S_k^i \Leftrightarrow \sigma = \sigma' \circ \tau_i, \text{ avec } \sigma' \in S_k^1,$$

on a

$$\begin{aligned} \text{Alt}(\eta)(v_1, \dots, v_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^k \sum_{\sigma' \in S_k^1} \varepsilon(\tau_i) \varepsilon(\sigma') \eta(v_{\sigma' \circ \tau_i(1)}, \dots, v_{\sigma' \circ \tau_i(k)}) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^k \sum_{\sigma' \in S_k^1} \varepsilon(\tau_i) \eta(v_{\tau_i(1)}, \dots, v_{\tau_i(k)}) \\ &= \frac{(k-1)!}{k!} \sum_{i=1}^k \varepsilon(\tau_i) \eta(v_i, v_2, \dots, v_{i-1}, v_1, v_{i+1}, \dots, v_k) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \eta(v_i, v_1, v_2, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k), \end{aligned}$$

où pour passer de la première à la deuxième égalité et de la troisième à la quatrième égalité, on a utilisé que η est alternée en les $k-1$ dernières variables, ainsi que $\varepsilon(\tau_i) = -1$. Ceci achève la démonstration de la proposition. \square

La somme directe

$$\bigwedge E^* = \bigoplus_{k=0}^n \bigwedge^k E^*,$$

est un espace vectoriel réel de dimension 2^n . Pour

$$\alpha = \sum_{k=0}^n \alpha_k, \quad \beta = \sum_{l=0}^n \beta_l,$$

avec $\alpha \in \bigwedge^k E^*, \beta \in \bigwedge^l E^*$, on définit

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{k,l=0}^n \alpha_k \wedge \beta_l.$$

Muni des deux opérations d'addition et de multiplication extérieure, en vertu de (3.3), (3.4) et (3.5), $\bigwedge E^*$ est une algèbre sur \mathbb{R} , que l'on appelle l'algèbre de Grassmann sur E^* .

3.2 Formes différentielles

3.2.1 Fibrés extérieurs

Définition 3.2.1. Soit M une variété lisse de dimension n . On définit les fibrés extérieurs

$$\bigwedge^k T^*M = \coprod_{p \in M} \bigwedge^k T_p^*M, \quad 1 \leq k \leq n,$$

et on note π la projection naturelle sur la base M ; $\pi(\omega) = p$, si $\omega \in \bigwedge^k T_p^*M$. Pour $k = 1$, le fibré extérieur s'appelle le fibré cotangent, et se note T^*M .

Proposition 3.2.2. Le fibré extérieur $\bigwedge^k T^*M$ est naturellement muni d'une structure de variété \mathcal{C}^∞ .

Démonstration. Soit (U, φ) une carte locale de M . Pour $p \in U$, on note $\theta_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}^n$, l'application linéaire qui donne les coordonnées d'un vecteur tangent en p dans la carte locale. On définit une carte de $\bigwedge^k T^*M$:

$$\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U) \times \bigwedge^k (\mathbb{R}^n)^*, \quad \tilde{\varphi}(\omega) = (\varphi(\pi(\omega)), (\theta_{\pi(\omega)}^{-1})^*(\omega)).$$

Soit (V, ψ) une autre carte locale de M . Notons $\eta_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}^n$, l'application donnant les coordonnées locales d'un vecteur tangent en p dans cette carte, et $(\pi^{-1}(V), \tilde{\psi})$ la carte locale correspondante de $\bigwedge^k T^*M$. Soit $\omega \in \pi^{-1}(U \cap V)$. En utilisant (3.9), on calcule

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\omega) &= (\psi(\pi(\omega)), (\eta_{\pi(\omega)}^{-1})^*(\omega)) \\ &= (\psi \circ \varphi^{-1}(\varphi(\pi(\omega))), (\eta_{\pi(\omega)}^{-1})^* \circ \theta_{\pi(\omega)}^* \circ (\theta_{\pi(\omega)}^{-1})^*(\omega)) \\ &= (\psi \circ \varphi^{-1}(\varphi(\pi(\omega))), (\theta_{\pi(\omega)} \circ \eta_{\pi(\omega)}^{-1})^* \circ (\theta_{\pi(\omega)}^{-1})^*(\omega)) \\ &= (\psi \circ \varphi^{-1}(\varphi(\pi(\omega))), (D(\varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(\pi(\omega))})^* \circ (\theta_{\pi(\omega)}^{-1})^*(\omega)). \end{aligned}$$

Donc le changement de cartes est donné par

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} &: \varphi(U \cap V) \times \bigwedge^k (\mathbb{R}^n)^* \rightarrow \psi(U \cap V) \times \bigwedge^k (\mathbb{R}^n)^*, \\ \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x, \alpha) &= (\psi \circ \varphi^{-1}(x), (D(\varphi \circ \psi^{-1})_{\psi \circ \varphi^{-1}(x)})^*(\alpha)), \end{aligned}$$

qui est bien une application de classe \mathcal{C}^∞ . □

Définition 3.2.3. Soit M une variété lisse, de dimension n . Une k -forme différentielle sur M , $1 \leq k \leq n$, est la donnée d'une section ω de classe \mathcal{C}^∞ du fibré extérieur $\bigwedge^k T^*M$; i.e. $\omega \in \mathcal{C}^\infty(M, \bigwedge^k T^*M)$ et $\pi \circ \omega = id$. Par convention, une 0-forme sur M est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur M . On note $\Omega^k(M)$ l'espace des k -formes différentielles sur M .

On note $\Omega(M) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(M)$, la somme directe des $\Omega^k(M)$. Rappelons que $\Omega^k(M) = 0$ si $k \geq n+1$. Par convention, on pose $\Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$. $\Omega(M)$ est une algèbre, l'addition et le produit extérieur des formes différentielles étant définis point par point, i.e. pour tout $p \in M$:

$$\begin{aligned} (\omega_1 + \omega_2)(p) &= \omega_1(p) + \omega_2(p) \\ (\omega_1 \wedge \omega_2)(p) &= \omega_1(p) \wedge \omega_2(p). \end{aligned}$$

Soit ω une k -forme différentielle sur M et (U, φ) une carte locale de M . L'expression locale de ω dans cette carte est

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} \circ \omega \circ \varphi^{-1} &: \varphi(U) \rightarrow \varphi(U) \times \bigwedge^k (\mathbb{R}^n)^*, \\ \tilde{\varphi} \circ \omega \circ \varphi^{-1}(x) &= (x, (\theta_{\varphi^{-1}(x)}^{-1})^*(\omega_{\varphi^{-1}(x)})). \end{aligned}$$

C'est une application de classe \mathcal{C}^∞ , ce qui signifie que $(\theta_{\varphi^{-1}(x)}^{-1})^*(\omega_{\varphi^{-1}(x)})$ est une k -forme différentielle sur l'ouvert $\varphi(U)$ de \mathbb{R}^n . Nous noterons

$$\varphi_* \omega(x) = (\theta_{\varphi^{-1}(x)}^{-1})^*(\omega_{\varphi^{-1}(x)}),$$

cette k -forme différentielle sur $\varphi(U)$, et nous l'appellerons l'expression locale de ω dans la carte (U, φ) . On vérifie facilement que l'application $\varphi_* : \Omega(U) \rightarrow \Omega(\varphi(U))$ est un isomorphisme d'algèbres.

Si $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, la différentielle $df_p, p \in M$ est un élément de T_p^*M . Donc $df : p \in M \rightarrow df_p \in T_p^*M$, définit une section du fibré cotangent T^*M , c.à.d. une 1-forme sur M . Nous écrirons $df \in \Omega^1(M)$. Soit (U, φ) une carte locale de M . Notons (x_1, \dots, x_n) les coordonnées locales, et $\varphi_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ la i ème coordonnée de φ . Les $d\varphi_i$ définissent des 1-formes sur U . Pour $p \in U$, on a

$$\begin{aligned} (d\varphi_i)_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p \right) &= \frac{d}{dt} \varphi_i \left(\varphi^{-1}(\varphi(p) + te_j) \right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (\varphi_i(p) + t\delta_{ij}) = \delta_{ij}, \end{aligned}$$

ce qui montre que les $(d\varphi_i)_p$ forment la base duale des $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p, 1 \leq i \leq n$. Donc si $\omega \in \Omega^k(M)$, pour tout $p \in U$, en vertu de la Proposition 3.1.6, on peut développer $\omega(p) \in \bigwedge^k T_p^*M$ comme suit

$$\omega(p) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k}(p) d\varphi_{i_1}(p) \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}(p).$$

L'expression locale de ω dans la carte est alors donnée par

$$\begin{aligned} \varphi_* \omega(x) (e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) &= \omega_{\varphi^{-1}(x)} (\theta_{\varphi^{-1}(x)}^{-1}(e_{i_1}), \dots, \theta_{\varphi^{-1}(x)}^{-1}(e_{i_k})) \\ &= \omega_{\varphi^{-1}(x)} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \right)_{\varphi^{-1}(x)}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \right)_{\varphi^{-1}(x)} \right) \\ &= \omega_{i_1 \dots i_k}(\varphi^{-1}(x)), \end{aligned}$$

i.e.

$$\varphi_*\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (\omega_{i_1 \dots i_k} \circ \varphi^{-1})(x) e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*,$$

avec $\omega_{i_1 \dots i_k} \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(\varphi(U))$. Puisque $e_i^*(x_1, \dots, x_n) = x_i$ sont des formes linéaires, $de_i^* = e_i^*$, et on note souvent $e_i^* = de_i^* = dx_i$, d'où l'écriture suivante en coordonnées locales

$$\varphi_*\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (\omega_{i_1 \dots i_k} \circ \varphi^{-1})(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Définition 3.2.4. Soient M et N deux variétés lisses et soit $\phi : M \rightarrow N$ une application \mathcal{C}^∞ . On définit l'application image réciproque $\phi^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ par

$$(\phi^*\omega)_p = (d\phi_p)^*(\omega_{\phi(p)}),$$

ou de façon équivalente

$$(\phi^*\omega)_p(\xi_1, \dots, \xi_k) = \omega_{\phi(p)}(d\phi_p(\xi_1), \dots, d\phi_p(\xi_k)), \quad \forall \xi_1, \dots, \xi_k \in T_p M. \quad (3.12)$$

Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$, on a $(\phi^*f)(p) = f(\phi(p))$, i.e. $\phi^*f = f \circ \phi$. On vérifie facilement, en utilisant (3.8) et (3.9), que l'image réciproque d'une composée de deux applications $\phi : M \rightarrow N$ et $\psi : N \rightarrow S$, est donnée par

$$(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*, \quad (3.13)$$

et que

$$\phi^*(\omega \wedge \eta) = \phi^*(\omega) \wedge \phi^*(\eta), \quad \forall \omega, \eta \in \Omega(N). \quad (3.14)$$

3.2.2 La différentielle extérieure

L'objectif de cette section est de montrer que la généralisation du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

$$\int_0^1 Df_{x+tv}(v) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x+tv) dt = f(x+v) - f(x),$$

où f est une fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et $v \in \mathbb{R}^n$, s'obtient en généralisant la notion de différentielle des fonctions en celle de différentielle extérieure des formes différentielles.

Définition 3.2.5. On appelle pavé orienté de dimension k , de sommet $x \in \mathbb{R}^n$ et construit sur les vecteurs $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble

$$P(x; v_1, \dots, v_k) = \left\{ x + \sum_{i=1}^k t_i v_i, 0 \leq t_i \leq 1 \right\}. \quad (3.15)$$

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $P(x; v_1, \dots, v_k) \subset U$ un pavé orienté de dimension k et ω une k -forme différentielle sur U . Soit l'application

$$\phi : [0, 1]^k \rightarrow U, (t_1, \dots, t_k) \mapsto \phi(t_1, \dots, t_k) = x + \sum_{i=1}^k t_i v_i. \quad (3.16)$$

On définit

$$\int_{P(x; v_1, \dots, v_k)} \omega = \int_{[0, 1]^k} f(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k, \quad (3.17)$$

où $f(t_1, \dots, t_k)$ est univoquement définie par l'écriture de $\phi^* \omega$ sous la forme

$$\phi^* \omega = f(t_1, \dots, t_k) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k. \quad (3.18)$$

Lemme 3.2.6. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit ω une k -forme différentielle sur U . Alors, $\forall x \in U$ et pour tout $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\int_{P(x; \varepsilon v_1, \dots, \varepsilon v_k)} \omega = \varepsilon^k \omega_x(v_1, \dots, v_k) + \frac{\varepsilon^{k+1}}{2} D\omega_x(s)(v_1, \dots, v_k) + o(\varepsilon^{k+1}), \quad (3.19)$$

avec $s = v_1 + \dots + v_k$ et $D\omega_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \bigwedge^k (\mathbb{R}^n)^*$ la différentielle en x de l'application \mathcal{C}^∞

$$\omega : U \rightarrow \bigwedge^k (\mathbb{R}^n)^*, x \mapsto \omega_x.$$

Démonstration. Soit

$$\phi : [0, 1]^k \rightarrow U, (t_1, \dots, t_k) \mapsto \phi(t_1, \dots, t_k) = x + \varepsilon \sum_{i=1}^k t_i v_i,$$

la paramétrisation du pavé orienté $P(x; \varepsilon v_1, \dots, \varepsilon v_k)$. En notant e_1, \dots, e_k la base canonique orientée de \mathbb{R}^k , on a

$$\begin{aligned} \phi^*(\omega)_{(t_1, \dots, t_k)} &= \phi^*(\omega)_{(t_1, \dots, t_k)}(e_1, \dots, e_k) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k \\ &= \omega_{\phi(t_1, \dots, t_k)}(d\phi_{(t_1, \dots, t_k)}(e_1), \dots, d\phi_{(t_1, \dots, t_k)}(e_k)) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k \\ &= \omega_{\phi(t_1, \dots, t_k)}(\varepsilon v_1, \dots, \varepsilon v_k) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k \\ &= \varepsilon^k \omega_{\phi(t_1, \dots, t_k)}(v_1, \dots, v_k) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k, \end{aligned}$$

et donc, par la définition donnée en (3.15), (3.16) et (3.17) de l'intégrale d'une forme différentielle sur un pavé orienté, on obtient

$$\int_{P(x; \varepsilon v_1, \dots, \varepsilon v_k)} \omega = \varepsilon^k \int_{[0, 1]^k} \omega_{\phi(t_1, \dots, t_k)}(v_1, \dots, v_k) dt_1 \dots dt_k. \quad (3.20)$$

Par définition de la différentielle, on a

$$\begin{aligned}\omega_{\phi(t_1, \dots, t_k)} &= \omega\left(x + \varepsilon \sum_{i=1}^k t_i v_i\right) = \omega_x + \varepsilon D\omega_x\left(\sum_{i=1}^k t_i v_i\right) + o(\varepsilon) \\ &= \omega_x + \varepsilon \sum_{i=1}^k t_i D\omega_x(v_i) + o(\varepsilon),\end{aligned}$$

et donc, en substituant dans (3.20), on obtient

$$\begin{aligned}& \int_{P(x; \varepsilon v_1, \dots, \varepsilon v_k)} \omega \\ &= \varepsilon^k \omega_x(v_1, \dots, v_k) + \varepsilon^{k+1} \sum_{i=1}^k D\omega_x(v_i)(v_1, \dots, v_k) \int_{[0,1]^k} t_i dt_1 \dots dt_k + o(\varepsilon^{k+1}) \\ &= \varepsilon^k \omega_x(v_1, \dots, v_k) + \frac{\varepsilon^{k+1}}{2} \sum_{i=1}^k D\omega_x(v_i)(v_1, \dots, v_k) + o(\varepsilon^{k+1}) \\ &= \varepsilon^k \omega_x(v_1, \dots, v_k) + \frac{\varepsilon^{k+1}}{2} D\omega_x(v_1 + \dots + v_k)(v_1, \dots, v_k) + o(\varepsilon^{k+1}),\end{aligned}$$

ce qui établit (3.19) et achève la démonstration. \square

Définition 3.2.7. Soit $P(x; v_1, \dots, v_k) \subset \mathbb{R}^n$ un pavé orienté de dimension k . On définit le bord orienté de $P(x; v_1, \dots, v_k)$, noté $\partial P(x; v_1, \dots, v_k)$, comme la somme formelle dans le groupe libre engendré par les pavés orientés de dimension $k - 1$, définie par

$$\begin{aligned}\partial P(x; v_1, \dots, v_k) &= \\ & \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \left(P(x + v_i; v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k) - P(x; v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k) \right),\end{aligned}\quad (3.21)$$

où la notation \widehat{v}_i signifie que le vecteur v_i a été enlevé. Soit α une $(k - 1)$ -forme différentielle sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et supposons $P(x; v_1, \dots, v_k) \subset U$. On définit

$$\int_{\partial P(x; v_1, \dots, v_k)} \alpha = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \left(\int_{P(x+v_i; v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k)} \alpha - \int_{P(x; v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k)} \alpha \right).\quad (3.22)$$

Par convention, dans le cas d'un pavé orienté $P(x; v)$ de dimension 1 et d'une 0-forme $\alpha = f$, où f est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur U , la définition (3.22) doit s'interpréter comme suit

$$\int_{\partial P(x; v)} \alpha = f(x + v) - f(x).$$

Théorème 3.2.8. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit α une $(k-1)$ -forme différentielle sur U . Alors, $\forall x \in U$ et pour tout $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^k} \int_{\partial P(x; \varepsilon v_1, \dots, \varepsilon v_k)} \alpha = k \text{Alt } D\alpha_x(v_1)(v_2, \dots, v_k), \quad (3.23)$$

où $D\alpha_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \bigwedge^{k-1} (\mathbb{R}^n)^*$ est la différentielle en x de l'application \mathcal{C}^∞

$$\alpha : U \rightarrow \bigwedge^{k-1} (\mathbb{R}^n)^* : x \mapsto \alpha_x,$$

et $\text{Alt } D\alpha_x(v_1)(v_2, \dots, v_k)$ est défini comme en (3.10) avec $\eta(v_1, \dots, v_k) = D\alpha_x(v_1)(v_2, \dots, v_k)$. En particulier, si $k=1$, $\alpha = f$ est une 0-forme sur U et $P(x; v)$ est un pavé orienté de dimension 1, la formule se réduit à la formule bien connue

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (f(x + \varepsilon v) - f(x)) = Df_x(v).$$

Démonstration. Par la définition (3.22) de l'intégrale sur le bord d'un pavé, on a

$$\int_{\partial P(x; \varepsilon v_1, \dots, \varepsilon v_k)} \alpha = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \left(\int_{P(x + \varepsilon v_i; v_1, \dots, \widehat{\varepsilon v_i}, \dots, \varepsilon v_k)} \alpha - \int_{P(x; \varepsilon v_1, \dots, \widehat{\varepsilon v_i}, \dots, \varepsilon v_k)} \alpha \right).$$

En appliquant le Lemme 3.2.6, formule (3.19), à chaque terme du membre de droite, puisque α est une $(k-1)$ -forme différentielle, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\partial P(x; \varepsilon v_1, \dots, \varepsilon v_k)} \alpha \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \varepsilon^{k-1} \left(\alpha_{x + \varepsilon v_i}(v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_k) - \alpha_x(v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_k) \right) + \\ & \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \frac{\varepsilon^k}{2} \left(D\alpha_{x + \varepsilon v_i}(s_i)(v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_k) - D\alpha_x(s_i)(v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_k) \right) \\ &+ o(\varepsilon^k), \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \varepsilon^k D\alpha_x(v_i)(v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_k) + \\ & \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \frac{\varepsilon^k}{2} \left(D\alpha_{x + \varepsilon v_i}(s_i)(v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_k) - D\alpha_x(s_i)(v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_k) \right) \\ &+ o(\varepsilon^k), \end{aligned}$$

avec $s_i = v_1 + \dots + \widehat{v}_i + \dots + v_k$. De là, en utilisant la continuité de la différentielle, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^k} \int_{\partial P(x; \varepsilon v_1, \dots, \varepsilon v_k)} \alpha &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} D\alpha_x(v_i)(v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k) \\ &= k \text{Alt } D\alpha_x(v_1)(v_2, \dots, v_k), \end{aligned}$$

où le passage à la dernière égalité est obtenu en appliquant la formule (3.11) à l'application k -multilinéaire

$$\eta(v_1, \dots, v_k) = D\alpha_x(v_1)(v_2, \dots, v_k),$$

qui est alternée dans les $k - 1$ dernières variables puisque $D\alpha_x(v_1) \in \bigwedge^{k-1}(\mathbb{R}^n)^*$. Ceci établit (3.23) et termine la démonstration du théorème. \square

Définition 3.2.9. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit α une $(k - 1)$ -forme différentielle sur U . La k -forme différentielle sur U , notée $d\alpha$ et définie par

$$d\alpha_x(v_1, \dots, v_k) = k \text{Alt } D\alpha_x(v_1)(v_2, \dots, v_k), \quad \forall v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n, \quad (3.24)$$

s'appelle la différentielle extérieure de α .

Par linéarité de la différentielle, la différentielle extérieure $d : \Omega^{k-1}(U) \rightarrow \Omega^k(U)$ définie par (3.24) est linéaire, et s'étend à l'algèbre des formes différentielles sur U , $\Omega(U) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(U)$, par $d(\sum_{k=0}^n \alpha_k) = \sum_{k=0}^n d\alpha_k$ où $\alpha_k \in \Omega^k(U)$, $1 \leq k \leq n$.

Proposition 3.2.10. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit α une $(k - 1)$ -forme différentielle sur U exprimée sous la forme unique

$$\alpha_x = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_{k-1}}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}},$$

alors sa différentielle extérieure est donnée par

$$d\alpha_x = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n} D\alpha_{i_1 \dots i_{k-1}}(x) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}}. \quad (3.25)$$

Démonstration. Pour tout $x \in U$ et pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, on a

$$D\alpha_x(v) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n} (D\alpha_{i_1 \dots i_{k-1}})_x(v) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}},$$

et donc, en vertu de (3.11) et (3.24), on obtient

$$\begin{aligned}
d\alpha_x(v_1, \dots, v_k) &= k \text{Alt } D\alpha_x(v_1)(v_2, \dots, v_k), \\
&= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} D\alpha_x(v_i)(v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k), \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n} \left(\sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} (D\alpha_{i_1 \dots i_{k-1}})_x(v_i) \times \right. \\
&\quad \left. dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}}(v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k) \right), \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n} D\alpha_{i_1 \dots i_k}(x) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}}(v_1, \dots, v_k),
\end{aligned}$$

où la dernière égalité découle directement de la définition du produit extérieur sous la forme donnée en (3.2) avec $A = \{i\}$ et $B = \{1, \dots, i-1, \widehat{i}, i+1, \dots, k\}$. Ceci termine la démonstration de la proposition. \square

Proposition 3.2.11. *Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et soit $\Omega(U) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(U)$ l'algèbre des formes différentielles sur U . La différentielle extérieure possède les propriétés suivantes*

$$1) \text{ si } f \in \Omega^0(U), \text{ alors } df = Df \text{ est la différentielle habituelle,} \quad (3.26)$$

$$2) d \text{ est linéaire,} \quad (3.27)$$

$$3) d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta, \quad \forall \alpha \in \Omega^k(U), \forall \beta \in \Omega(U), \quad (3.28)$$

$$4) d \circ d = 0. \quad (3.29)$$

Démonstration. Les propriétés 1) et 2) sont évidentes. Pour vérifier 3), on peut se restreindre au cas où $\alpha = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ et $\beta = g dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}$ sont des monômes. En utilisant (3.25), on calcule

$$\begin{aligned}
d(\alpha \wedge \beta) &= D(fg) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l} \\
&= (gDf + fDg) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l} \\
&= (Df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) \wedge (g dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}) \\
&\quad + (-1)^k (f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) \wedge (Dg \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}) \\
&= d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta.
\end{aligned}$$

Pour vérifier 4) on observe d'abord que si $f \in \Omega^0(U)$ est une fonction \mathcal{C}^∞ sur U , on a

$$df = Df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j,$$

d'où

$$\begin{aligned} d(df) &= \sum_{j=1}^n D\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \wedge dx_j = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j = 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

De là, pour $\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \in \Omega^k(U)$, $k \geq 1$, en utilisant (3.25), (3.26), (3.27) et (3.28), on obtient

$$\begin{aligned} d(d\alpha) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d(d\alpha_{i_1 \dots i_k}) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &\quad - \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d\alpha_{i_1 \dots i_k} \wedge d(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = 0, \end{aligned}$$

puisque, en utilisant à nouveau (3.28) ainsi que (3.30), on a

$$d(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge d(dx_{i_j}) \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = 0.$$

□

Proposition 3.2.12. Soient $V \subset \mathbb{R}^m$ et $U \subset \mathbb{R}^n$ des ouverts et soit $\phi : V \rightarrow U$ une application \mathcal{C}^∞ . Alors, pour toute $(k-1)$ -forme α sur U on a

$$\phi^*(d\alpha) = d(\phi^*\alpha). \quad (3.31)$$

Démonstration. Montrons pour commencer que pour toute fonction \mathcal{C}^∞ sur U , on a $\phi^*(df) = d(\phi^*f)$. En effet, pour $x \in V$ et pour tout $v \in \mathbb{R}^m$, en utilisant la formule de dérivation des fonctions composées, on a

$$(\phi^*df)_x(v) = Df_{\phi(x)}(D\phi_x(v)) = D(f \circ \phi)_x(v) = d(\phi^*f)_x(v), \quad \forall x \in U, \forall v \in \mathbb{R}^m.$$

En particulier, si l'on note (x_1, \dots, x_n) les coordonnées dans U et $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$, on a

$$\phi^*(dx_i) = d(\phi^*x_i) = d\phi_i.$$

De là, si α est une k -forme différentielle sur U , $k \geq 1$,

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

en utilisant (3.8) et (3.25), on obtient

$$\begin{aligned} \phi^*(d\alpha) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \phi^*(d\alpha_{i_1 \dots i_k}) \wedge \phi^*(dx_{i_1}) \wedge \dots \wedge \phi^*(dx_{i_k}) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d(\phi^*\alpha_{i_1 \dots i_k}) \wedge d\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{i_k}. \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant (3.14), (3.27) et (3.28), on a

$$\begin{aligned}
d(\phi^* \alpha) &= d\left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \phi^*(\alpha_{i_1 \dots i_k}) d\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{i_k} \right) \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d(\phi^* \alpha_{i_1 \dots i_k}) \wedge d\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{i_k} + \\
&\quad \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \phi^*(\alpha_{i_1 \dots i_k}) d(d\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{i_k}) \\
&= \phi^*(d\alpha),
\end{aligned}$$

puisque, en utilisant à nouveau (3.28) et (3.29), on a

$$d(d\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{i_k}) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} d\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d(d\phi_{i_j}) \wedge \dots \wedge d\phi_{i_k} = 0.$$

Ceci achève la démonstration de la proposition. \square

Nous pouvons maintenant établir le résultat suivant, analogue multidimensionnel du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral.

Théorème 3.2.13. (*Formule de Stokes-Cartan pour un pavé orienté*). Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, soit α une $(k-1)$ -forme différentielle sur U et soit $P(x; v_1, \dots, v_k)$ un pavé orienté dans U . Alors

$$\int_{P(x; v_1, \dots, v_k)} d\alpha = \int_{\partial P(x; v_1, \dots, v_k)} \alpha. \quad (3.32)$$

Démonstration. Puisque, par la définition de l'intégrale d'une forme sur un pavé donnée en (3.17), (3.18), ainsi que celle sur le bord d'un pavé donnée en (3.22), en utilisant (3.31), on a

$$\int_{P(x; v_1, \dots, v_k)} d\alpha = \int_{[0,1]^k} \phi^*(d\alpha) = \int_{[0,1]^k} d\phi^*(\alpha),$$

et

$$\int_{\partial P(x; v_1, \dots, v_k)} \alpha = \int_{\partial[0,1]^k} \phi^*(\alpha),$$

avec ϕ défini comme en (3.16), il suffit de vérifier le théorème pour une $(k-1)$ -forme différentielle

$$\alpha = \sum_{i=1}^k f_i(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots \wedge \widehat{dt}_i \wedge \dots \wedge dt_k,$$

définie sur un voisinage ouvert du cube $[0, 1]^k$. Dans ce cas, en utilisant (3.25), on a

$$\begin{aligned} d\alpha &= \sum_{i=1}^k Df_i(t_1, \dots, t_k) \wedge dt_1 \dots \wedge \widehat{dt_i} \wedge \dots \wedge dt_k \\ &= \left(\sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial t_i}(t_1, \dots, t_k) \right) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k, \end{aligned}$$

et donc, en utilisant le théorème de Fubini et en particulierisant la définition donnée en (3.21) et (3.22) au bord orienté du cube $[0, 1]^k$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^k} d\alpha &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{k \text{ fois}} \frac{\partial f_i}{\partial t_i}(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k, \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{(k-1) \text{ fois}} \left(f_i(t_1, \dots, t_{i-1}, 1, t_{i+1}, \dots, t_k) \right. \\ &\quad \left. - f_i(t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_k) \right) dt_1 \dots dt_{i-1} \widehat{dt_i} dt_{i+1} \dots dt_k, \\ &= \int_{\partial[0,1]^k} \alpha, \end{aligned}$$

où, comme précédemment, le "chapeau" signifie que l'on omet l'expression sous le chapeau. Ceci établit (3.32) et achève la démonstration du théorème. \square

On peut étendre la définition de la différentielle extérieure aux formes différentielles définies sur une variété.

Définition 3.2.14. Soit M une variété de classe \mathcal{C}^∞ et soit \mathcal{A} un atlas définissant sa structure de variété. Pour ω une $(k-1)$ -forme différentielle sur M , on définit sa différentielle extérieure, notée $d\omega$, comme étant l'unique k -forme différentielle sur M telle que

$$d\omega|_U = \varphi^*(d\alpha),$$

pour toute carte $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, où α est l'expression locale de ω dans cette carte, c'est-à-dire

$$\omega|_U = \varphi^*(\alpha).$$

La définition précédente fait sens en vertu de la Proposition 3.2.12. En effet si α et β dénotent les expressions locales de ω dans deux cartes (U, φ) et (V, ψ) , on a

$$\beta|_{\psi(U \cap V)} = (\varphi \circ \psi^{-1})^*(\alpha|_{\varphi(U \cap V)}),$$

et donc, en utilisant (3.13) et (3.31), on obtient

$$\begin{aligned}\psi^*(d\beta)|_{U \cap V} &= \psi^*(d(\varphi \circ \psi^{-1})^*(\alpha|_{\varphi(U \cap V)})) = \psi^*((\varphi \circ \psi^{-1})^*(d\alpha|_{\varphi(U \cap V)})) = \\ &= \psi^* \circ (\psi^{-1})^* \circ \varphi^*(d\alpha|_{\varphi(U \cap V)}) = \varphi^*(d\alpha)|_{U \cap V}.\end{aligned}$$

Il est immédiat de vérifier que les propriétés (3.26), (3.27), (3.28) et (3.29) de la différentielle extérieure sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, énoncées dans la Proposition 3.2.11, restent valides pour l'algèbre $\Omega(M)$ des formes différentielles sur une variété. La formule intrinsèque suivante pour la différentielle extérieure est très souvent utilisée.

Théorème 3.2.15. *Soit ω une $(k-1)$ -forme différentielle sur une variété M . Alors, quels que soient X_1, \dots, X_k champs de vecteurs sur M , on a*

$$\begin{aligned}d\omega(X_1, \dots, X_k) &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} X_i \omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k) \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k),\end{aligned}\quad (3.33)$$

où le "chapeau" signifie que la quantité sous celui-ci est omise, $X_i \omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k)$ est la dérivée de Lie de la fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur M , $p \in M \mapsto \omega_p((X_1)_p, \dots, (\widehat{X}_i)_p, \dots, (X_k)_p)$, et $[X_i, X_j]$ est le crochet de Lie des champs de vecteurs X_i et X_j .

Démonstration. Nous donnons la preuve pour une 1-forme différentielle ω et laissons le cas général au lecteur en exercice. Dans ce cas, en posant $X_1 = X$, $X_2 = Y$, la formule (3.33) devient

$$d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]).\quad (3.34)$$

Il suffit de vérifier la formule dans le domaine d'une carte locale, et puisque les deux membres sont linéaires en ω , pour $\omega = gdf$ où f, g sont des fonctions \mathcal{C}^∞ . En utilisant (3.6), le membre de gauche donne

$$d\omega(X, Y) = dg \wedge df(X, Y) = X(g)Y(f) - Y(g)X(f).$$

En utilisant la définition du crochet de Lie des champs de vecteurs (2.21), le membre de droite donne

$$\begin{aligned}X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]) &= X(gY(f)) - Y(gX(f)) - g[X, Y](f) \\ &= X(g)Y(f) + gX(Y(f)) - Y(g)X(f) - gY(X(f)) - gX(Y(f)) + gY(X(f)) \\ &= X(g)Y(f) - Y(g)X(f),\end{aligned}$$

ce qui établit le résultat et achève la démonstration. \square

Les formes différentielles jouent un rôle central dans la compréhension de la topologie des variétés différentielles, comme nous l'illustrerons au chapitre suivant sur le célèbre théorème de Gauss-Bonnet. La notion cruciale est formulée dans la définition suivante.

Définition 3.2.16. Soit $\omega \in \Omega^k(M)$. On dit que

- 1) ω est fermée si $d\omega = 0$,
- 2) ω est exacte si $\omega = d\eta, \eta \in \Omega^{k-1}(M)$.

Par convention, on pose $\Omega^{-1}(M) = 0$.

Puisque $d \circ d = 0$, toute forme exacte est une forme fermée, mais l'inverse n'est en général pas vrai. Le défaut d'exactitude des formes fermées est mesuré par les quotients introduits dans la définition suivante.

Définition 3.2.17. Soit M une variété lisse de dimension n . Les espaces vectoriels (réels)

$$H_{DR}^k(M) = \frac{\text{Ker } d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)}{\text{Im } d : \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (3.35)$$

s'appellent les espaces de cohomologie de **de Rham**.

Un théorème fondamental de **de Rham** affirme que ces espaces sont isomorphes aux espaces de cohomologie $H^k(M, \mathbb{R})$, à coefficients réels, que l'on définit en topologie algébrique. Ce théorème permet souvent de calculer de façon efficace la cohomologie des variétés.

3.3 Intégration sur les variétés orientables

3.3.1 Variétés orientables

On peut orienter naturellement l'espace tangent $T_p M$ en un point p d'une variété M , en choisissant une carte locale (U, φ) en p , au moyen de la base $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, 1 \leq i \leq n$, où (x_1, \dots, x_n) sont les coordonnées locales. Si l'on choisit (V, ψ) une autre carte locale en p , et que l'on note les coordonnées locales par (y_1, \dots, y_n) , on a :

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\right) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_p\right) \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(\varphi(p))\right)_{1 \leq i, j \leq n},$$

et les deux bases définiront la même orientation si et seulement si le jacobien du changement de carte est positif. Ceci conduit naturellement à la définition suivante.

Définition 3.3.1. Une variété M est dite orientable si et seulement si elle possède un atlas, tel que pour toutes cartes locales $(U, \varphi), (V, \psi)$ telles que $U \cap V \neq \emptyset$:

$$\det(D(\psi \circ \varphi^{-1})_x) > 0, \quad \forall x \in \varphi(U \cap V).$$

Proposition 3.3.2. *Si M est une variété orientable et connexe, alors M possède deux orientations.*

Démonstration. Soient $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ et $\mathcal{B} = \{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ deux atlas orientés. Pour tout point $p \in M$, il existe $i \in I$ et $\alpha \in A$ tels que $p \in U_i \cap V_\alpha$. Définissons l'application s (comme signe !)

$$s(p) = \text{sign det}(D(\psi_\alpha \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(p)}).$$

Ce signe est bien défini car si $p \in U_i \cap V_\alpha \cap U_j \cap V_\beta$ on a

$$\begin{aligned} \psi_\beta \circ \varphi_j^{-1} &= (\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}) \circ (\psi_\alpha \circ \varphi_i^{-1}) \circ (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}) \Rightarrow \\ D(\psi_\beta \circ \varphi_j^{-1})_{\varphi_j(p)} &= D(\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1})_{\psi_\alpha(p)} D(\psi_\alpha \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(p)} D(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})_{\varphi_j(p)}, \end{aligned}$$

et, par hypothèse, $\det(D(\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1})_{\psi_\alpha(p)}) > 0$ et $\det(D(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})_{\varphi_j(p)}) > 0$. L'application $s : M \rightarrow \{-1, 1\}$ est localement constante, donc continue sur M . Puisque M est connexe, nécessairement $s(p) = 1$ ou $s(p) = -1, \forall p \in M$, ce qui établit le résultat. \square

Définition 3.3.3. *Soit M une variété de dimension n . Une n -forme différentielle ω sur M s'appelle une forme volume si et seulement si $\omega_p \neq 0, \forall p \in M$. Il revient au même de dire que $\omega_p(\xi_1, \dots, \xi_n) \neq 0$, pour tout $p \in M$ et pour toute base (ξ_1, \dots, ξ_n) de $T_p M$.*

Exemple 3.3.4. Soit la sphère S^n plongée dans \mathbb{R}^{n+1} . On considère la n -forme différentielle sur \mathbb{R}^{n+1}

$$\omega_x = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} x_i dx_1 \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_{n+1}, \quad (3.36)$$

La restriction de cette forme à S^n est une forme volume. En effet, on vérifie facilement que pour tout $x \in S^n$, quels que soient $\xi_1, \dots, \xi_n \in T_x S^n$, linéairement indépendants, on a

$$\omega_x(\xi_1, \dots, \xi_n) = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n+1}(x, \xi_1, \dots, \xi_n) \neq 0,$$

puisque, les vecteurs x, ξ_1, \dots, ξ_n forment une base de \mathbb{R}^{n+1} , x étant orthogonal au plan (tangent à la sphère) engendré par (ξ_1, \dots, ξ_n) .

Lemme 3.3.5. *Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert fini d'une variété compacte M . Il existe alors un recouvrement ouvert $(V_i)_{i \in I}$ tel que $\overline{V_i} \subset U_i$, pour tout $i \in I$.*

Démonstration. Pour tout $p \in M$, il existe un ouvert W_p contenant p et un indice $i(p) \in I$ tels que

$$\overline{W_p} \subset U_{i(p)}.$$

(Dans une variété comme dans \mathbb{R}^n , tout point admet un système fondamental de voisinages fermés). Alors, les $(W_p)_{p \in M}$ forment un recouvrement ouvert de M , dont on peut extraire un sous-recouvrement fini $(W_{p_k})_{1 \leq k \leq m}$. Les ouverts

$$V_i = \cup_{\{k | i(p_k) = i\}} W_{p_k},$$

vérifient

$$\overline{V_i} = \cup_{\{k | i(p_k) = i\}} \overline{W_{p_k}} \subset U_i,$$

ce qui établit le résultat. \square

Théorème 3.3.6. *Une variété compacte est orientable si et seulement si elle admet une forme volume.*

Démonstration. Supposons que M soit orientable. Soit $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ un atlas orienté fini de M . D'après les Lemmes 3.3.5 et 2.4.3, il existe un recouvrement ouvert $(V_i)_{i \in I}$ de M tel que $\overline{V_i} \subset U_i$, et il existe des fonctions plateau $h_i : M \rightarrow [0, 1]$ telles que $h_i|_{V_i} = 1$ et $\text{supp}(h_i) \subset U_i$. Pour chaque i , on définit les formes $\alpha_i \in \Omega^n(U_i)$ par $\alpha_i = \varphi_i^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)$, où (x_1, \dots, x_n) désignent les coordonnées locales dans la carte (U_i, φ_i) . On en déduit une n -forme ω_i sur M , donnée par

$$\omega_i(p) = \begin{cases} h_i(p)\alpha_i(p), & \text{si } p \in U_i \\ 0, & \text{si } p \notin U_i, \end{cases}$$

Alors

$$\omega = \sum_{i \in I} \omega_i,$$

est une forme volume. En effet, tout point $p \in M$ appartient à un V_j au moins et, sur $\varphi_j(V_j)$, la forme

$$(\varphi_j^{-1})^* \omega|_{V_j} = \left(1 + \sum_{i \neq j} h_i(\varphi_j^{-1}(x)) \det(D(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})_x) \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

est partout non nulle, puisque $\det(D(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})_x) > 0$.

Inversément supposons qu'il existe une forme volume ω sur M . Soit $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ un atlas de M . On peut toujours supposer que $\varphi_i(U_i)$ est connexe pour tout $i \in I$. Par hypothèse, l'expression locale de ω dans la carte U_i

$$(\varphi_i^{-1})^* \omega|_{U_i} = f_i(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

est telle que $f_i(x) \neq 0, \forall x \in \varphi_i(U_i)$. Puisque $\varphi_i(U_i)$ est connexe, $f_i(x) > 0$ ou $f_i(x) < 0, \forall x \in \varphi_i(U_i)$. Quitte à permuter deux coordonnées, on peut toujours supposer que $f_i(x) > 0$. L'atlas ainsi obtenu est un atlas orienté. En effet

$$\begin{aligned} (\varphi_i^{-1})^* \omega|_{U_i \cap U_j} &= (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})^* \circ (\varphi_j^{-1})^* \omega|_{U_i \cap U_j} \\ &= f_j(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x)) \det(D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})_x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, \end{aligned}$$

et donc

$$\det(D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})_x) = \frac{f_i(x)}{f_j(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x))} > 0, \quad \forall x \in \varphi_i(U_i \cap U_j),$$

ce qui établit le résultat. \square

Remarque 3.3.7. Le Théorème 3.3.6 reste vrai si M n'est pas compacte. La construction de la forme volume à partir d'un atlas orienté est plus compliquée. Le lecteur aura remarqué que la construction d'un atlas orienté à partir d'une forme volume n'a pas utilisé la compacité.

Proposition 3.3.8. 1) Soit $\phi : M \rightarrow N$ un difféomorphisme local entre deux variétés. Alors, si ω est une forme volume sur N , $\phi^*\omega$ est une forme volume sur M .

2) Si ω est une forme volume sur une variété M de dimension n , alors toute n -forme α sur M peut s'écrire de façon unique sous la forme $\alpha = f\omega$, où $f \in C^\infty(M)$.

Démonstration. 1) Soit $p \in M$ et ξ_1, \dots, ξ_n une base de T_pM . Puisque ϕ est un difféomorphisme local, $d\phi_p(\xi_1), \dots, d\phi_p(\xi_n)$ est une base de $T_{\phi(p)}N$, et donc, par (3.12), on a

$$(\phi^*\omega)_p(\xi_1, \dots, \xi_n) = \omega_{\phi(p)}(d\phi_p(\xi_1), \dots, d\phi_p(\xi_n)) \neq 0,$$

puisque ω est une forme volume sur N .

2) Soit $\alpha \in \Omega^n(M)$. Soit $p \in M$ et ξ_1, \dots, ξ_n une base de T_pM . On peut écrire

$$\alpha_p(\xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{\alpha_p(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\omega_p(\xi_1, \dots, \xi_n)} \omega_p(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Si l'on fait un changement de base $(\eta_1, \dots, \eta_n) = (\xi_1, \dots, \xi_n)A$, $\det A \neq 0$, on a

$$\frac{\alpha_p(\eta_1, \dots, \eta_n)}{\omega_p(\eta_1, \dots, \eta_n)} = \frac{\det A \alpha_p(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\det A \omega_p(\xi_1, \dots, \xi_n)}.$$

On peut donc définir une fonction $f \in C^\infty(M)$ par $f(p) = \frac{\alpha_p(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\omega_p(\xi_1, \dots, \xi_n)}$, et l'on a $\alpha_p = f(p)\omega_p, \forall p \in M$. Le résultat est donc établi. \square

Théorème 3.3.9. L'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est orientable si et seulement si n est impair.

Démonstration. On considère $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ comme le quotient de S^n par le groupe $\{Id, \sigma\}$, où $\sigma(x) = -x$. On note $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la projection correspondante. Si $\alpha \in \Omega^n(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ est une forme volume, alors, en vertu de la Proposition 3.3.8 1), $\pi^*\alpha$ est une forme volume sur S^n . Donc, par la Proposition 3.3.8 2),

$$\pi^*\alpha = f\omega,$$

avec $f \in \mathcal{C}^\infty(S^n)$ qui ne s'annule nulle part, et ω la forme volume sur la sphère définie en (3.36). Puisque $\pi \circ \sigma = \pi$, et $\sigma^*(\omega) = (-1)^{n+1}\omega$, on a

$$\pi^*\alpha = \sigma^*(\pi^*\alpha) = \sigma^*(f\omega) = (-1)^{n+1}(f \circ \sigma)\omega,$$

et donc, si n est pair, on en déduit que

$$f(x) = -f(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Or, puisque f ne s'annule pas et que S^n est connexe, on doit avoir $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0, \forall x \in S^n$. On a donc obtenu une contradiction, ce qui prouve que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ n'est pas orientable si n est pair.

Supposons maintenant que n soit impair. Puisque $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est un difféomorphisme local, la différentielle $d\pi_x : T_x S^n \rightarrow T_{\pi(x)} \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est un isomorphisme. Soient $\eta_1 = d\pi_x(\xi_1), \dots, \eta_n = d\pi_x(\xi_n) \in T_{\pi(x)} \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, et soit ω la forme volume sur S^n définie en (3.36), on définit

$$(\pi_*\omega)_{\pi(x)}(\eta_1, \dots, \eta_n) = \omega_x(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

La définition n'est pas ambiguë. En effet, si $\pi(x) = \pi(x'), x' \neq x$, nécessairement $x' = \sigma(x) = -x$ et, puisque $\pi = \pi \circ \sigma$, on a

$$\eta_i = d\pi_x(\xi_i) = d\pi_{\sigma(x)}(d\sigma_x(\xi_i)) = d\pi_{-x}(-\xi_i),$$

et donc, puisque $\sigma^*\omega = (-1)^{n+1}\omega = \omega$, on en déduit que

$$\omega_{-x}(-\xi_1, \dots, -\xi_n) = (\sigma^*\omega)_x(\xi_1, \dots, \xi_n) = \omega_x(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Donc $\pi_*\omega$ est une n -forme bien définie sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, et puisque ω est une forme volume sur S^n , elle définit une forme volume sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, qui est donc orientable, si n est impair. Ceci achève la démonstration. \square

3.3.2 Le théorème de Stokes-Cartan

Définition 3.3.10. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert d'une variété M . Une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement, est la donnée d'une famille $(f_i)_{i \in I}$ de fonctions \mathcal{C}^∞ sur M telle que

- 1) $0 \leq f_i \leq 1$,
- 2) $\text{supp}(f_i) \subset U_i$,
- 3) $\sum_{i \in I} f_i = 1$.

Proposition 3.3.11. Pour tout recouvrement ouvert fini d'une variété compacte M , il existe une partition de l'unité subordonnée.

Démonstration. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert fini de M . Par le Lemme 3.3.5, il existe un recouvrement ouvert $(V_i)_{i \in I}$ de M tel que $\overline{V_i} \subset U_i$. Soit $h_i : M \rightarrow [0, 1]$ une fonction \mathcal{C}^∞ telle que $(h_i)|_{V_i} = 1$ et $\text{supp}(h_i) \subset U_i$. Les fonctions

$$f_i = \frac{h_i}{\sum_{i \in I} h_i},$$

satisfont à toutes les propriétés demandées. \square

Définition 3.3.12. Le support d'une forme différentielle α sur une variété M est l'ensemble

$$\text{supp}(\alpha) = \overline{\{p \in M : \alpha_p \neq 0\}}.$$

Définition 3.3.13. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et soit $\alpha = f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ une n -forme différentielle sur U . Si $K \subset U$ est compact, on définit

$$\int_K \alpha = \int_K f(x)dx_1 \dots dx_n.$$

Proposition 3.3.14. Soit $\phi : U \rightarrow V$ un difféomorphisme entre deux ouverts de \mathbb{R}^n qui préserve l'orientation. Alors pour toute n -forme différentielle α sur V , et pour tout compact $K \subset V$, on a

$$\int_{\phi^{-1}(K)} \phi^* \alpha = \int_K \alpha. \quad (3.37)$$

Démonstration. Par la formule du changement de variables dans les intégrales multiples, puisque le jacobien $Jac(\phi)(x) = \det(D\phi_x) > 0, \forall x \in U$, on a si $\alpha = f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$,

$$\begin{aligned} \int_{\phi^{-1}(K)} \phi^* \alpha &= \int_{\phi^{-1}(K)} f(\phi(x)) Jac(\phi)(x) dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_K f(x) dx_1 \dots dx_n = \int_K \alpha. \end{aligned}$$

□

Soit M est une variété compacte orientable de dimension n . Soit K un compact de M contenu dans le domaine d'une carte locale (U, φ) compatible avec l'orientation de M . Soit $\alpha \in \Omega^n(M)$. On définit

$$\int_K \alpha = \int_{\varphi(K)} (\varphi^{-1})^* \alpha|_U.$$

Le résultat ne dépend pas du choix de la carte locale. En effet, si $K \subset U \cap V$, avec (V, ψ) une autre carte compatible avec l'orientation, en vertu de la formule (3.37), on a

$$\int_{\psi(K)} (\psi^{-1})^* \alpha|_V = \int_{\varphi(K)} (\psi \circ \varphi^{-1})^* \circ (\varphi^{-1})^* \alpha|_{U \cap V} = \int_{\varphi(K)} (\varphi^{-1})^* \alpha|_U. \quad (3.38)$$

Dans le cas général, on note $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ un atlas fini orienté de M , et $(f_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i \in I}$. Soit $\alpha \in \Omega^n(M)$. Si K est un compact de M , on définit

$$\int_K \alpha = \sum_{i \in I} \int_{K_i} f_i \alpha, \quad \text{avec } K_i = K \cap \text{supp}(f_i). \quad (3.39)$$

Dans le cas particulier où $K = M$, cette formule devient

$$\int_M \alpha = \sum_{i \in I} \int_{\text{supp}(f_i)} f_i \alpha = \sum_{i \in I} \int_{\varphi_i(\text{supp}(f_i))} (\varphi_i^{-1})^* f_i \alpha = \sum_{i \in I} \int_{\varphi_i(U_i)} (\varphi_i^{-1})^* f_i \alpha.$$

Vérifions que le résultat obtenu ne dépend ni de l'atlas, ni de la partition de l'unité choisis. Soit $\mathcal{B} = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ un autre atlas fini de M définissant la même orientation et soit $(g_j)_{j \in J}$ une partition de l'unité subordonnée. Posons $K'_j = K \cap \text{supp}(g_j)$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \int_{K_i} f_i \alpha &= \sum_{i \in I} \int_{K_i} f_i \left(\sum_{j \in J} g_j \alpha \right) = \sum_{i \in I, j \in J} \int_{K_i \cap K'_j} f_i g_j \alpha \\ &= \sum_{j \in J} \int_{K'_j} \sum_{i \in I} f_i g_j \alpha = \sum_{j \in J} \int_{K'_j} g_j \alpha, \end{aligned}$$

le point étant que $\int_{K_i \cap K'_j} f_i g_j \alpha$ peut se calculer indifféremment dans les coordonnées locales de la carte U_i ou V_j , en vertu de (3.38).

Définition 3.3.15. *Un fermé $D \subset M$ d'une variété M de dimension n , est un domaine régulier s'il est égal à l'adhérence de son intérieur et si la frontière (au sens topologique), $\partial D = D \setminus \overset{\circ}{D}$, est soit vide, soit une sous-variété de M de dimension $n - 1$.*

Proposition 3.3.16. *Soit D un domaine régulier d'une variété M de dimension n . Pour tout $p \in \partial D$, il existe une carte locale (U, φ) en p , telle que*

$$\varphi(D \cap U) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \varphi(U) : x_n \geq 0\}. \quad (3.40)$$

Démonstration. Puisque ∂D est une sous-variété de dimension $n - 1$ de M , par définition, en tout point $p \in \partial D$, on peut trouver une carte locale (U, φ) linéarisante, c.à.d.

$$\varphi(\partial D \cap U) = \varphi(U) \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}. \quad (3.41)$$

On peut toujours supposer que $\varphi(U)$ est une boule ouverte de \mathbb{R}^n . Puisque $\overline{\overset{\circ}{D}} = D$, $U \cap \overset{\circ}{D} \neq \emptyset$. Comme $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ est un homéomorphisme, en utilisant (3.41), on montre facilement que $\varphi(\overset{\circ}{D} \cap U)$ est à la fois ouvert et fermé dans $\varphi(U) \cap \{x_n \neq 0\}$. Comme $\varphi(\overset{\circ}{D} \cap U) \subsetneq \varphi(U) \cap \{x_n \neq 0\}$, nécessairement cet ensemble coïncide avec une des deux composantes connexes de $\varphi(U) \cap \{x_n \neq 0\}$, i.e.

$$\varphi(\overset{\circ}{D} \cap U) = \varphi(U) \cap \{x_n > 0\} \quad \text{ou} \quad \varphi(\overset{\circ}{D} \cap U) = \varphi(U) \cap \{x_n < 0\}.$$

Quitte à modifier φ en changeant $x_n \rightarrow -x_n$, on peut supposer que

$$\varphi(\overset{\circ}{D} \cap U) = \varphi(U) \cap \{x_n > 0\} \Rightarrow \varphi(D \cap U) = \{x \in \varphi(U) : x_n \geq 0\},$$

ce que nous souhaitons établir. \square

Proposition 3.3.17. *Si M est une variété orientée, alors le bord d'un domaine régulier $D \subset M$ est une variété orientable.*

Démonstration. Soit \mathcal{A} un atlas orienté de M . En vertu de la Proposition 3.3.16 et de la Proposition 3.3.2, en tout point $p \in \partial D$, on peut trouver une carte locale (U, φ) compatible avec l'orientation de M , dont le domaine est connexe et qui satisfait (3.40). Soit (V, ψ) une autre telle carte locale, telle que $U \cap V \neq \emptyset$. Le changement de cartes

$$\phi = \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V),$$

a un jacobien $Jac(\phi)(x) > 0, \forall x \in \varphi(U \cap V)$. En un point $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in \varphi(U \cap V \cap \partial D)$, puisque $\phi_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = 0$, la matrice de la différentielle du changement de cartes est de la forme

$$D\phi(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_{n-1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial \phi_{n-1}}{\partial x_n} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

et donc

$$J(\phi)(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \times \det \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \right)_{1 \leq i, j \leq n-1}.$$

Puisque

$$\phi_n(x_1, \dots, x_{n-1}, t) > 0, \quad \text{pour } t > 0 \text{ suffisamment petit,}$$

comme $J(\phi)(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \neq 0$, nécessairement $\frac{\partial \phi_n}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) > 0$, et comme $J(\phi)(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) > 0$, on en déduit que

$$\det \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \right)_{1 \leq i, j \leq n-1} > 0, \quad \forall (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in \varphi(U \cap V \cap \partial D),$$

i.e. les cartes de ∂D définies ci-dessus, sont telles que les jacobiens des changements de cartes sont tous positifs, ce qui prouve que ∂D est orientable. Ceci achève la démonstration. \square

Définition 3.3.18. Convention pour l'orientation du bord. *Si M est une variété orientée et D un domaine régulier de M , l'orientation du bord ∂D est choisie comme suit en termes de repères. Pour $p \in \partial D$, soit $n_p \in T_p M$ un vecteur non tangent à ∂D . On dit que n_p est sortant, si pour toute courbe $c(t)$ telle que $c(0) = p$ et $c'(0) = n_p$, $c(t) \notin D$ pour $t > 0$ suffisamment petit. Alors un repère ξ_1, \dots, ξ_{n-1} de $T_p \partial D$ est direct si et seulement si le repère $n_p, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ de $T_p M$ est direct. Dans un système de coordonnées locales comme en (3.40), l'orientation du bord ∂D est donc donnée sur $U \cap \partial D$ par la forme $(-1)^n \varphi^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1})$.*

Théorème 3.3.19. (Théorème de Stokes-Cartan). *Soit D un domaine régulier d'une variété orientée compacte M de dimension n , ∂D son bord orienté, et soit $\alpha \in \Omega^{n-1}(M)$. Alors*

$$\int_{\partial D} \alpha|_{\partial D} = \int_D d\alpha. \quad (3.42)$$

Si $\partial D = \emptyset$: $\int_D d\alpha = 0$.

Démonstration. Tout d'abord, on peut recouvrir M par un nombre fini de domaines de cartes locales (U_i, φ_i) , telles que si $U_i \cap \partial D \neq \emptyset$, alors

$$\varphi_i(U_i \cap D) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \varphi_i(U_i) : x_n \geq 0\},$$

l'orientation de ∂D étant donnée sur $U_i \cap \partial D$ par $(-1)^n \varphi_i^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1})$. Si f_i est une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement, on a $\alpha = \sum_{i \in I} \alpha_i$, $\alpha_i = f_i \alpha$, et il suffit de démontrer le théorème pour les α_i , c.à.d. pour des formes à support dans un ouvert U_i . Soit donc α une $(n-1)$ -forme telle que $\text{supp}(\alpha) \subset U_i$. Trois cas sont à distinguer :

Cas 1. Si $U_i \subset M \setminus D = D^c$, alors α s'annule sur ∂D , et $d\alpha$ s'annule sur D . Le résultat est évident.

Cas 2. Si $U_i \subset \overset{\circ}{D} = D \setminus \partial D$, alors α s'annule sur le bord de D , et

$$\int_D d\alpha = \int_{\varphi_i(U_i)} (\varphi_i^{-1})^* d\alpha = \int_{\varphi_i(U_i)} d(\varphi_i^{-1})^* \alpha = \int_{\mathbb{R}^n} d(\varphi_i^{-1})^* \alpha,$$

où, dans la dernière égalité, il est sous-entendu que $(\varphi_i^{-1})^* \alpha$ est prolongée par 0 en-dehors de $\varphi_i(U_i)$, ce qui peut se faire puisque $\text{supp}((\varphi_i^{-1})^* \alpha) \subset \varphi_i(U_i)$. La forme $(\varphi_i^{-1})^* \alpha$ s'écrit

$$(\varphi_i^{-1})^* \alpha = \sum_{k=1}^n a_k(x) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \dots \wedge dx_n, \quad (3.43)$$

avec $a_k(x)$ des fonctions C^∞ sur \mathbb{R}^n , à supports compacts. Comme

$$d(\varphi_i^{-1})^* \alpha = \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\partial a_k}{\partial x_k}(x) \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} d(\varphi_i^{-1})^* \alpha = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial a_k}{\partial x_k}(x) dx_1 \dots dx_n.$$

D'après le théorème de Fubini, le k -ième terme s'écrit

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial a_k}{\partial x_k}(x) dx_k \right) dx_1 \dots \widehat{dx_k} \dots dx_n = 0,$$

puisque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial a_k}{\partial x_k}(x) dx_k = 0,$$

étant donné que a_k est à support compact. Ceci montre que $\int_D d\alpha = 0$, et prouve le résultat dans ce cas.

Cas 3. Reste à examiner le cas où $U_i \cap \partial D \neq \emptyset$. Dans ce cas

$$\int_D d\alpha = \int_{\varphi_i(U_i \cap D)} d(\varphi_i^{-1})^* \alpha.$$

Avec les notations du Cas 2), cette intégrale s'écrit

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial a_k}{\partial x_k}(x) dx_1 \dots dx_n,$$

où $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$. En appliquant à nouveau le théorème de Fubini et en utilisant que les a_k sont à supports compacts, on trouve que tous les termes dans la somme précédente s'annulent, sauf le dernier qui donne

$$\begin{aligned} \int_D d\alpha &= (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^\infty \frac{\partial a_n}{\partial x_n}(x) dx_n \right) dx_1 \dots dx_{n-1} \\ &= (-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} a_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \dots dx_{n-1}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Comme, par convention (voir Définition 3.3.18), l'orientation induite sur le bord est définie en coordonnées locales par la forme $(-1)^n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$ on obtient, à partir de (3.43), que

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \alpha|_D &= \int_{\varphi_i(U_i \cap \partial D)} (\varphi_i^{-1})^* \alpha|_{\varphi_i(U_i) \cap \{x_n=0\}} \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (a_k(x) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \dots \wedge dx_n)|_{\{x_n=0\}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} a_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} \\ &= (-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} a_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \dots dx_{n-1}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Comparant (3.44) avec (3.45), on a donc établi le résultat. La démonstration est complète. \square

Un des intérêts de la formule de Stokes-Cartan est de présenter dans un cadre unifié un certain nombre de formules intégrales en dimension 2 et 3.

1) **Formule de Green-Riemann.** Si D est un domaine régulier du plan, et $\alpha = P_1 dx_1 + P_2 dx_2$ est une 1-forme différentielle, la formule de Stokes-Cartan donne

$$\int_{\partial D} P_1 dx_1 + P_2 dx_2 = \int_D \left(\frac{\partial P_2}{\partial x_1} - \frac{\partial P_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2,$$

appelée formule de Green-Riemann.

La 2-forme élément d'aire sur une sous-variété M de dimension 2 de \mathbb{R}^3 est définie par

$$\sigma_x(\xi_1, \xi_2) = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3(\nu_x, \xi_1, \xi_2), \quad \forall x \in M, \forall \xi_1, \xi_2 \in T_x M, \quad (3.46)$$

où ν_x dénote un choix consistant de normale unitaire à M en x , c.à.d. un choix de sorte que l'application $M \rightarrow S^2 : x \mapsto \nu_x$ soit C^∞ (et donc continue).

2) **Formule d'Ostrogradski.** Soit V un domaine régulier (un volume) de \mathbb{R}^3 et $X = P_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + P_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$ un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^3 . On associe à X la 2-forme différentielle

$$\omega = P_1 dx_2 \wedge dx_3 + P_2 dx_3 \wedge dx_1 + P_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

On a

$$d\omega = (\operatorname{div} X) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, \quad \text{avec } \operatorname{div} X = \frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \frac{\partial P_2}{\partial x_2} + \frac{\partial P_3}{\partial x_3},$$

et donc, par la formule de Stokes-Cartan, on a

$$\int_V (\operatorname{div} X) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \int_{\partial V} P_1 dx_2 \wedge dx_3 + P_2 dx_3 \wedge dx_1 + P_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

Le membre de droite représente le flux du champ de vecteurs X à travers la surface $S = \partial V$, bord orienté de V . Pour le vérifier, on introduit le champ normal unitaire sortant ν , et la forme élément d'aire σ définie en (3.46). En remarquant que

$$X = \langle X, \nu \rangle \nu + Y,$$

avec Y tangent à S ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire habituel sur \mathbb{R}^3), on vérifie que

$$\omega|_S = \langle X, \nu \rangle \sigma,$$

et donc

$$\int_V (\operatorname{div} X) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \int_{\partial V} \langle X, \nu \rangle \sigma.$$

Appliqué au champ électrique, c'est le théorème de Gauss "charge totale contenue dans V = flux du champ électrique traversant S ".

3) **Formule de Stokes "classique"**. Soit S un domaine régulier d'une surface orientée (variété de dimension 2) dans \mathbb{R}^3 , dont le bord orienté $\partial S = C$ est une courbe. A un champ de vecteurs $X = P_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + P_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$, on associe la 1-forme différentielle

$$\alpha = P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + P_3 dx_3.$$

On a

$$d\alpha = \left(\frac{\partial P_3}{\partial x_2} - \frac{\partial P_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_3} - \frac{\partial P_3}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial P_2}{\partial x_1} - \frac{\partial P_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2.$$

On définit le rotationnel de X , noté $rot X$, le champ de vecteurs sur \mathbb{R}^3 associé à cette 2 forme, comme en 2) ci-dessus :

$$rot X = \left(\frac{\partial P_3}{\partial x_2} - \frac{\partial P_2}{\partial x_3} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_3} - \frac{\partial P_3}{\partial x_1} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial P_2}{\partial x_1} - \frac{\partial P_1}{\partial x_2} \right) \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

La formule de Stokes-Cartan donne

$$\int_S d\alpha = \int_C \alpha.$$

Comme expliqué précédemment en 2), le membre de gauche représente le flux du rotationnel du champ X à travers la surface S , et celui de droite la circulation du champ X le long de la courbe C . On a donc

$$\int_C \alpha = \int_S \langle rot X, \nu \rangle \sigma.$$

Appliqué au champ magnétique, c'est le théorème d'Ampère "circulation du champ magnétique le long de C = flux du courant traversant S ".

Exemple 3.3.20. En pratique, on peut calculer l'intégrale d'une forme sur une variété en intégrant sur des ouverts disjoints (en général des domaines de cartes) qui, à un ensemble de mesure nulle près, recouvrent toute la variété. Par exemple, considérons sur la sphère S^2 orientée par la normale sortante, la forme volume, voir (3.36), donnée par

$$\omega = (x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2)|_{S^2}.$$

On paramétrise (à un ensemble de mesure nulle près) la sphère comme suit

$$\tau :]-\pi, \pi[\times]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow S^2, \quad \tau(\varphi, \theta) = (\cos\theta \cos\varphi, \cos\theta \sin\varphi, \sin\theta).$$

On calcule facilement que

$$\tau^* \omega = \cos\theta \, d\varphi \wedge d\theta,$$

et donc

$$\int_{S^2} \omega = \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi \left(\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\theta \, d\theta \right) = 4\pi,$$

l'aire de la sphère! Ceci montre que ω , qui est une 2-forme fermée sur la sphère, n'est pas exacte. Car si $\omega = d\sigma$, puisque $\partial S^2 = \emptyset$, en vertu du théorème de Stokes-Cartan, on aurait

$$\int_{S^2} \omega = \int_{S^2} d\sigma = 0.$$

On peut montrer que la 2-forme différentielle ω est un générateur de $H_{DR}^2(S^2)$ comme défini en (3.35), c.à.d. que toute 2-forme sur la sphère peut s'écrire

$$c \omega + d\sigma, \quad c \in \mathbb{R}, \sigma \in \Omega^1(S^2).$$

En fait les groupes de cohomologie de de Rham (3.35) sont donnés par $H_{DR}^0(S^2) = \mathbb{R}$, $H_{DR}^1(S^2) = 0$, $H_{DR}^2(S^2) = \mathbb{R}$.

3.4 Exercices

1. Démontrer avec tous les détails nécessaires l'associativité du produit extérieur des formes extérieures.

2. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives n et m . On note $e_i, 1 \leq i \leq n$, une base de E et $f_i, 1 \leq i \leq m$, une base de F . Soit $\phi : E \rightarrow F$ une application linéaire et soit A la matrice de ϕ dans les bases e_i, f_i . Calculer la matrice de l'application $\phi^* : \wedge^k F^* \rightarrow \wedge^k E^*$ dans les bases $f_{i_1}^* \wedge \dots \wedge f_{i_k}^*, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$, et $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, de ces espaces.

3. Soit une k -forme différentielle sur une variété M de dimension n , dont l'expression locale dans une carte (U, φ) est

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_k}(x) \, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

et l'expression locale dans une autre carte (V, ψ) est

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \beta_{i_1 \dots i_k}(y) \, dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}.$$

En utilisant l'exercice 2, montrer à partir de la formule du changement de cartes pour le fibré extérieur, que pour tout $y \in \psi(U \cap V)$ on a

$$\beta_{i_1 \dots i_k}(y) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \frac{\partial(x_{j_1}, \dots, x_{j_k})}{\partial(y_{i_1}, \dots, y_{i_k})}(y) \alpha_{j_1 \dots j_k}(\varphi \circ \psi^{-1}(y)),$$

où

$$\frac{\partial(x_{j_1}, \dots, x_{j_k})}{\partial(y_{i_1}, \dots, y_{i_k})}(y) = \det\left(\frac{\partial x_{j_r}}{\partial y_{i_s}}(y)\right)_{1 \leq r, s \leq k} \quad \text{et} \quad \varphi \circ \psi^{-1}(y) = (x_1(y), \dots, x_n(y)).$$

4. On considère la sphère $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$, munie de l'atlas

$$U_i^+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 : x_i > 0\}, \quad U_i^- = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 : x_i < 0\}, \\ \varphi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi_i^\pm(x_1, x_2, x_3) = (x_1, \hat{x}_i, x_3), \quad i = 1, 2, 3.$$

Soit la 2-forme différentielle sur S^2 définie par

$$\omega_x(\xi_1, \xi_2) = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3(x, \xi_1, \xi_2), \quad x \in S^2, \quad \xi_1, \xi_2 \in T_x S^2.$$

(a) Montrer que les expressions de cette 2-forme dans les cartes locales (U_i^\pm, φ_i^\pm) , $i = 1, 2, 3$ sont respectivement données par

$$\pm \frac{dx_2 \wedge dx_3}{\sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2}}, \pm \frac{dx_3 \wedge dx_1}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_3^2}}, \pm \frac{dx_1 \wedge dx_2}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}.$$

(b) Cette 2-forme est-elle fermée ?

5. Soit $X_x = P_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + P_2(x) \frac{\partial}{\partial x_2} + P_3(x) \frac{\partial}{\partial x_3}$ un champ de vecteurs \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^3 .

(a) Soit la 2-forme différentielle $\omega_x = P_1(x) dx_2 \wedge dx_3 + P_2(x) dx_3 \wedge dx_1 + P_3(x) dx_1 \wedge dx_2$. Montrer que

$$d\omega_x = (\operatorname{div} X)_x dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,$$

où $(\operatorname{div} X)_x = \frac{\partial P_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial P_2}{\partial x_2}(x) + \frac{\partial P_3}{\partial x_3}(x)$ est la divergence de X .

(b) Soit la 1-forme différentielle $\omega_x = P_1(x) dx_1 + P_2(x) dx_2 + P_3(x) dx_3$. Montrer que

$$d\omega_x(\xi_1, \xi_2) = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3((\operatorname{rot} X)_x, \xi_1, \xi_2), \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^3,$$

où $(\operatorname{rot} X)_x = \left(\frac{\partial P_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial P_2}{\partial x_3}(x)\right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial P_3}{\partial x_1}(x)\right) \frac{\partial}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial P_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial P_1}{\partial x_2}(x)\right) \frac{\partial}{\partial x_3}$, dénote le rotationnel de X .

6. Le théorème de Stokes-Cartan et l'analyse vectorielle. Cet exercice continue l'exercice 5, dont on conserve les notations. Dédurre du théorème de Stokes-Cartan les deux théorèmes suivants de l'analyse vectorielle.

(a) Soit V un domaine régulier compact (c.à.d. un volume) dans \mathbb{R}^3 . Alors

$$\int_V (\operatorname{div} X)_x dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \int_{\partial V} \langle X_x, \nu_x \rangle \sigma,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dénote le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^3 et σ est la 2-forme élément d'aire sur ∂V .

(b) Soit S un domaine régulier d'une sous-variété M compacte de dimension 2 de \mathbb{R}^3 . Alors

$$\int_S \langle (\operatorname{rot} X)_x, \nu_x \rangle \sigma = \int_{\partial S} P_1(x) dx_1 + P_2(x) dx_2 + P_3(x) dx_3,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dénote le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^3 et σ est la 2-forme élément d'aire sur S .

7. Soit la 2-forme différentielle sur \mathbb{R}^3

$$\alpha_x = x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

et $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ la sphère unité de dimension 2 dans \mathbb{R}^3 . La restriction $\omega = \alpha|_{S^2}$ de cette 2-forme différentielle à S^2 est la forme volume canonique.

(a) On dénote $S^1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 = 1\}$, le cercle unité. Montrer que l'application

$$f : S^1 \times]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow S^2 \setminus \{n = (0, 0, 1), s = (0, 0, -1)\} \\ ((u, v), \theta) \mapsto f((u, v), \theta) = (u \cos \theta, v \cos \theta, \sin \theta),$$

est un difféomorphisme

(b) Calculer $f^*(\omega|_{S^2 \setminus \{n, s\}})$ et montrer que cette forme est exacte.

(c) En déduire que ω est exacte sur $S^2 \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$.

(d) La forme ω est-elle encore exacte sur $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$, sur S^2 ? Justifier votre réponse.

8. Sur la sphère de dimension n et de rayon $R > 0$,

$$S_R^n = \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = R^2 \right\},$$

la n -forme volume canonique ω , induite par la forme volume $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n+1}$ de \mathbb{R}^{n+1} , est définie par

$$\omega_x(\xi_1, \dots, \xi_n) = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n+1} \left(\frac{x}{R}, \xi_1, \dots, \xi_n \right),$$

où $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S_R^n$ et $\xi_1, \dots, \xi_n \in T_x S_R^n$.

(a) Montrer que

$$\omega_x = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_{n+1} \Big|_{S_R^n}.$$

(b) Calculer la différentielle extérieure $d\alpha$ de la n -forme différentielle sur \mathbb{R}^{n+1} définie par

$$\alpha_x = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_{n+1}, \quad x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

(c) A l'aide du théorème de Stokes-Cartan, en déduire la relation entre le volume de la sphère S_R^n (i.e. la longueur si $n = 1$, l'aire si $n = 2$, etc...) et celui de la boule fermée de rayon R

$$B_R^{n+1} = \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 \leq R^2 \right\},$$

dont S_R^n est le bord.

Remarque : le théorème de Stokes-Cartan s'applique à tout domaine régulier compact d'une variété orientable.

9. Soit $\vec{v}(x_1, x_2) = (v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2))$ un champ de vecteurs \mathcal{C}^∞ non identiquement nul sur \mathbb{R}^2 , et $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \vec{v}(x_1, x_2) \neq 0\}$ l'ouvert sur lequel ce champ ne s'annule pas. On définit

$$f : U \rightarrow S^1, (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \frac{\vec{v}(x_1, x_2)}{\|\vec{v}(x_1, x_2)\|},$$

où S^1 est le cercle de centre 0 et de rayon 1. Soit $\omega = (x_1 dx_2 - x_2 dx_1)|_{S^1}$ la forme volume canonique sur S^1 .

(a) Montrer que $f^* \omega = \frac{v_1 dv_2 - v_2 dv_1}{v_1^2 + v_2^2}$.

(b) Montrer que $f^* \omega$ est fermée.

(c) Supposons que $\vec{v}(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2)$ sur un cercle S_R de centre 0 et de rayon $R > 0$, inclus à U . Evaluer explicitement $\int_{S_R} f^* \omega|_{S_R}$. A l'aide du théorème de Stokes-Cartan, en déduire que $\vec{v}(x_1, x_2)$ s'annule nécessairement en un point du disque ouvert $D(0, R) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < R\}$.

(d) Sous l'hypothèse faite en (c) sur le champ de vecteurs \vec{v} , la forme $f^* \omega$ est-elle exacte sur U ? Justifier votre réponse.

10. Etablir le Théorème 3.2.15 en toute généralité.

Chapitre 4

Eléments de géométrie riemannienne

Il n'existe pas de façon intrinsèque de décider si deux vecteurs tangents à une variété sont parallèles. La notion de parallélisme est définie par une structure supplémentaire appelée connexion. Dans ce chapitre, nous étudions une connexion naturelle associée à une métrique riemannienne, qui fut découverte par Levi-Civita et nous donnons une application en reliant le théorème de Gauss-Bonnet au théorème de Poincaré-Hopf en dimension 2.

4.1 Connexion de Levi-Civita

Définition 4.1.1. Une métrique riemannienne sur une variété M est la donnée d'un produit scalaire défini positif sur chaque espace tangent $T_p M$, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$, tel que $\forall X, Y \in \text{Vect}(M)$, l'application

$$M \rightarrow \mathbb{R} : p \mapsto \langle X_p, Y_p \rangle_p,$$

est \mathcal{C}^∞ . On notera $\|\cdot\|_p$ la norme définie par $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$.

Soit $p \in M$ et $U \subset M$ un ouvert contenant p , sur lequel on peut choisir n champs de vecteurs e_1, \dots, e_n tels que

$$\langle (e_i)_q, (e_j)_q \rangle_q = \delta_{ij}, \quad \forall q \in U.$$

Un tel repère sera appelé un *repère orthonormé* sur U . Notons qu'un repère orthonormé existe toujours au voisinage d'un point (mais certainement pas globalement en général), par exemple en prenant le domaine d'une carte locale en ce point. On note $\theta_1, \dots, \theta_n$ la base duale de 1-formes sur U , c'est-à-dire

$$\theta_i(e_j) = \delta_{ij}.$$

Proposition 4.1.2. *Il existe des 1-formes ω_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, sur U telles que*

$$d\theta_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ji} \wedge \theta_j \text{ et } \omega_{ji} = -\omega_{ij}. \quad (4.1)$$

Ces 1-formes sont uniques et sont appelées 1-formes de connexion.

Démonstration. Unicité. Supposons l'existence des 1-formes ω_{ij} , alors $\forall i, j, k$ les équations (4.1) impliquent

$$\begin{aligned} d\theta_i(e_j, e_k) &= \sum_{l=1}^n \omega_{li} \wedge \theta_l(e_j, e_k) \\ &= \sum_{l=1}^n \begin{vmatrix} \omega_{li}(e_j) & \omega_{li}(e_k) \\ \theta_l(e_j) & \theta_l(e_k) \end{vmatrix} \\ &= \sum_{l=1}^n (\omega_{li}(e_j)\delta_{kl} - \omega_{li}(e_k)\delta_{jl}) \\ &= \omega_{ki}(e_j) - \omega_{ji}(e_k). \end{aligned}$$

En effectuant les permutations cycliques de i, j, k , et en utilisant la condition $\omega_{ji} = -\omega_{ij}$, on en déduit que nécessairement

$$\omega_{ij}(e_k) = \frac{1}{2}(d\theta_i(e_j, e_k) + d\theta_j(e_k, e_i) - d\theta_k(e_i, e_j)), \quad \forall i, j, k. \quad (4.2)$$

Existence. On vérifie immédiatement que si l'on définit les 1-formes ω_{ij} par la formule (4.2), les équations (4.1) sont satisfaites, ce qui achève la démonstration. \square

Corollaire 4.1.3. *Les 1-formes de connexion satisfaisant les conditions (4.1) sont explicitement définies par*

$$\omega_{ij}(e_k) = -\frac{1}{2}\theta_i([e_j, e_k]) - \frac{1}{2}\theta_j([e_k, e_i]) + \frac{1}{2}\theta_k([e_i, e_j]), \quad \forall 1 \leq i, j, k \leq n. \quad (4.3)$$

Démonstration. En utilisant (3.34), on a

$$d\theta_i(e_j, e_k) = e_j \theta_i(e_k) - e_k \theta_i(e_j) - \theta_i([e_j, e_k]) = -\theta_i([e_j, e_k]),$$

puisque $\theta_i(e_k) = \delta_{ik}$ et $\theta_i(e_j) = \delta_{ij}$ sont des fonctions constantes. Il en va de même pour toute permutation cyclique de i, j, k ce qui, en vertu de (4.2) établit (4.3) et achève la démonstration. \square

On note

$$\omega = (\omega_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, \quad (4.4)$$

la matrice antisymétrique, appelée matrice de connexion, dont les entrées sont les 1-formes contruites dans la Proposition 4.1.2. La proposition suivante analyse comment cette matrice se transforme sous une transformation orthogonale. En posant

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix},$$

les équations (4.1) s'écrivent

$$d\theta = -\omega \wedge \theta. \quad (4.5)$$

Dans la formule (4.5) (et dans toutes les formules suivantes de ce type) la notation $\alpha \wedge \beta$, où α et β sont des matrices dont les entrées sont des formes différentielles, représente la matrice dont les entrées sont obtenues en faisant le produit matriciel usuel, mais en remplaçant la multiplication habituelle "." par le produit extérieur " \wedge ", précisément

$$(\alpha \wedge \beta)_{ij} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \wedge \beta_{kj}.$$

Proposition 4.1.4. *Pour tout changement de repère orthonormé sur U*

$$\tilde{e} = Ae, \quad (4.6)$$

où

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, \quad \tilde{e} = \begin{pmatrix} \tilde{e}_1 \\ \vdots \\ \tilde{e}_n \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

et $A : U \rightarrow O(n, \mathbb{R})$ est une application de classe \mathcal{C}^∞ à valeurs dans le groupe orthogonal réel, on a

$$\tilde{\omega} = -(dA)A^T + A\omega A^T. \quad (4.8)$$

Démonstration. On a

$$\theta = A^T \tilde{\theta} \Leftrightarrow \tilde{\theta} = A\theta.$$

De là, en utilisant (4.5), on calcule

$$\begin{aligned} d\tilde{\theta} &= dA \wedge \theta + Ad\theta \\ &= dA \wedge (A^T \tilde{\theta}) - A(\omega \wedge \theta) \\ &= (dA)A^T \wedge \tilde{\theta} - A(\omega \wedge A^T \tilde{\theta}) \\ &= (dA)A^T \wedge \tilde{\theta} - A\omega A^T \wedge \tilde{\theta} \\ &= ((dA)A^T - A\omega A^T) \wedge \tilde{\theta}. \end{aligned}$$

Par unicité de la matrice de connexion $\tilde{\omega}$, définie par $d\tilde{\theta} = -\tilde{\omega} \wedge \tilde{\theta}$, on en déduit

$$\tilde{\omega} = -(dA)A^T + A\omega A^T,$$

ce qui établit (4.8) et termine la démonstration. \square

Soit $c : I \rightarrow U$ une courbe \mathcal{C}^∞ , I intervalle ouvert contenant 0, telle que $c(0) = p$. Sur une variété on n'a pas de façon intrinsèque un moyen de transporter un vecteur parallèlement à lui-même le long de $c(t)$. Introduire une notion de transport parallèle est ce que l'on appelle définir une connexion sur la variété. Dans le cas où la variété est munie d'une métrique, il existe une connexion définie à partir des 1-formes $\omega_{ij}, i \neq j$, appelées pour cette raison formes de connexion, de la façon suivante. Si Y est un champ de vecteurs sur U et (e_1, \dots, e_n) un repère orthonormé, on peut écrire

$$Y_{c(t)} = \sum_{i=1}^n y_i(t)(e_i)_{c(t)}, \quad \forall t \in I. \quad (4.9)$$

L'idée est de définir la connexion via un opérateur de dérivation covariante ∇ et ensuite le transport parallèle d'un champ de vecteurs Y le long de $c(t)$ par la condition que la dérivée covariante du champ de vecteurs dans la direction de la tangente à la courbe est nulle.

Définition 4.1.5. Soit $X_p = c'(0)$ le vecteur tangent à la courbe $c(t)$ en $t = 0$. On définit la dérivée covariante de $Y \in \text{Vect}(M)$ dans la direction de X_p par

$$\nabla_{X_p} Y = \sum_{i=1}^n \left(\frac{dy_i}{dt}(0) + \sum_{j=1}^n (\omega_{ij})_p(X_p)y_j(0) \right) (e_i)_p. \quad (4.10)$$

Théorème 4.1.6. La formule (4.10) définissant la dérivée covariante ne dépend pas du choix du repère orthonormé. La connexion associée définissant le transport parallèle d'un champ de vecteurs Y le long d'une courbe $c(t)$ par

$$\nabla_{c'(t)} Y = 0, \quad \forall t \in I,$$

\Updownarrow

$$\frac{dy_i}{dt}(t) = \sum_{j=1}^n (\omega_{ji})_{c(t)}(c'(t))y_j(t) = 0, \quad \forall t \in I, \quad \forall 1 \leq i \leq n. \quad (4.11)$$

s'appelle la connexion de Levi-Civita.

Démonstration. Dans cette démonstration les notations e_p, ω_p, \dots signifient que les entrées des matrices e, ω, \dots sont évaluées en p . Avec les notations introduites en (4.6) et (4.7), on a

$$e^T = \tilde{e}^T A.$$

On écrira aussi $\dot{y}(0) = \left(\frac{dy_1}{dt}(0), \dots, \frac{dy_n}{dt}(0)\right)^T$, etc. Ecrivons (4.10) sous la forme

$$\nabla_{X_p} Y = e_p^T (\dot{y}(0) + \omega_p(X_p)y(0)), \quad (4.12)$$

où $\omega_p(X_p) = ((\omega_{ij})_p(X_p))_{1 \leq i, j \leq n}$. Si l'on note $\tilde{y}_1(t), \dots, \tilde{y}_n(t)$ les coordonnées de $Y_{c(t)}$ dans la base $(\tilde{e}_1)_{c(t)}, \dots, (\tilde{e}_n)_{c(t)}$, on a

$$y(t) = A^T(c(t))\tilde{y}(t).$$

De là, en utilisant (4.8), on a

$$\begin{aligned} \nabla_{X_p} Y &= \tilde{e}_p^T A(p) \left(A^T(p) \dot{\tilde{y}}(0) + dA^T(p)(X_p)\tilde{y}(0) \right) + \tilde{e}_p^T A(p) \omega_p(X_p) A^T(p) \tilde{y}(0) \\ &= \tilde{e}_p^T \dot{\tilde{y}}(0) + \tilde{e}_p^T A(p) dA^T(p)(X_p) \tilde{y}(0) \\ &\quad + \tilde{e}_p^T \left(\tilde{\omega}_p(X_p) + dA(p)(X_p) A^T(p) \right) \tilde{y}(0) \\ &= \tilde{e}_p^T \dot{\tilde{y}}(0) + \tilde{e}_p^T \tilde{\omega}_p(X_p) \tilde{y}(0) \\ &\quad + \tilde{e}_p^T \left(A(p) dA^T(p)(X_p) + dA(p)(X_p) A^T(p) \right) \tilde{y}(0) \\ &= \tilde{e}_p^T \dot{\tilde{y}}(0) + \tilde{e}_p^T \tilde{\omega}_p(X_p) \tilde{y}(0), \end{aligned}$$

puisque

$$A(c(t))A^T(c(t)) = I \Rightarrow A(p)dA^T(p)(X_p) + dA(p)(X_p)A^T(p) = 0,$$

ce qui établit le théorème. \square

Proposition 4.1.7. *Le transport parallèle défini par la connexion de Levi-Civita conserve le produit scalaire sur les espaces tangents.*

Démonstration. Soient Y, Z deux champs de vecteurs sur M transportés parallèlement le long d'une courbe $c : I \rightarrow U$. En écrivant comme en (4.9)

$$Y_{c(t)} = \sum_{i=1}^n y_i(t)(e_i)_{c(t)}, \quad Z_{c(t)} = \sum_{i=1}^n z_i(t)(e_i)_{c(t)},$$

et en utilisant la définition du transport parallèle (4.11), on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle Y_{c(t)}, Z_{c(t)} \rangle_{c(t)} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n y_i(t)z_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{dy_i}{dt}(t)z_i(t) + y_i(t)\frac{dz_i}{dt}(t) \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left((\omega_{ji})_{c(t)}(c'(t)) + (\omega_{ij})_{c(t)}(c'(t)) \right) y_j(t)z_i(t) = 0, \end{aligned}$$

puisque $\omega_{ji} = -\omega_{ij}$, ce qui établit le résultat. \square

On peut maintenant introduire la notion de géodésique sur une variété riemannienne, comme une courbe le long de laquelle le vecteur tangent reste parallèle à lui-même (généralisation de la ligne droite en géométrie euclidienne), précisément

Définition 4.1.8. *Une courbe $c : I \rightarrow M$ de classe \mathcal{C}^∞ définie sur un intervalle ouvert I est une géodésique si et seulement si*

$$\nabla_{c'(t)} c' = 0, \quad \forall t \in I. \quad (4.13)$$

En écrivant (4.8) sous la forme

$$\tilde{\omega}A = -dA + A\omega, \quad (4.14)$$

et en prenant la différentielle extérieure, on trouve

$$(d\tilde{\omega})A - \tilde{\omega} \wedge dA = dA \wedge \omega + Ad\omega,$$

et donc, en utilisant à nouveau (4.14), on obtient

$$(d\tilde{\omega})A + \tilde{\omega} \wedge (\tilde{\omega}A - A\omega) = (A\omega - \tilde{\omega}A) \wedge \omega + Ad\omega,$$

qui, après simplification, donne

$$(d\tilde{\omega} + \tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega})A = A(d\omega + \omega \wedge \omega). \quad (4.15)$$

Définition 4.1.9. *On appelle*

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega, \quad (4.16)$$

la matrice de courbure de la connexion de Levi-Civita sur U .

Avec cette définition l'équation (4.15) s'écrit

$$\tilde{\Omega} = A\Omega A^T, \quad (4.17)$$

qui donne la formule de transformation de la matrice de courbure sous un changement de repère orthonormé sur l'ouvert U .

Remarquons que pour un changement de repère orthonormé préservant l'orientation, on a

$$\tilde{\theta}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{\theta}_n = \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_n, \quad (4.18)$$

puisque $\det(A) = 1$, tandis que pour un changement de repère orthonormé renversant l'orientation, on obtient

$$\tilde{\theta}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{\theta}_n = -\theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_n, \quad (4.19)$$

puisque $\det(A) = -1$. Dans le cas où M est orientable il existe donc une forme volume sur M notée σ_M telle que

$$(\sigma_M)|_U = \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_n. \quad (4.20)$$

Dans le cas où M est une variété de dimension 2, les formules précédentes se simplifient considérablement. La matrice de connexion (4.4) est donnée par

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} \\ -\omega_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

et, par (4.1), la 1-forme de connexion ω_{12} est univoquement caractérisée par

$$d\theta_1 = -\omega_{12} \wedge \theta_2, \quad d\theta_2 = \omega_{12} \wedge \theta_1. \quad (4.21)$$

Pour un changement de repère préservant l'orientation, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & g \\ -g & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } f^2 + g^2 = 1, \quad (4.22)$$

l'équation (4.8) se réduit à

$$\omega_{12} = \tilde{\omega}_{12} + \tau \quad \text{où } \tau = fdg - gdf. \quad (4.23)$$

Pour un changement de repère orthonormé renversant l'orientation, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & g \\ g & -f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } f^2 + g^2 = 1, \quad (4.24)$$

l'équation (4.8) se réduit à

$$\omega_{12} = -\tilde{\omega}_{12} + \tau \quad \text{où } \tau = fdg - gdf. \quad (4.25)$$

Dans les deux cas la 1-forme τ est fermée, c'est-à-dire

$$d\tau = 0. \quad (4.26)$$

La matrice de courbure (4.16) de la connexion de Levi-Civita sur U est

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & d\omega_{12} \\ -d\omega_{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition 4.1.10. *La courbure de Gauss $K(p)$ en $p \in M$ est définie comme l'unique scalaire tel que*

$$d\omega_{12}(p) = K(p)\theta_1(p) \wedge \theta_2(p). \quad (4.27)$$

Pour que cette définition fasse sens, nous devons établir le lemme suivant.

Lemme 4.1.11. *La définition de la courbure de Gauss en un point $p \in M$ ne dépend pas du choix du repère orthonormé au voisinage de p .*

Démonstration. Désignons par K et \tilde{K} les valeurs à priori différentes obtenues par un changement de repères orthonormés. Pour un changement de repère préservant l'orientation (4.22), en vertu de (4.23) et (4.26), on a

$$\omega_{12} = \tilde{\omega}_{12} + \tau \Rightarrow d\omega_{12} = d\tilde{\omega}_{12},$$

et donc, en vertu de (4.18),

$$K\theta_1 \wedge \theta_2 = \tilde{K}\tilde{\theta}_1 \wedge \tilde{\theta}_2 = \tilde{K}\theta_1 \wedge \theta_2 \Rightarrow K = \tilde{K}.$$

Pour un changement de repères renversant l'orientation (4.24), en vertu de (4.25) et (4.26), on a

$$\omega_{12} = -\tilde{\omega}_{12} + \tau \Rightarrow d\omega_{12} = -d\tilde{\omega}_{12},$$

et donc, en vertu de (4.19),

$$K\theta_1 \wedge \theta_2 = -\tilde{K}\tilde{\theta}_1 \wedge \tilde{\theta}_2 = \tilde{K}\theta_1 \wedge \theta_2 \Rightarrow K = \tilde{K},$$

ce qui établit le résultat. \square

4.2 Preuve de Chern du théorème de Gauss-Bonnet

Dans cette section et la suivante, on suppose que M est une variété riemannienne de dimension 2. Le passage d'un repère orthonormé à un autre de même orientation (4.22) est alors donné par une matrice 2×2 de rotation dont l'angle est défini modulo 2π . En général il n'est pas possible de trouver une détermination continue de l'angle de rotation sur l'ouvert de définition des deux repères. En parcourant un chemin fermé continu, on peut aboutir après un tour à une autre détermination. La proposition suivante nous permettra de calculer la variation de l'angle de rotation après un tour complet.

Proposition 4.2.1. *Soient (e_1, e_2) et $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ deux repères orthonormés de même orientation sur un ouvert $U \subset M$, comme en (4.22). Soit $\gamma : [0, T] \rightarrow U$ une courbe \mathcal{C}^∞ telle que $\gamma(0) = p$. Notons $\theta_0 = \angle((e_1)_p, (\tilde{e}_1)_p)$ une détermination de l'angle orienté entre $(e_1)_p$ et $(\tilde{e}_1)_p$ et $\gamma_t = \gamma|_{[0, t]}$, $t \in [0, T]$. Alors*

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{\gamma_t} \tau, \quad (4.28)$$

où τ est définie comme en (4.23), est une fonction \mathcal{C}^∞ sur $[0, T]$ qui satisfait

$$f(\gamma(t)) = \cos\theta(t), \quad g(\gamma(t)) = \sin\theta(t), \quad \theta(0) = \theta_0, \quad (4.29)$$

et

$$\gamma^*\tau = d\theta. \quad (4.30)$$

Démonstration. On a

$$\gamma_t^* \tau = \gamma_t^*(fdg - gdf) = \gamma_t^*(f)d(\gamma_t^*g) - \gamma_t^*(g)d(\gamma_t^*f). \quad (4.31)$$

En posant

$$\begin{aligned} F(s) &= f(\gamma_t(s)) = \gamma_t^*(f)(s), \\ G(s) &= g(\gamma_t(s)) = \gamma_t^*(g)(s), \end{aligned} \quad (4.32)$$

par définition de l'intégrale le long d'un chemin, on a

$$\int_{\gamma_t} \tau = \int_0^t (F(s)G'(s) - G(s)F'(s)) ds. \quad (4.33)$$

Établir (4.29) revient à montrer que

$$(F(t) - \cos\theta(t))^2 + (G(t) - \sin\theta(t))^2 = 0.$$

En utilisant $F^2(t) + G^2(t) = 1$, un simple calcul donne

$$(F(t) - \cos\theta(t))^2 + (G(t) - \sin\theta(t))^2 = 2 - 2(F(t)\cos\theta(t) + G(t)\sin\theta(t)).$$

Posant

$$\phi(t) = F(t)\cos\theta(t) + G(t)\sin\theta(t),$$

on cherche donc à établir que $\phi(t) = 1$. Par définition (4.28), $\theta(0) = \theta_0$, et

$$\phi(0) = f(p)\cos\theta_0 + g(p)\sin\theta_0 = \cos^2\theta_0 + \sin^2\theta_0 = 1.$$

Il suffit donc d'établir que $\phi'(t) = 0$. En utilisant (4.28) et (4.33), on a

$$\theta'(t) = F(t)G'(t) - G(t)F'(t),$$

et donc

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= F'(t)\cos\theta(t) - F(t)\sin\theta(t)(F(t)G'(t) - G(t)F'(t)) \\ &\quad + G'(t)\sin\theta(t) + G(t)\cos\theta(t)(F(t)G'(t) - G(t)F'(t)) \\ &= F'(t)\cos\theta(t)(1 - G^2(t)) + G'(t)\sin\theta(t)(1 - F^2(t)) \\ &\quad + F(t)G(t)(F'(t)\sin\theta(t) + G'(t)\cos\theta(t)) \\ &= (F(t)\cos\theta(t) + G(t)\sin\theta(t))(F(t)F'(t) + G(t)G'(t)) = 0, \end{aligned}$$

puisque $F^2(t) + G^2(t) = 1$. Par la discussion ci-dessus, ceci établit (4.29).

En utilisant (4.29), (4.31) (avec $t = 1$) et la définition de F et G en (4.32), on a

$$\begin{aligned} \gamma^* \tau &= (F(t)G'(t) - G(t)F'(t)) dt \\ &= (\cos\theta(t)\theta'(t)\cos\theta(t) + \sin\theta(t)\theta'(t)\sin\theta(t)) dt \\ &= \theta'(t) dt = d\theta, \end{aligned}$$

ce qui établit (4.30) et achève la démonstration de la proposition. \square

Corollaire 4.2.2. *Soient deux repères orthonormés (e_1, e_2) , $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ de même orientation sur un ouvert U . Soit $\gamma : [0, T] \rightarrow U$ un lacet \mathcal{C}^∞ dans U , c'est-à-dire $\gamma(0) = \gamma(T)$. Alors la variation de l'angle orienté entre e_1 et \tilde{e}_1 en un tour le long du lacet est donnée par*

$$\text{var}_\gamma \angle(e_1, \tilde{e}_1) = \int_\gamma \tau. \quad (4.34)$$

Démonstration. En utilisant (4.30), on trouve

$$\int_\gamma \tau = \int_0^T d\theta = \int_0^T \theta'(t) dt = \theta(T) - \theta(0) = \theta(T) - \theta_0.$$

Puisque θ_0 et $\theta(T)$ mesurent tous deux l'angle orienté (modulo 2π) entre $(e_1)_p$ et $(\tilde{e}_1)_p$, on a nécessairement

$$\theta(T) - \theta_0 = 2\pi n = \text{var}_\gamma \angle(e_1, \tilde{e}_1), \quad n \in \mathbb{Z},$$

ce qui établit (4.34). □

Définition 4.2.3. *Soit X un champ de vecteurs sur une variété M . Un point singulier isolé de X est un point $p \in M$ tel que $X_p = 0$ et pour lequel il existe $V \subset M$ un ouvert, tel que $p \in V$ et $X_q \neq 0, \forall q \in V, q \neq p$.*

Remarquons que si la variété M est compacte, il est toujours possible de définir une métrique sur M . Il suffit en effet de prendre un atlas fini $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{1 \leq i \leq n}$, une partition de l'unité $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ subordonnée au recouvrement de M défini par l'atlas, et un produit scalaire défini positif donné par

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \sum_{i=1}^n f_i \langle \cdot, \cdot \rangle_i,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ est le produit scalaire sur U_i induit par la métrique euclidienne sur $\varphi_i(U_i)$. Il faut entendre dans cette formule que $f_i \langle \cdot, \cdot \rangle_i$ est étendu par 0 sur le complémentaire de U_i .

Jusqu'à la fin de la section nous supposons que la variété M est compacte et de dimension 2. Soit X un champ de vecteurs sur M et $p \in M$ un point singulier isolé. Soit (V, φ) une carte en p telle que $\varphi(V)$ est un disque ouvert dans \mathbb{R}^2 de centre $\varphi(p)$. On considère un repère orthonormé (il y a deux choix possibles)

$$\left(\tilde{e}_1 = \frac{X}{\|X\|}, \tilde{e}_2 \right), \text{ défini sur } V \setminus \{p\}. \quad (4.35)$$

Soit (e_1, e_2) un repère orthonormé de même orientation défini sur tout V . On a donc avec les définitions de la section précédente, voir (4.23),

$$\tilde{\omega}_{21} - \omega_{21} = \tau \text{ sur } V \setminus \{p\}. \quad (4.36)$$

Définition 4.2.4. Soit γ un lacet simple (c.à.d. image d'un plongement d'un cercle) dans V positivement orienté contenant p en son intérieur. On définit l'indice du point singulier isolé p du champ de vecteurs X , noté $ind_p(X)$, par

$$ind_p(X) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \tau = \frac{1}{2\pi} var_{\gamma} \angle(e_1, \tilde{e}_1) \in \mathbb{Z}. \quad (4.37)$$

Pour établir que l'indice est bien défini, il faut établir l'indépendance par rapport au choix du lacet, au choix du repère orthonormé (e_1, e_2) et au choix de la métrique sur M . Ceci fait l'objet des trois lemmes suivants.

Lemme 4.2.5. La définition de l'indice ne dépend pas du choix de γ .

Démonstration. Soient γ_1, γ_2 deux courbes simples positivement orientées. Si γ_1 et γ_2 ne s'intersectent pas, on considère Δ la région annulaire dont le bord orienté est $\partial\Delta = \gamma_2 - \gamma_1$ (ou $\gamma_1 - \gamma_2$) et, par la formule de Stokes, on a

$$\int_{\gamma_2} \tau - \int_{\gamma_1} \tau = \pm \int_{\Delta} d\tau = 0.$$

Si γ_1 et γ_2 s'intersectent, on peut toujours choisir γ_3 qui n'intersecte ni γ_1 , ni γ_2 , et par le résultat précédent

$$\int_{\gamma_1} \tau = \int_{\gamma_3} \tau = \int_{\gamma_2} \tau.$$

Le lemme est établi. \square

Lemme 4.2.6. La définition de l'indice ne dépend pas du choix du repère orthonormé (e_1, e_2) , ni du choix de l'orientation. En effet, il peut être calculé en fonction de la 1-forme de connexion $\tilde{\omega}_{21}$ définie par le repère orthonormé $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ comme suit

$$ind_p(X) = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{S_r} \tilde{\omega}_{21}, \quad (4.38)$$

où S_r dénote un cercle positivement orienté de centre p et de rayon r dans la carte locale (V, φ) .

Démonstration. Dans toute la démonstration "cercle ou boule" signifie "cercle ou boule" dans la carte locale (V, φ) . Soit $\underline{B}(p, R)$ une boule ouverte de centre p de rayon $R > 0$, dont l'adhérence $B(p, R)$ est incluse à V . Montrons que la fonction

$$f :]0, R] \rightarrow \mathbb{R} : r \mapsto f(r) = \int_{S_r} \tilde{\omega}_{21},$$

est uniformément continue, ce qui établira l'existence de la limite $\lim_{r \rightarrow 0} f(r)$. En effet pour $0 < r' < r \leq R$, par la formule de Stokes et (4.18), on a

$$\int_{S_r} \tilde{\omega}_{21} - \int_{S_{r'}} \tilde{\omega}_{21} = \int_{D_{r,r'}} d\tilde{\omega}_{21} = - \int_{D_{r,r'}} K \tilde{\theta}_1 \wedge \tilde{\theta}_2 = - \int_{D_{r,r'}} K \theta_1 \wedge \theta_2, \quad (4.39)$$

où $D_{r,r'} = \overline{B(p,r)} \setminus B(p,r')$ ($B(p,r)$ boule de centre p et de rayon r) désigne la région annulaire dont le bord orienté est $\partial D_{r,r'} = S_r - S_{r'}$, et K la courbure de Gauss. Puisque la courbure de Gauss est une fonction continue définie sur tout V la fonction

$$[0, R] \rightarrow \mathbb{R} : r \mapsto \int_{B(p,r)} K \theta_1 \wedge \theta_2,$$

est continue et donc uniformément continue sur $[0, R]$. Ceci établit la continuité uniforme de f sur $]0, R]$. Notons

$$I = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{S_r} \tilde{\omega}_{21}.$$

Puisque, en vertu de (4.36),

$$\tilde{\omega}_{21} = \omega_{21} + \tau,$$

et

$$\int_{S_r} \omega_{21} = \int_{B(p,r)} d\omega_{21} = - \int_{B(p,r)} K \theta_1 \wedge \theta_2,$$

la dernière équation étant vraie pour ω_{21} qui contrairement à $\tilde{\omega}_{21}$ (voir (4.35)) est définie sur tout V , en substituant dans (4.39), on obtient

$$- \int_{B(p,r)} K \theta_1 \wedge \theta_2 + \int_{S_r} \tau - \int_{S_{r'}} \tilde{\omega}_{21} = - \int_{D_{r,r'}} K \theta_1 \wedge \theta_2,$$

En passant à la limite $r' \rightarrow 0$ dans cette équation, puisque

$$\lim_{r' \rightarrow 0} \int_{D_{r,r'}} K \theta_1 \wedge \theta_2 = \int_{B(p,r)} K \theta_1 \wedge \theta_2,$$

en utilisant la définition de l'indice (4.37), on obtient

$$2\pi \operatorname{ind}_p(X) - I = 0,$$

ce qui établit (4.38). Notons que cette formule ne dépend pas du choix de l'orientation, vu qu'un changement d'orientation change à la fois le signe de $\tilde{\omega}_{21}$ et l'orientation de S_r . Ceci achève la démonstration. \square

Lemme 4.2.7. *La définition de l'indice ne dépend pas du choix de la métrique sur M .*

Démonstration. Soient $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ deux métriques définies positives sur M . Alors

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_t = t \langle \cdot, \cdot \rangle_1 + (1-t) \langle \cdot, \cdot \rangle_0,$$

est encore une métrique définie positive $\forall t \in [0, 1]$. Si l'on note I_t l'indice défini par rapport à $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$, alors I_t dépend continuellement de t , ce qui implique puisque $I_t \in \mathbb{Z}$ que I_t est constant, et donc $I_0 = I_1$, ce que nous souhaitons établir. \square

Si M est orientable, dès qu'une orientation est fixée, en vertu de (4.20), il existe une unique forme volume σ_M telle que

$$(\sigma_M)|_U = \theta_1 \wedge \theta_2, \quad (4.40)$$

pour tout ouvert $U \subset M$ sur lequel on peut définir un repère orthonormé (e_1, e_2) compatible avec l'orientation de M . Ces notions introduites, nous pouvons énoncer le théorème central de cette section, dont la démonstration est due à S.S. Chern, qui l'a introduite en vue de généraliser le célèbre théorème de Gauss-Bonnet à une variété riemannienne de dimension paire. Le théorème de Chern dépasse le niveau introductif de ce cours et nous renvoyons le lecteur intéressé à la référence [3] dans la bibliographie.

Théorème 4.2.8. (*Théorème de Gauss-Bonnet/Poincaré-Hopf*). *Soit M une variété compacte et orientée de dimension 2. Soit X un champ de vecteurs sur M dont tous les points singuliers sont isolés, et donc en nombre fini par compacité. Notons p_1, \dots, p_k les points singuliers. Alors, pour toute métrique riemannienne sur M on a*

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K \sigma_M = \sum_{i=1}^k \text{ind}_{p_i}(X), \quad (4.41)$$

où K dénote la courbure de Gauss, définie en (4.27). On en déduit que la moyenne de la courbure de Gauss est un entier indépendant du choix de la métrique (théorème de Gauss-Bonnet), et que la somme des indices des points singuliers d'un champ de vecteurs, dont les points singuliers sont isolés, ne dépend pas du champ de vecteurs (théorème de Poincaré-Hopf). Le nombre entier ainsi défini s'appelle la caractéristique d'Euler-Poincaré de M et est noté $\chi(M)$

Démonstration. Sur $U = M \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ on définit un repère orthonormé

$$\left(\tilde{e}_1 = \frac{X}{\|X\|}, \tilde{e}_2 \right),$$

compatible avec l'orientation de M . Soient $B(p_i, r_i)$ des boules ouvertes (dans une carte compatible avec l'orientation en p_i) de centre p_i et de rayon r_i ne contenant pas d'autres points singuliers que p_i . Alors

$$D = M \setminus \cup_{i=1}^k B(p_i, r_i),$$

est un domaine régulier. Par définition de la courbure de Gauss (4.27) et de la forme volume (4.40) sur M on a

$$\int_D K \sigma_M = \int_D K \tilde{\theta}_1 \wedge \tilde{\theta}_2 = - \int_D d\tilde{\omega}_{21}.$$

Le bord orienté de D est donné par $\partial D = -\sum_{i=1}^k S_{r_i}$ où S_{r_i} est le cercle de centre p_i et de rayon r_i , bord orienté de $\overline{B(p_i, r_i)}$. En appliquant le théorème de Stokes, on obtient

$$\int_D K\sigma_M = -\int_{\partial D} \tilde{\omega}_{21} = \sum_{i=1}^k \int_{S_{r_i}} \tilde{\omega}_{21}.$$

En passant à la limite $r_i \rightarrow 0$ dans cette dernière équation et en utilisant (4.38), on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K\sigma_M = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2\pi} \lim_{r_i \rightarrow 0} \int_{S_{r_i}} \tilde{\omega}_{21} = \sum_{i=1}^k \text{ind}_{p_i}(X),$$

ce qui établit (4.41) et achève la démonstration. \square

Exemple 4.2.9. Le champ de vecteurs X sur S^2 considéré dans l'Exemple 2.3.4 possède un seul point singulier au pôle nord, noté n . On voit intuitivement (voir exercice 9 pour une démonstration rigoureuse) sur la représentation du champ de vecteurs dans la carte $(U_2, \bar{\psi})$ que le nombre de tours que le champ de vecteurs fait en parcourant un cercle orienté autour de l'origine dans les coordonnées locales (y_1, y_2) est 2 et donc

$$\text{ind}_n(X) = 2.$$

Le théorème de Poincaré-Hopf montre donc que $\chi(S^2) = 2$.

Le théorème de Gauss-Bonnet nécessite que la variété soit orientable, pour pouvoir utiliser le théorème de Stokes-Cartan. Par contre le théorème de Poincaré-Hopf reste valable dans le cas non-orientable, comme nous allons maintenant l'établir.

Définition 4.2.10. Soit M une variété. On appelle revêtement orienté de M l'ensemble

$$\tilde{M} = \{(p, o_p) | p \in M \text{ et } o_p = \text{une orientation de } T_p M\}. \quad (4.42)$$

On note $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ la projection $\pi(p, o_p) = p$.

Proposition 4.2.11. Soit M une variété.

i) Le revêtement orienté \tilde{M} de M est muni d'une structure de variété \mathcal{C}^∞ orientable et est un revêtement topologique¹ d'ordre 2 de M .

ii) Si M est connexe, alors \tilde{M} est connexe si et seulement si M est non orientable.

iii) \tilde{M} est compact si et seulement si M est compact.

1. Pour la définition et les propriétés élémentaires des revêtements topologiques, voir le cours de topologie.

Démonstration. i) Pour toute carte (U, φ) de M , en notant $x = (x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées dans cette carte, on définit deux cartes disjointes sur M , (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) , par

$$U_1 = \left\{ \left(\varphi^{-1}(x), o_{\varphi^{-1}(x)} = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p \right\rangle \right), x \in \varphi(U) \right\},$$

$$U_2 = \left\{ \left(\varphi^{-1}(x), o_{\varphi^{-1}(x)} = \left\langle \left(-\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p \right\rangle \right), x \in \varphi(U) \right\},$$

avec

$$\varphi_1 = \varphi \circ \pi : U_1 \rightarrow \varphi(U) \text{ et } \varphi_2 = \varphi \circ \pi : U_2 \rightarrow \varphi(U).$$

Muni de cet atlas, \tilde{M} est clairement orientable. Puisque φ_1, φ_2 sont des homéomorphismes et $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, \tilde{M} est un revêtement d'ordre 2 (c'est la définition d'un revêtement topologique d'ordre 2).

ii) Supposons M orientable. Soit \mathcal{A} un atlas orienté de M . Alors

$s_1 : M \rightarrow \tilde{M}$ définie par $s_1(p) = (p, o_p)$ où o_p est l'orientation définie par \mathcal{A} ,

$s_2 : M \rightarrow \tilde{M}$ définie par $s_2(p) = (p, -o_p)$ où $-o_p$ est l'orientation opposée,

sont deux sections continues du revêtement, et définissent des homéomorphismes sur leurs images $M_1 = s_1(M)$ et $M_2 = s_2(M)$. On en déduit que $\tilde{M} = M_1 \cup M_2$, avec M_1 et M_2 ouverts et $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, donc \tilde{M} n'est pas connexe. Inversément, montrons que si M est non orientable et connexe, alors \tilde{M} est connexe. Soient P, Q deux points dans \tilde{M} , nous allons montrer qu'il est possible de les relier par un chemin continu dans \tilde{M} . Puisque M est connexe, on peut relier $\pi(P)$ à $\pi(Q)$ par un chemin continu dans M . Par la théorie des revêtements topologiques, on peut relever γ en un chemin continu $\tilde{\gamma}$ dans \tilde{M} débutant en P et se projetant sur γ . Notons $\{Q, R\} = \pi^{-1}(\pi(Q))$, les deux points distincts de \tilde{M} se projetant sur Q . Si $\tilde{\gamma}$ aboutit en Q , on a terminé. Sinon $\tilde{\gamma}$ joint P à R et, puisque M est non orientable, il existe un lacet δ en Q qui se relève dans \tilde{M} en un chemin $\tilde{\delta}$ joignant R à Q . Le chemin continu $\tilde{\gamma} \cdot \tilde{\delta}$ dans \tilde{M} obtenu en suivant d'abord $\tilde{\gamma}$ et ensuite $\tilde{\delta}$ joint P à Q .

iii) laissé en exercice au lecteur.

Ceci achève la démonstration. \square

Théorème 4.2.12. (*Théorème de Poincaré-Hopf, cas non-orientable*). Soit M une variété compacte et non-orientable de dimension 2. Alors, pour tout champ de vecteurs X sur M dont les points singuliers sont isolés, on a

$$\sum_{p \in M} \text{ind}_p(X) = \frac{\chi(\tilde{M})}{2}, \quad (4.43)$$

où $\chi(\tilde{M})$ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré du revêtement orienté de M , défini en (4.42).

Démonstration. Puisque, $\forall(p, o(p)) \in \tilde{M}$,

$$d\pi_{(p, o(p))} : T_{(p, o(p))}\tilde{M} \rightarrow T_pM,$$

est bijective il existe un unique champ de vecteurs \tilde{X} sur \tilde{M} tel que

$$d\pi_{(p, o(p))}(\tilde{X}_{(p, o(p))}) = X_p.$$

Clairement

$$\text{ind}_{(p, o(p))}(\tilde{X}) = \text{ind}_p(X),$$

et donc, puisque \tilde{M} est un revêtement d'ordre 2 de M , et est orientable, en utilisant (4.41),

$$\chi(\tilde{M}) = 2 \sum_{p \in M} \text{ind}_p(X),$$

ce qui établit (4.43) et achève la démonstration. \square

Exemple 4.2.13. Soit $M = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ l'espace projectif de dimension 2. C'est une variété connexe, compacte, de dimension 2 et non orientable. On vérifie facilement que l'application

$$\pi : S^2 \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : (x_1, x_2, x_3) \mapsto [(x_1, x_2, x_3)],$$

définit le revêtement orienté de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Donc pour tout champ de vecteurs X sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dont les points singuliers sont isolés, on a

$$\sum_{p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})} \text{ind}_p(X) = \frac{\chi(S^2)}{2} = 1.$$

Plus généralement, on peut montrer que toute variété M compacte, connexe et orientable de dimension 2 est homéomorphe à un tore à g trous, et que dans ce cas $\chi(M) = 2 - 2g$, où g s'appelle le genre. Si donc M est compacte, connexe et non orientable de dimension 2, on en déduit que $\chi(M) = 1 - g$ où g est le genre du revêtement orienté compact et connexe de M .

4.3 Holonomie et courbure

Dans cette section, nous relierons les notions de courbure et de transport parallèle. Soit M une variété riemannienne orientable (ou un ouvert orientable d'une variété riemannienne) de dimension 2. Soit D un domaine régulier difféomorphe à un disque fermé du plan de rayon $R > 0$. On note $p \in D$ le point dont l'image est le centre du disque, $c = \partial D$, le bord orienté de D . On suppose c paramétré par la longueur d'arc à partir d'un point $q \in \partial D$

$$c : [0, L] \rightarrow M : s \mapsto c(s), \quad \|c'(s)\| = 1, \quad \forall s \in [0, L], \quad c(0) = q,$$

où L est la longueur de c . Soit $v \in T_q M$ un vecteur tangent à M en q , tel que $\|v\|_q = 1$. On note $v(s)$ le transporté parallèle de v le long de c , et

$$\psi(s) = \angle(v(s), c'(s)), \quad (4.44)$$

l'angle orienté entre le transporté parallèle et la tangente à la courbe c . L'holonomie de la connexion de Levi-Civita le long de c mesure la variation de cet angle en un tour complet. Nous allons établir que cette variation est reliée à la courbure de Gauss de la variété M . Nous introduisons quelques notations et débutons par un lemme, avant d'énoncer le résultat.

On notera $c_r, 0 < r \leq R$, la courbe positivement orientée qui se projette sur le cercle de rayon r dans le disque de rayon R auquel D est difféomorphe. On construit alors un repère orthonormé orienté $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ sur un voisinage ouvert de $D \setminus \{p\}$ avec \tilde{e}_1 tangent aux courbes c_r . Notons que par construction

$$\text{ind}_p(\tilde{e}_1) = 1. \quad (4.45)$$

On peut aussi construire un repère orthonormé orienté (e_1, e_2) sur un voisinage ouvert de c , tel que $e_1(c(s)) = v(s)$ coïncide avec le transporté parallèle de v le long de $c = \partial D$. On note ω_{12} et $\tilde{\omega}_{12}$ les 1-formes de connexion associées à ces deux repères.

Lemme 4.3.1.

$$c^*(\omega_{12}) = 0. \quad (4.46)$$

Démonstration. Par définition de l'image réciproque, on a

$$c^*(\omega_{12})_s \left(\frac{d}{ds} \right) = (\omega_{12})_{c(s)}(c'(s)).$$

Puisque $e_1(c(s)) = 1 e_1(c(s)) + 0 e_2(c(s))$, par définition de la dérivée covariante (4.10), en se rappelant (4.9), on a

$$\nabla_{c'(s)} e_1 = (\omega_{21})_{c(s)}(c'(s)) e_2(c(s)) = c^*(\omega_{21})_s \left(\frac{d}{ds} \right) e_2(c(s)),$$

et donc par définition du transport parallèle (4.11), puisque $\omega_{21} = -\omega_{12}$, on a

$$\begin{aligned} \nabla_{c'(s)} e_1 = 0, \quad \forall s \in [0, L] &\Leftrightarrow c^*(\omega_{12})_s \left(\frac{d}{ds} \right) = 0, \quad \forall s \in [0, L] \\ &\Leftrightarrow c^*(\omega_{12}) = 0, \end{aligned}$$

ce que nous voulions établir. \square

Théorème 4.3.2. *La variation de l'angle ψ (4.44) entre le transporté parallèle du vecteur v le long de $c = \partial D$ et la tangente à c en un tour est donnée en terme de la courbure de Gauss par la relation suivante*

$$\text{var}_{\partial D} \psi = 2\pi - \int_D K \sigma_M. \quad (4.47)$$

Démonstration. En vertu de (4.34), (4.23) et (4.46) (dans cet ordre), on a

$$\begin{aligned} \text{var}_{\partial D}\psi &= \psi(L) - \psi(0) = \int_0^L \psi'(s)ds = \int_c \tau \\ &= \int_c \omega_{12} - \int_c \tilde{\omega}_{12} = \int_0^L c^*(\omega_{12}) - \int_c \tilde{\omega}_{12} = - \int_c \tilde{\omega}_{12}. \end{aligned}$$

Par la formule de Stokes, en notant $D_{R,r}$ le fermé dont le bord orienté est $\partial D_{R,r} = c - c_r$, on a

$$\int_{D_{R,r}} d\tilde{\omega}_{12} = \int_c \tilde{\omega}_{12} - \int_{c_r} \tilde{\omega}_{12},$$

et donc, par définition de la courbure de Gauss (4.27), en se rappelant que $\tilde{\omega}_{21} = -\tilde{\omega}_{12}$, on obtient

$$\text{var}_{\partial D}\psi = - \int_{D_{R,r}} K\sigma_M + \int_{c_r} \tilde{\omega}_{21},$$

où σ_M (4.40) est la forme volume sur M . En passant à la limite $r \rightarrow 0$ dans cette équation et en utilisant (4.38), on obtient

$$\begin{aligned} \text{var}_{\partial D}\psi &= - \int_D K\sigma_M + 2\pi \text{ind}_p(\tilde{e}_1), \\ &= - \int_D K\sigma_M + 2\pi, \end{aligned}$$

où, dans la dernière égalité, on a utilisé (4.45). Ceci établit (4.47) et termine la démonstration du théorème. \square

Exemple 4.3.3. On considère la sphère

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3,$$

munie de la métrique induite par la métrique euclidienne, ce qui veut dire que le produit scalaire de deux vecteurs tangents en un point de S^2 est défini en faisant leur produit scalaire vus comme des vecteurs de \mathbb{R}^3 . On introduit des coordonnées sphériques sur la sphère par

$$x_1 = \cos\theta \cos\varphi, \quad x_2 = \cos\theta \sin\varphi, \quad x_3 = \sin\theta, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

On vérifie facilement que

$$e_1 = \frac{1}{\cos\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial\theta},$$

est un repère orthonormé sur $S^2 \setminus \{n, s\}$, où $n = (0, 0, 1)$ et $s = (0, 0, -1)$ dénotent respectivement le pôle nord et le pôle sud. Les 1-formes duales sont données par

$$\theta_1 = \cos\theta \, d\varphi, \quad \theta_2 = d\theta,$$

d'où l'on déduit la forme volume

$$\sigma_{S^2} = \theta_1 \wedge \theta_2 = \cos\theta \, d\varphi \wedge d\theta.$$

A partir de (4.1) on calcule facilement la 1-forme de connexion

$$\omega_{12} = -\sin\theta \, d\varphi.$$

Puisque

$$d\omega_{12} = \cos\theta \, d\varphi \wedge d\theta = \theta_1 \wedge \theta_2,$$

on déduit de (4.27) que la courbure de Gauss est donnée par $K = 1$. Considérons la courbe (un parallèle) c sur la sphère définie par $\theta = \theta_0$, et soit D la calotte polaire contenant le pôle nord n dont c est le bord orienté $c = \partial D$. En vertu de (4.47), l'holonomie le long de c est donnée par

$$\begin{aligned} \text{var}_{\partial D}\psi &= 2\pi - \int_D K \sigma_{S^2} \\ &= 2\pi - \int_0^{2\pi} \left(\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta \right) d\varphi = 2\pi - 2\pi(1 - \sin\theta_0) = 2\pi \sin\theta_0. \end{aligned}$$

Ceci veut dire qu'en transportant parallèlement un vecteur tangent le long du parallèle $\theta = \theta_0$, après un tour, le vecteur obtenu a tourné d'un angle égal à $-2\pi \sin\theta_0$ par rapport au vecteur de départ.

Remarque 4.3.4. La formule (4.47) reste encore valable quand on l'applique à un domaine D dont le bord est \mathcal{C}^∞ par morceaux, pour autant que l'on tienne compte des variations discontinues de l'angle ψ à chaque coin. En particulier, si ∂D est un triangle formé par trois géodésiques, en transportant parallèlement le vecteur tangent à chaque côté du triangle, la formule donne

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = 2\pi - \int_D K \sigma_M,$$

avec $\psi_i, 1 \leq i \leq 3$, les angles extérieurs aux trois coins du triangle. En terme des angles intérieurs $\alpha_i, 1 \leq i \leq 3$, puisque $\psi_i + \alpha_i = \pi$, on trouve la célèbre formule de Gauss donnant la somme des angles intérieurs d'un triangle géodésique

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + \int_D K \sigma_M.$$

4.4 Champs de tenseurs

4.4.1 Fibrés tensoriels

Définition 4.4.1. Soit E un espace vectoriel réel. Un tenseur r **fois contravariant** et s **fois covariant** est une forme multilinéaire

$$t : \underbrace{E^* \times \dots \times E^*}_{r \text{ fois}} \times \underbrace{E \times \dots \times E}_{s \text{ fois}} \rightarrow \mathbb{R},$$

où E^* est le dual de E . Nous dirons que t est un tenseur de type (r, s) , et nous noterons E_s^r l'espace vectoriel réel des tenseurs de type (r, s) .

Pour $v_1, \dots, v_r \in E$ et $\alpha^1, \dots, \alpha^s \in E^*$, $v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes \alpha^1 \otimes \dots \otimes \alpha^s \in E_s^r$ est défini comme suit

$$\begin{aligned} & v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes \alpha^1 \otimes \dots \otimes \alpha^s(\beta^1, \dots, \beta^r, w_1, \dots, w_s) \\ &= \beta^1(v_1) \dots \beta^r(v_r) \alpha^1(w_1) \dots \alpha^s(w_s), \quad \forall \beta^1, \dots, \beta^r \in E^*, \forall w_1, \dots, w_s \in E. \end{aligned}$$

Proposition 4.4.2. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n , soit $e_i, 1 \leq i \leq n$, une base de E et soit $e_*^i, 1 \leq i \leq n$, la base duale de E^* définie par $e_*^i(e_j) = \delta_j^i$. Alors les vecteurs

$$e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e_*^{j_1} \otimes \dots \otimes e_*^{j_s}, \quad 1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n, \quad 1 \leq j_1, \dots, j_s \leq n,$$

forment une base de l'espace vectoriel E_s^r , c'est-à-dire tout tenseur t de type (r, s) s'écrit univoquement sous la forme

$$t = \sum_{(i),(j)} t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e_*^{j_1} \otimes \dots \otimes e_*^{j_s}, \quad (4.48)$$

où $(i), (j)$ sont des abréviations pour $1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n, 1 \leq j_1, \dots, j_s \leq n$.

Démonstration. Le résultat découle immédiatement du fait que les membres de gauche et de droite de (4.48) sont des formes multilinéaires, ce qui donne

$$t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = t(e_*^{i_1}, \dots, e_*^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s}),$$

et établit la proposition. □

La proposition suivante donne la formule de tranformation des coordonnées d'un tenseur sous un changement de base et est laissée en exercice au lecteur.

Proposition 4.4.3. Sous un changement de base

$$e_i = \sum_{k=1}^n a_i^k f_k, \quad e_*^i = \sum_{k=1}^n b_k^i f_*^k, \quad (4.49)$$

avec f_*^k , la base duale de la base f_k , $1 \leq k \leq n$, on a

$$\begin{aligned} t &= \sum_{(i),(j)} t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e_*^{j_1} \otimes \dots \otimes e_*^{j_s}, \\ &= \sum_{(k),(l)} {}'t_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r} f_{k_1} \otimes \dots \otimes f_{k_r} \otimes f_*^{l_1} \otimes \dots \otimes f_*^{l_s}, \end{aligned}$$

avec

$${}'t_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r} = \sum_{(i),(j)} t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} a_{i_1}^{k_1} \dots a_{i_r}^{k_r} b_{l_1}^{j_1} \dots b_{l_s}^{j_s}. \quad (4.50)$$

Tout comme nous avons défini dans le Chapitre 2 les champs de vecteurs, et dans le Chapitre 3 les formes différentielles sur les variétés, nous allons définir les champs de tenseurs. Les champs de vecteurs seront alors des champs de tenseurs de type $(1, 0)$, et les k -formes différentielles des champs de tenseurs antisymétriques de type $(0, k)$.

Définition 4.4.4. Soit M une variété lisse de dimension n . On définit les fibrés tensoriels de type (r, s) , r, s entiers positifs ou nuls, comme suit

$$T_s^r M = \coprod_{p \in M} (T_p M)_s^r,$$

et on note π la projection naturelle sur la base M ; $\pi(T) = p$, si $T \in (T_p M)_s^r$.

Proposition 4.4.5. Le fibré tensoriel $T_s^r M$ est naturellement muni d'une structure de variété \mathcal{C}^∞ .

Démonstration. Soit (U, φ) une carte locale de M , dont les coordonnées sont notées (x^1, \dots, x^n) . On définit une carte de $T_s^r M$:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) &\rightarrow \varphi(U) \times (\mathbb{R}^n)_s^r, \quad \tilde{\varphi}(T) = (\varphi(p), t), \text{ avec } p = \pi(T) \text{ et} \\ t(e_*^{i_1}, \dots, e_*^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s}) &= T\left((d\varphi^{i_1})_p, \dots, (d\varphi^{i_r})_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right)_p\right), \end{aligned}$$

où e_i , $1 \leq i \leq n$, est la base canonique de \mathbb{R}^n et φ^i dénote la i ème composante de φ . Soit (V, ψ) une autre carte locale de M , dont les coordonnées sont notées (y^1, \dots, y^n) . Notons $(\pi^{-1}(V), \tilde{\psi})$ la carte locale correspondante de $T_s^r M$. Pour $T \in \pi^{-1}(U \cap V)$, avec $\pi(T) = p$, on a

$$\begin{aligned} T &= \sum_{(i),(j)} t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)_p \otimes \dots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right)_p \otimes (d\varphi^{j_1})_p \otimes \dots \otimes (d\varphi^{j_s})_p \\ &= \sum_{(k),(l)} {}'t_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r} \left(\frac{\partial}{\partial y^{k_1}}\right)_p \otimes \dots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial y^{k_r}}\right)_p \otimes (d\psi^{l_1})_p \otimes \dots \otimes (d\psi^{l_s})_p. \end{aligned}$$

Puisque

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^i}(\varphi(p)) \left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)_p \text{ et } (d\varphi^i)_p = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^k}(\psi(p))(d\psi^k)_p,$$

où $y^k = \psi^k \circ \varphi^{-1}$ et $x^i = \varphi^i \circ \psi^{-1}$, en vertu de (4.49) et (4.50), le changement de cartes sur $T_s^r M$ est donné par

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} : \varphi(U \cap V) \times (\mathbb{R}^n)_s^r &\rightarrow \psi(U \cap V) \times (\mathbb{R}^n)_s^r, \\ \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x, t) &= (\psi \circ \varphi^{-1}(x), 't), \text{ avec} \\ 't_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r} &= \sum_{(i),(j)} t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}}(x) \dots \frac{\partial y^{k_r}}{\partial x^{i_r}}(x) \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{l_1}}(y(x)) \dots \frac{\partial x^{j_s}}{\partial y^{l_s}}(y(x)), \end{aligned}$$

avec $y(x) = \psi \circ \varphi^{-1}(x)$, qui est bien une application de classe \mathcal{C}^∞ . Ceci termine la démonstration. \square

Définition 4.4.6. Soit M une variété lisse, de dimension n . Un champ de tenseurs de type (r, s) sur M , est la donnée d'une section T de classe \mathcal{C}^∞ du fibré tensoriel $T_s^r M$; i.e. $T \in \mathcal{C}^\infty(M, T_s^r M)$ et $\pi \circ T = id$.

4.4.2 Tenseur de Riemann et symboles de Christoffel

Dans la Section 4.1, nous avons défini la dérivée covariante (pour la connexion de Levi-Civita) en termes d'une base orthonormée sur un ouvert U de la variété. En particulier, une telle base existe toujours dans le domaine d'une carte locale. Dans cette dernière section, nous traduisons cette définition dans la base canonique d'une carte locale, associée aux axes de coordonnées dans cette carte, et nous faisons le lien avec le calcul tensoriel très utilisé en physique notamment. Contrairement au reste du cours, la position supérieure ou inférieure des indices sera importante, en référence au formalisme tensoriel introduit dans la Section 4.4.1.

Soit (U, φ) un domaine de carte locale d'une variété riemannienne M , dont les coordonnées sont notées (x^1, \dots, x^n) . Le produit scalaire dans les coordonnées de cette carte est noté

$$g_{ij}(p) = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p \right\rangle_p.$$

Nous notons

$$G = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, \quad G^{-1} = (g^{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, \quad (4.51)$$

les matrices symétriques correspondantes. La métrique définit un tenseur symétrique deux fois covariant sur M comme suit

$$g(p) : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}, (X_p, Y_p) \mapsto g(p)(X_p, Y_p) = \langle X_p, Y_p \rangle_p,$$

dont l'expression locale est

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

La métrique étant non dégénérée, elle définit un isomorphisme

$$T_p M \rightarrow T_p^* M : X_p \mapsto \langle X_p, \cdot \rangle_p,$$

et donc un tenseur symétrique deux fois contravariant, noté g^{-1} , via

$$g^{-1}(p) : T_p^* M \times T_p^* M \rightarrow \mathbb{R}, \quad g^{-1}(p)(\langle X_p, \cdot \rangle_p, \langle Y_p, \cdot \rangle_p) = \langle X_p, Y_p \rangle_p.$$

On vérifie facilement que l'expression locale de ce tenseur est donnée par

$$g^{-1} = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j},$$

où g^{ij} sont les entrées de la matrice G^{-1} définie en (4.51), ce qui justifie la notation g^{-1} pour ce tenseur.

Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée sur U et $(\theta_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base duale de 1-formes différentielles vérifiant $\theta_i(e_j) = \delta_{ij}$. Notons $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ les matrices de passage vers les bases canoniques définies par les coordonnées locales (x^1, \dots, x^n) de la carte (U, φ) définies comme suit :

$$\theta_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} dx^j, \quad e_i = \sum_{j=1}^n b_{ji} \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (4.52)$$

Lemme 4.4.7.

$$AB = I, \quad G = A^T A \text{ et } G^{-1} = BB^T. \quad (4.53)$$

Démonstration. On a

$$\delta_{ij} = \theta_i(e_j) = \sum_{k=1}^n a_{ik} dx^k \left(\sum_{l=1}^n b_{lj} \frac{\partial}{\partial x^l} \right) = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj},$$

ce qui établit $AB = I$. De là on déduit que

$$(e_1, \dots, e_n) = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) B \Leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) = (e_1, \dots, e_n) A, \quad (4.54)$$

et donc

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n a_{ki} e_k, \sum_{l=1}^n a_{lj} e_l \right\rangle = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj},$$

ce qui établit $G = A^T A$ et donc $G^{-1} = A^{-1} (A^{-1})^T = BB^T$, ce qui termine la démonstration. \square

La proposition suivante traduit la définition de la dérivée covariante donnée en (4.10) en termes des coordonnées de la carte locale (U, φ) .

Proposition 4.4.8. *Soient X, Y deux champs de vecteurs sur une variété riemannienne M de dimension n . Soit (U, φ) une carte locale dont les coordonnées sont notées (x^1, \dots, x^n) , et soit $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ la base canonique de champs de vecteurs associée à ces coordonnées. Pour $p \in M$, notons $X_p = c'(0)$ où $c(t)$ est une courbe de classe \mathcal{C}^∞ définie sur un intervalle ouvert I contenant 0 et telle que $c(0) = p$. Notons aussi $z^i(t)$ les coordonnées de $Y_{c(t)}$ dans la base canonique, c'est-à-dire*

$$Y_{c(t)} = \sum_{i=1}^n z^i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{c(t)}, \quad \forall t \in I.$$

Alors, la dérivée covariante définie par la connexion de Levi-Civita est donnée par

$$\nabla_{X_p} Y = \sum_{i=1}^n \left(\frac{dz^i}{dt}(0) + \sum_{j=1}^n (\gamma_{ij})_p(X_p) z^j(0) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p, \quad (4.55)$$

où γ_{ij} est la 1-forme différentielle sur U donnée par l'entrée (i, j) de la matrice $\gamma = (\gamma_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ donnée par

$$\gamma = BdA + B\omega A, \quad (4.56)$$

avec $\omega = (\omega_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de connexion définie en (4.4) en terme des 1-formes différentielles $\theta_i, 1 \leq i \leq n$, et A, B les matrices définies par (4.52).

Démonstration. On se rappelle que, en vertu de (4.12), la dérivée covariante définie en (4.10) s'écrit sous la forme matricielle

$$\nabla_{X_p} Y = e_p^T (\dot{y}(0) + \omega_p(X_p)y(0)),$$

avec $e_p^T = ((e_1)_p, \dots, (e_n)_p)$ et $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T$. En notant $z(t) = (z^1(t), \dots, z^n(t))^T$, en vertu de (4.54), on a

$$y(t) = A(c(t))z(t) \Leftrightarrow \dot{y}(0) = A(p)\dot{z}(0) + dA_p(X_p)z(0),$$

d'où, en utilisant (4.54), $BA = I$, et en notant $(\partial_i)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$, l'on déduit que

$$\begin{aligned} \nabla_{X_p} Y &= ((\partial_1)_p, \dots, (\partial_n)_p) B(p) (A(p)\dot{z}(0) + dA_p(X_p)z(0)) \\ &+ ((\partial_1)_p, \dots, (\partial_n)_p) B(p) \omega_p(X_p) A(p) z(0), \\ &= ((\partial_1)_p, \dots, (\partial_n)_p) \dot{z}(0) \\ &+ ((\partial_1)_p, \dots, (\partial_n)_p) (B(p)dA_p(X_p) + B(p)\omega_p(X_p)A(p)) z(0), \end{aligned}$$

ce qui, en définissant γ par la formule (4.56), s'écrit

$$\nabla_{X_p} Y = ((\partial_1)_p, \dots, (\partial_n)_p) (\dot{z}(0) + \gamma_p(X_p)z(0)),$$

qui est une écriture matricielle de (4.55), et achève la démonstration. \square

Le théorème suivant calcule explicitement les 1-formes différentielles de connexion γ_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, en terme de la métrique.

Théorème 4.4.9. *Dans les coordonnées (x^1, \dots, x^n) d'une carte (U, φ) d'une variété riemannienne M de dimension n , les 1-formes γ_{ij} définissant la connexion de Levi-Civita, sont données par*

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{jk}^i dx^k, \quad (4.57)$$

avec

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{il} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right). \quad (4.58)$$

Les fonctions Γ_{jk}^i sur U sont appelées les symboles de Christoffel.

Démonstration. Pour simplifier les notations, on note $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k}$, $1 \leq k \leq n$. En évaluant l'entrée (i, j) de (4.56) en ∂_k , ainsi que (4.57), on obtient

$$\Gamma_{jk}^i = \sum_{p=1}^n b_{ip} \partial_k a_{pj} + \sum_{1 \leq p, q, r \leq n} a_{rk} b_{ip} a_{qj} \omega_{pq}(e_r).$$

Par définition de la connexion de Levi-Civita (4.3), on a

$$\omega_{pq}(e_r) = -\frac{1}{2} \theta_p([e_q, e_r]) - \frac{1}{2} \theta_q([e_r, e_p]) + \frac{1}{2} \theta_r([e_p, e_q]).$$

On calcule facilement, vu que par (4.53) $A(\partial_t B) + (\partial_t A)B = 0$, que l'on a

$$\begin{aligned} \theta_r([e_p, e_q]) &= \sum_{1 \leq s, t \leq n} a_{rs} (b_{tp} \partial_t (b_{sq}) - b_{tq} \partial_t (b_{sp})) \\ &= \sum_{1 \leq s, t \leq n} (b_{tq} b_{sp} - b_{tp} b_{sq}) \partial_t (a_{rs}), \end{aligned}$$

et donc, par permutations cycliques de r, p, q , on obtient

$$\begin{aligned} 2\Gamma_{jk}^i &= 2 \sum_{p=1}^n b_{ip} \partial_k a_{pj} + \sum_{1 \leq p, q, r, s, t \leq n} a_{rk} b_{ip} a_{qj} (b_{tq} b_{sp} - b_{tp} b_{sq}) \partial_t (a_{rs}) \\ &\quad - \sum_{1 \leq p, q, r, s, t \leq n} a_{rk} b_{ip} a_{qj} (b_{tr} b_{sq} - b_{tq} b_{sr}) \partial_t (a_{ps}) \\ &\quad - \sum_{1 \leq p, q, r, s, t \leq n} a_{rk} b_{ip} a_{qj} (b_{tp} b_{sr} - b_{tr} b_{sp}) \partial_t (a_{qs}). \end{aligned}$$

En utilisant $AB = I$ et $G^{-1} = BB^T$, cette équation s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} 2\Gamma_{jk}^i &= 2 \sum_{p=1}^n b_{ip} \partial_k a_{pj} + \sum_{1 \leq r, s \leq n} g^{si} a_{rk} \partial_j a_{rs} - \sum_{1 \leq r, t \leq n} g^{ti} a_{rk} \partial_t a_{rj} \\ &\quad - \sum_{p=1}^n b_{ip} \partial_k a_{pj} + \sum_{p=1}^n b_{ip} \partial_j a_{pk} \\ &\quad - \sum_{1 \leq q, t \leq n} g^{ti} a_{qj} \partial_t (a_{qk}) + \sum_{1 \leq q, s \leq n} g^{si} a_{qj} \partial_k a_{qs}. \end{aligned}$$

Puisque par (4.53) $(\partial_t A^T)A + A^T(\partial_t A) = \partial_t G$ et $G^{-1}A^T = B$, cette dernière équation s'écrit

$$\begin{aligned} 2\Gamma_{jk}^i &= \sum_{p=1}^n b_{ip} (\partial_k a_{pj} + \partial_j a_{pk}) - \sum_{t=1}^n g^{ti} \partial_t g_{kj} \\ &\quad + \sum_{s=1}^n g^{si} \left(\partial_j g_{ks} - \sum_{r=1}^n a_{rs} \partial_j a_{rk} \right) + \sum_{s=1}^n g^{si} \left(\partial_k g_{js} - \sum_{q=1}^n a_{qs} \partial_k a_{qj} \right), \\ &= \sum_{p=1}^n b_{ip} (\partial_k a_{pj} + \partial_j a_{pk}) - \sum_{t=1}^n g^{ti} \partial_t g_{kj} \\ &\quad + \sum_{s=1}^n g^{si} \partial_j g_{ks} - \sum_{r=1}^n b_{ir} \partial_j a_{rk} + \sum_{s=1}^n g^{si} \partial_k g_{js} - \sum_{q=1}^n b_{iq} \partial_k a_{qj}, \\ &= \sum_{s=1}^n g^{is} (\partial_k g_{js} + \partial_j g_{ks} - \partial_s g_{jk}), \end{aligned}$$

ce qui établit (4.58) et achève la démonstration. \square

Corollaire 4.4.10. *Dans une carte locale (U, φ) , dont les coordonnées sont notées (x^1, \dots, x^n) , l'équation des géodésiques pour la connexion de Levi-Civita est donnée par*

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \sum_{1 \leq j, k \leq n} \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (4.59)$$

avec Γ_{jk}^i les symboles de Christoffel définis en (4.58).

Démonstration. Par définition (4.13), une géodésique satisfait $\nabla_{c'(t)} c' = 0$. En notant $c(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$, un simple calcul utilisant (4.55) et (4.57) donne

$$\nabla_{c'(t)} c' = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d^2 x^i(t)}{dt^2} + \sum_{1 \leq j, k \leq n} \Gamma_{jk}^i(c(t)) \frac{dx^j(t)}{dt} \frac{dx^k(t)}{dt} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{c(t)},$$

ce qui établit (4.59) et termine la démonstration. \square

On définit comme précédemment la matrice de courbure

$$\Omega = d\gamma + \gamma \wedge \gamma. \quad (4.60)$$

Pour X, Y, Z trois champs de vecteurs sur U , on définit

$$R(X, Y)Z = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \Omega_j^i(X, Y) z^j \right) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (4.61)$$

où $Z = \sum_{j=1}^n z^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, et Ω_j^i sont les 2-formes différentielles qui forment les entrées de la matrice de courbure avec i l'indice ligne et j l'indice colonne, $1 \leq i, j \leq n$.

Lemme 4.4.11. $\forall p \in M, \forall X_p, Y_p \in T_p M$, l'application linéaire

$$R_p(X_p, Y_p) : T_p M \rightarrow T_p M : Z_p \mapsto R_p(X_p, Y_p)Z_p, \quad (4.62)$$

où la notation R_p signifie que, dans la formule (4.61), les formes de courbure Ω_j^i ainsi que les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x^i}$ sont évalués en p , est bien définie indépendamment du choix des coordonnées locales.

Démonstration. Soit $p \in M$ tel que p soit dans l'intersection $U \cap V$ de deux domaines de cartes (U, φ) et (V, ψ) dont les coordonnées sont notées respectivement $(x^1, \dots, x^n) \in \varphi(U)$ et $(y^1, \dots, y^n) \in \psi(V)$. Pour tout $Z_p \in T_p M$, on a

$$Z_p = \sum_{i=1}^n v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = \sum_{i=1}^n w^i \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)_p,$$

avec

$$w = Jv, \quad J = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x^1, \dots, x^n) \right)_{1 \leq i, j \leq n}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix},$$

où $y^i(x^1, \dots, x^n)$ est une abréviation pour $\psi^i \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n)$. Si l'on note $\tilde{\Omega}$ la matrice de courbure calculée dans les coordonnées (y^1, \dots, y^n) , par un argument semblable à celui utilisé pour établir (4.17), on montre que

$$\tilde{\Omega} = J\Omega J^{-1} \text{ sur } U \cap V,$$

et donc

$$\tilde{\Omega}_p(X_p, Y_p)w = J\Omega_p(X_p, Y_p)J^{-1}w = J\Omega_p(X_p, Y_p)v,$$

où $\Omega_p = ((\Omega_j^i)_p)_{1 \leq i, j \leq n}$, ce qui établit le résultat et achève la démonstration. \square

Le lemme précédent (4.62) permet de définir, pour tout $p \in M$, une application multilinéaire

$$R(p) : T_p^*M \times T_pM \times T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}, (\alpha_p, X_p, Y_p, Z_p) \mapsto \alpha_p(R(Y_p, Z_p)X_p),$$

qui définit donc un tenseur de type $(1, 3)$ sur M , appelé tenseur de courbure ou tenseur de Riemann. Dans une carte locale (U, φ) , en notant les coordonnées locales (x^1, \dots, x^n) et la base canonique de champs de vecteurs $(\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \partial_n = \frac{\partial}{\partial x^n})$, ce tenseur s'écrit

$$R = \sum_{1 \leq i, j, k, l \leq n} R_{ijkl}^i \partial_i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l,$$

avec

$$R_{ijkl}^i = R(dx^i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = dx^i(R(\partial_k, \partial_l)\partial_j) = \Omega_j^i(\partial_k, \partial_l),$$

et donc

$$\Omega_j^i = \sum_{1 \leq k < l \leq n} R_{ijkl}^i dx^k \wedge dx^l.$$

Un calcul direct à partir de (4.57) et (4.60) donne

$$R_{ijkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} + \sum_{h=1}^n (\Gamma_{hk}^i \Gamma_{jl}^h - \Gamma_{hl}^i \Gamma_{jk}^h). \quad (4.63)$$

Le résultat suivant montre que le tenseur de courbure mesure la non-commutativité des dérivées covariantes.

Théorème 4.4.12. *Quels que soient X, Y, Z champs de vecteurs sur M , on a*

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (4.64)$$

Démonstration. Dans le domaine d'une carte locale (U, φ) , en notant les coordonnées (x^1, \dots, x^n) et $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, on a

$$Z = \sum_{i=1}^n z^i \partial_i.$$

Par définition de la dérivée covariante (4.55), on a

$$\nabla_X Z = \sum_{i=1}^n (X z^i + \sum_{j=1}^n \gamma_{ij}(X) z^j) \partial_i,$$

et donc, en appliquant une deuxième fois (4.55), on obtient

$$\begin{aligned} \nabla_Y \nabla_X Z = \sum_{i=1}^n \left\{ Y(X z^i) + \sum_{j=1}^n \left((X z^j) \gamma_{ij}(Y) + (Y z^j) \gamma_{ij}(X) \right) \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^n z^j \left(Y(\gamma_{ij}(X)) + \sum_{k=1}^n \gamma_{ik}(Y) \gamma_{kj}(X) \right) \right\} \partial_i. \end{aligned}$$

De là, en utilisant (3.6) et (3.34), on obtient

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z &= \sum_{i=1}^n \left\{ [X, Y] z^i + \sum_{j=1}^n z^j \left(d\gamma_{ij}(X, Y) + \gamma_{ij}([X, Y]) \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{1 \leq j, k \leq n} z^j \gamma_{ik} \wedge \gamma_{kj}(X, Y) \right\} \partial_i, \\ &= \nabla_{[X, Y]} Z + R(X, Y)Z, \end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte de la définition de la dérivée covariante (4.55) et de la définition du tenseur de courbure (4.61) en terme de la matrice de courbure (4.60). Ceci établit (4.64) et achève la démonstration. \square

4.5 Exercices

1. Soit un champ de repères orthonormés (e_1, e_2, e_3) de classe \mathcal{C}^∞ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} e_i : U &\rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto e_i(x_1, x_2, x_3), \\ (e_i, e_j) &= \delta_{ij}, \text{ avec } (\cdot, \cdot) \text{ le produit scalaire habituel sur } \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

On note

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) \end{pmatrix},$$

la matrice orthogonale dont les colonnes sont les coordonnées cartésiennes dans \mathbb{R}^3 de $e_1(x)$, $e_2(x)$ et $e_3(x)$, avec $x = (x_1, x_2, x_3) \in U$. On note $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ la base de 1-formes différentielles sur U duale de celle des e_i , c'est-à-dire

$$\Theta_i(e_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

(a) Montrer qu'il existe des 1-formes différentielles Ω_{ij} , $1 \leq i, j \leq 3$, sur U , telles que

$$De_i = \sum_{j=1}^3 \Omega_{ji} e_j,$$

et que la matrice 3×3 de ces 1-formes différentielles $\Omega = (\Omega_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ est donnée par

$$\Omega = A^T D A.$$

En déduire que $\Omega_{ji} = -\Omega_{ij}$.

(b) Etablir que pour tout $1 \leq i, j \leq 3$, on a

$$d\Theta_i + \sum_{j=1}^3 \Omega_{ij} \wedge \Theta_j = 0, \quad (4.65)$$

$$d\Omega_{ij} + \sum_{k=1}^3 \Omega_{ik} \wedge \Omega_{kj} = 0. \quad (4.66)$$

(c) Si $c : I \rightarrow U$ est une courbe \mathcal{C}^∞ , et que l'on pose

$$e_i(t) = e_i(c(t)),$$

montrer que

$$\begin{pmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ \Omega_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Omega_{32})_{c(t)}(c'(t)) \\ (\Omega_{13})_{c(t)}(c'(t)) \\ (\Omega_{21})_{c(t)}(c'(t)) \end{pmatrix}, \quad (4.67)$$

sont les coordonnées dans la base mobile $(e_1(t), e_2(t), e_3(t))$ du vecteur de rotation instantanée, comme défini en mécanique analytique, voir [1].

2. La courbure de Gauss pour les surfaces dans \mathbb{R}^3 . Soit M une sous-varité de \mathbb{R}^3 de dimension 2, munie de la métrique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induite par la métrique euclidienne. Soit $V = U \cap M$ un ouvert de M , avec $U \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert sur lequel on peut choisir un champ de repères orthonormés (e_1, e_2, e_3) tel que

$$e_1(x), e_2(x) \in T_x M, \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in V.$$

En théorie classique des surfaces, l'application

$$e_3 : V \rightarrow S^2, x \mapsto e_3(x),$$

s'appelle l'application de Gauss. L'opposé de sa différentielle

$$-(de_3)_x : T_x M \rightarrow T_{e_3(x)} S^2 = T_x M,$$

est un endomorphisme de l'espace tangent. La courbure de Gauss en x est définie classiquement comme le déterminant de cet endomorphisme

$$K(x) = \det(-(de_3)_x). \quad (4.68)$$

On note $\theta_i, \omega_{ij}, 1 \leq i, j \leq 3$, la restriction à V des 1-formes différentielles Θ_i et Ω_{ij} sur U définies dans l'exercice 1.

(a) Montrer que $\theta_3 = 0$. En déduire à partir de (4.65) que

$$\omega_{31} \wedge \theta_1 + \omega_{32} \wedge \theta_2 = 0,$$

et que

$$h(x) : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}, (X_x, Y_x) \mapsto \langle (-de_3)_x(X_x), Y_x \rangle_x,$$

définit un tenseur symétrique deux fois covariant, que l'on appelle classiquement la deuxième forme fondamentale de la surface, la première forme fondamentale étant définie par le tenseur métrique.

(b) En utilisant (4.66), montrer que

$$(d\omega_{12})_x = K(x)(\theta_1)_x \wedge (\theta_2)_x, \quad \forall x \in V,$$

avec $K(x)$ défini comme en (4.68). Ceci établit que la courbure de Gauss définie en terme de la deuxième forme fondamentale, ne dépend en fait que de la métrique (Théorème egregium de Gauss).

3. La connexion de Levi-Civita pour les surfaces dans \mathbb{R}^3 . On reprend les mêmes notations que dans l'exercice 2.

(a) En utilisant (4.65) montrer que $\omega_{12} = -\omega_{21}$ est la 1-forme différentielle définissant la connexion de Levi-Civita c'est-à-dire (voir (4.21)) que l'on a

$$d\theta_1 + \omega_{12} \wedge \theta_2 = 0, \quad d\theta_2 + \omega_{21} \wedge \theta_1 = 0.$$

(b) Soient X, Y deux champs de vecteurs sur M . Soit $p \in V$ et $c : I \rightarrow V$ une courbe \mathcal{C}^∞ définie sur un intervalle ouvert I contenant 0, telle que $c(0) = p$ et $c'(0) = X_p$. Ecrivons

$$Y_{c(t)} = \sum_{i=1}^2 y_i(t) e_i(c(t)), \quad t \in I.$$

Démontrer que

$$\Pi_{T_p M} \left(\frac{d}{dt} (Y_{c(t)})|_{t=0} \right) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{dy_i}{dt}(0) + \sum_{j=1}^2 \omega_{ij}(X_p) y_j(0) \right) e_i(p),$$

où $\Pi_{T_p M}$ dénote la projection orthogonale sur l'espace tangent $T_p M$. Ceci montre que pour une surface M plongée dans \mathbb{R}^3 , la dérivée covariante définie par la connexion de Levi-Civita (voir (4.10)) est donnée par

$$\nabla_{X_p} Y = \Pi_{T_p M} \left(\frac{d}{dt} (Y_{c(t)})|_{t=0} \right).$$

(c) Dédurre de (4.67) que le transport parallèle d'un vecteur tangent le long d'une courbe sur la surface s'obtient en faisant rouler le plan tangent sans glissement et sans pivotement le long de cette courbe.

4. La 2-forme élément d'aire en coordonnées locales.

(a) Soit M une sous-variété orientable de dimension 2 de \mathbb{R}^3 . On munit M de la métrique induite par le produit scalaire habituel sur \mathbb{R}^3 , et on note σ_M la forme volume associée. Soit (U, φ) une carte locale de M compatible avec l'orientation choisie. On note (u_1, u_2) les coordonnées locales et

$$g(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} g_{11}(u_1, u_2) & g_{12}(u_1, u_2) \\ g_{12}(u_1, u_2) & g_{22}(u_1, u_2) \end{pmatrix},$$

la matrice définissant la métrique dans cette carte locale, i.e.

$$g_{ij}(u_1, u_2) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial u_i} \right)_{\varphi^{-1}(u_1, u_2)}, \left(\frac{\partial}{\partial u_j} \right)_{\varphi^{-1}(u_1, u_2)} \right),$$

où (\cdot, \cdot) dénote le produit scalaire habituel sur \mathbb{R}^3 . Montrer que l'expression locale de la forme σ_M dans cette carte est donnée par

$$(\varphi^{-1})^*(\sigma_M) = \sqrt{\det g} \, du_1 \wedge du_2.$$

(b) Calculer l'aire de la sphère $S_R^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\}$ en utilisant la carte

$$]0, 2\pi[\times]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow U \subset S_R^2 \quad (\varphi, \theta) \mapsto (R \cos \theta \cos \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta).$$

(c) Calculer l'aire d'un tore de révolution T autour de l'axe vertical dans \mathbb{R}^3 en utilisant la carte

$$]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[\rightarrow U \subset T \quad (\varphi, \theta) \mapsto ((R + r \cos \theta) \cos \varphi, (R + r \cos \theta) \sin \varphi, r \sin \theta),$$

avec $0 < r < R$.

5. (a) Calculer la courbure de Gauss pour la sphère S_R^2 et le tore de révolution T considérés dans l'exercice 4 (b) et (c).

(b) Evaluer sans utiliser le théorème de Gauss-Bonnet

$$\frac{1}{2\pi} \int_{S^2} K \, \sigma_{S^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi} \int_T K \, \sigma_T.$$

6. **Le demi-plan de Poincaré.** Soit \mathbb{H}^2 le demi-plan supérieur

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}.$$

On munit \mathbb{H}^2 de la métrique riemannienne

$$\langle \xi, \eta \rangle_{(x,y)} = \frac{(\xi, \eta)}{y^2}, \quad \xi, \eta \in T_{(x,y)}\mathbb{H}^2 = \mathbb{R}^2,$$

où (\cdot, \cdot) est le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^2 . Démontrer que la courbure de Gauss est donnée par $K = -1$ en tout point.

7. Le disque de Poincaré.

(a) Montrer que l'application

$$\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \rightarrow \mathbb{D} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\},$$

$$z = x + iy \mapsto w = u + iv = \frac{1 + iz}{1 - iz},$$

est une bijection holomorphe, calculer explicitement son inverse et montrer qu'il est holomorphe.

(b) Montrer que le tenseur définissant la métrique hyperbolique sur \mathbb{H} dans l'exercice 6, est donné sur \mathbb{D} par

$$g = \frac{4}{(1 - (u^2 + v^2))^2} (du \otimes du + dv \otimes dv).$$

8. Soit $S^2 = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 : u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1\}$, la sphère unité de dimension 2 dans \mathbb{R}^3 . On note respectivement $n = (0, 0, 1)$ et $s = (0, 0, -1)$ le pôle nord et le pôle sud.

(a) Montrer que

$$\mathcal{A} = \{(U_1 = S^2 \setminus \{n\}, \varphi_1), (U_2 = S^2 \setminus \{s\}, \varphi_2)\},$$

où φ_1 dénote la projection stéréographique à partir du pôle nord et φ_2 dénote le complexe conjugué de la projection stéréographique à partir du pôle sud, est un atlas \mathcal{C}^∞ orienté sur S^2 .

(b) On note (x_1, x_2) les coordonnées locales dans la carte (U_1, φ_1) . Montrer que les champs de vecteurs X et Y définis sur $S^2 \setminus \{n\}$ par

$$X_p = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p \quad \text{et} \quad Y_p = \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)_p, \quad \forall p \in S^2 \setminus \{n\},$$

s'étendent en des champs de vecteurs \mathcal{C}^∞ sur S^2 et s'annulent au pôle nord.

9. On conserve les notations de l'exercice 8 et l'on munit la sphère S^2 de la métrique induite par la métrique euclidienne de \mathbb{R}^3 . On définit sur $S^2 \setminus \{n\}$ les champs de vecteurs

$$e_1 = \frac{X}{\|X\|} \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{Y}{\|Y\|}.$$

On note θ_1 et θ_2 les 1-formes duales sur $S^2 \setminus \{n\}$ définies par $\theta_i(e_j) = \delta_{ij}$, et ω_{12} l'unique 1-forme sur $S^2 \setminus \{n\}$ telle que $d\theta_1 = -\omega_{12} \wedge \theta_2$ et $d\theta_2 = \omega_{12} \wedge \theta_1$.

(a) Montrer que (e_1, e_2) est un repère orthonormé sur $S^2 \setminus \{n\}$ définissant la même orientation que celle de l'atlas choisi dans l'exercice 8 (a).

(b) Pour $0 < \varepsilon < 2$, considérons le domaine régulier

$$D_\varepsilon = \{(u_1, u_2, u_3) \in S^2 : u_3 \leq 1 - \varepsilon\}.$$

Evaluer explicitement l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_\varepsilon} \omega_{12}|_{\partial D_\varepsilon},$$

où ∂D_ε dénote le bord orienté de D_ε .

(c) En déduire la valeur de

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_\varepsilon} \omega_{12}|_{\partial D_\varepsilon}.$$

Quelle est l'interprétation géométrique de ce résultat? Justifier votre réponse, en précisant notamment les questions d'orientation sur un dessin.

10. Soit $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ la sphère unité de dimension 2 dans \mathbb{R}^3 , munie de la métrique induite par la métrique euclidienne de \mathbb{R}^3 . Soit le champ de vecteurs X sur S^2 défini par

$$X : x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

On munit la sphère S^2 de l'orientation définie par la normale sortante, et l'on note $n = (0, 0, 1)$ et $s = (0, 0, -1)$, le pôle nord et le pôle sud respectivement.

(a) Déterminer une base orthonormée d'orientation directe (e_1, e_2) sur l'ouvert $U = S^2 \setminus \{n, s\}$ avec

$$e_1 = \frac{X}{\|X\|}.$$

(b) Déterminer la base duale sur $U = S^2 \setminus \{n, s\}$ de 1-formes (θ_1, θ_2) telle que

$$\theta_i(e_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

(c) Déterminer, en termes des coordonnées (x_1, x_2, x_3) , ω_{21} l'unique 1-forme sur $U = S^2 \setminus \{n, s\}$ telle que

$$d\theta_1 = \omega_{21} \wedge \theta_2 \quad \text{et} \quad d\theta_2 = -\omega_{21} \wedge \theta_1.$$

(d) Soit S_ε le cercle d'équation $x_3 = 1 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 2$, sur S^2 , vu comme le bord orienté de $D_\varepsilon = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 | x_3 \geq 1 - \varepsilon\}$. Calculer

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{S_\varepsilon} \omega_{21} \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 2} \frac{1}{2\pi} \int_{S_\varepsilon} \omega_{21}.$$

Interpréter vos deux réponses en termes du champ de vecteurs X .

11. Soit la sphère $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ munie de la métrique induite par la métrique euclidienne.

(a) En utilisant (4.13), écrire le système de deux équations différentielles satisfait par les géodésiques en coordonnées sphériques.

(b) Démontrer que les géodésiques sont les grands cercles.

12. On considère le demi-plan de Poincaré introduit à l'exercice 6

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\},$$

muni de la métrique

$$\begin{pmatrix} g_{11}(x, y) & g_{12}(x, y) \\ g_{21}(x, y) & g_{22}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer les symboles de Christoffel.

(b) On considère la droite horizontale $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}, t \mapsto c(t) = (t, a)$, avec $a > 0$. Montrer qu'en transportant parallèlement un vecteur tangent de $(0, a)$ jusqu'en (t, a) , celui-ci effectue une rotation d'un angle $-\frac{t}{a}$.

(c) Montrer que les équations des géodésiques sont données par

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \frac{2}{y} \dot{x}\dot{y} &= 0, \\ \ddot{y} + \frac{1}{y}(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) &= 0. \end{aligned}$$

(d) Démontrer, en résolvant le système d'équations différentielles trouvé en (c), que les géodésiques de \mathbb{H} sont les demi-droites verticales et les demi-cercles centrés sur l'axe des x de rayons arbitraires.

(e) Que deviennent les géodésiques dans le modèle du disque de Poincaré décrit dans l'exercice 7?

13. Soit une surface de révolution autour de l'axe des z dans \mathbb{R}^3

$$(\varphi, z) \mapsto (x = r(z)\cos\varphi, y = r(z)\sin\varphi, z),$$

où $r(z)$ est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ , munie de la métrique induite par la métrique euclidienne.

(a) Écrire les équations des géodésiques.

(b) Montrer que le long de toute géodésique, on a $r \sin\alpha = \text{constante}$, où α désigne l'angle entre la géodésique et le méridien. En déduire que les géodésiques oscillent entre deux parallèles $z = z_0$ et $z = z_1$ de la surface.

(c) Déterminer explicitement le transport parallèle d'un vecteur tangent à la surface le long d'un parallèle $z = z_0$.

14. Soit M une variété riemannienne, $p \in M$ et (U, φ) une carte locale en p telle que $\varphi(p) = 0$, dont les coordonnées sont notées (x^1, \dots, x^n) . Soit

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \in T_p M.$$

Faisons subir à v un déplacement parallèle le long du contour fermé en p dont la projection dans la carte locale (U, φ) est un rectangle de longueur s et de largeur t construit sur les axes de coordonnées (x^k, x^l) (le parcours se fait dans le sens inverse des aiguilles d'une montre). On note $\tilde{v}(s, t)$ le vecteur déduit de v par transport parallèle. Prouver l'égalité suivante

$$\lim_{(s,t) \rightarrow (0,0)} \frac{\tilde{v}(s, t) - v}{st} = - \sum_{i,j=1}^n R_{jkl}^i(p) v^j \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p,$$

où $R_{jkl}^i(p)$ sont les coordonnées du tenseur de Riemann en p dans la carte (U, φ) , voir (4.63).

Bibliographie

- [1] V. Arnold, Mathematical methods of classical mechanics, GTM 60 Springer-Verlag, Second Edition 1989.
- [2] M. Berger, R. Gostiaux, Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces, P.U.F., Paris 1992.
- [3] S.S. Chern, W.H. Chen, K.S. Lam, Lectures on differential geometry, Series on University Mathematics -Vol. 1 - World Scientific, 2000.
- [4] M. P. do Carmo, Differential forms and applications, Universitext Springer, 1994.
- [5] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Presses Universitaires de Grenoble, Deuxième Edition 2010.