Analyse complexe

Luc Haine
Professeur à l'Université catholique de Louvain
Ecole de mathématique
Chemin du Cyclotron 2
B-1348 Louvain-la-Neuve

17 novembre 2020

Table des matières

1 Séries **7**
1.1 Séries numériques 7
1.2 Séries de fonctions 14
1.3 Exercices 18

2 Séries potentielles et fonctions analytiques **19**
2.1 Séries potentielles 19
2.2 Fonctions analytiques : définition et propriétés 23
2.3 Exercices 26

3 Fonctions holomorphes **29**
3.1 Définition et propriétés 29
3.2 Holomorphie des fonctions analytiques 33
3.3 Intégration le long de chemins 36
3.4 Analyticité des fonctions holomorphes 39
3.5 Les grands théorèmes sur les fonctions holomorphes 43
3.6 Exercices 47

4 Séries de Laurent, points singuliers **51**
4.1 Homotopie et intégrales de fonctions holomorphes 51
4.2 Séries de Laurent 53
4.3 Points singuliers isolés 57
4.4 Exercices 61

5 Théorème des résidus et applications **65**
5.1 Problème des primitives et logarithme complexe 65
5.2 Théorème des résidus 69
5.3 Calcul d'intégrales par la méthode des résidus 73
5.4 Zéros et pôles de fonctions méromorphes 84
5.5 Le résidu à l'infini 87
5.6 Exercices 91

Introduction

Les fonctions *analytiques d'une variable réelle* sur un intervalle ouvert I sont les fonctions infiniment continûment dérivables pour lesquelles la *série de Taylor* de la fonction converge vers la valeur de la fonction au voisinage de tout point $x_0 \in I$. Les notions de base sur la convergence des séries sont exposées au Chapitre 1.

Dans ce cas la série de Taylor, qu'on appelle aussi une *série entière*,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad x_0 \in I,$$

converge en fait sur un disque ouvert du plan complexe

$$\{z \in \mathbb{C} | \ |z - x_0| < R\}, \ R > 0,$$

comme nous l'établirons au Chapitre 2. La fonction $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(z - x_0)^n$, vue comme une fonction de la variable complexe z sur ce disque, est continûment $\mathbb{C}$-dérivable, ce qui signifie que la limite

$$f'(z) := \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(z + h) - f(z)}{h},$$

existe et est continue sur le disque ouvert. La définition de $\mathbb{C}$-dérivabilité est calquée sur la notion de dérivée d'une fonction de variable réelle et ne fait sens que parce que les nombres complexes forment un corps.

Les fonctions continûment $\mathbb{C}$-dérivables sur un ouvert du plan complexe sont étudiées au Chapitre 3, et sont appelées *fonctions holomorphes*. Le résultat fondamental et surprenant est que la propriété à priori plus faible d'*holomorphie* est en fait équivalente à l'*analycité* de la fonction sur l'ouvert, ce qui signifie que la fonction est infiniment continûment $\mathbb{C}$-dérivable et que le développement de Taylor converge vers la valeur de la fonction au voisinage de tout point. C'est la signification même du terme "holomorphe" qui vient du grec et signifie "de forme entière" (hólos "entier" et morphé "forme"). La démonstration de ce résulat est basée sur la formule intégrale de Cauchy. Nous verrons que, parmi les fonctions de deux variables réelles de classe $\mathcal{C}^1$ au sens de l'analyse réelle, les fonctions holomorphes sont celles qui satisfont les célèbres *équations de Cauchy-Riemann*.

Le Chapitre 4 est consacré aux fonctions holomorphes sur un ouvert du plan complexe, sauf en des points isolés. Au voisinage de ces points, on a un *développement de Laurent* en série doublement infinie

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Un cas particulier important est celui des *fonctions méromophes* pour lesquelles les coefficients $a_{-n}, n \geq 1$, sont tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux. "Méromorphe" vient aussi du grec (méros "partie" et morphé "forme"), la somme finie de puissances négatives de $(z - z_0)$ étant dans ce cas appelée la "partie principale" du développement de Laurent.

Le coefficient a_{-1} dans le développement de Laurent au voisinage d'un point singulier s'appelle le *résidu* de la fonction en ce point. Le Chapitre 5 est consacré au *théorème des résidus* qui donne une méthode de calcul d'intégrales, indépendante de la notion de primitive. Ce théorème est du à Cauchy, et constitue le résultat central de l'analyse complexe. Nous en étudierons de nombreuses applications.

Tous les chapitres sont complétés par une série d'exercices de difficultés variées, dont certains sont tirés ou inspirés des références. C'est avec plaisir que je remercie les assistants qui ont assuré ces exercices au fil des années, Jonathan Delepine, Didier Vanderstichelen, Christophe Charlier, Antoine Doeraene et Gabriel Glesner.

Chapitre 1

Séries

1.1 Séries numériques

Soit $a_n \in \mathbb{C}, n \geq 1$. La $\mathrm{n}^{\text{ème}}$ somme partielle de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est

$$s_n = a_1 + \ldots + a_n.$$

Définition 1.1.1. *La série **converge** vers $a \in \mathbb{C}$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a$. On écrit $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$. Une série qui ne converge pas est dite **divergente**.*

Exemple. La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = 1 + z + z^2 + \ldots$ s'appelle la *série géométrique*. La $\mathrm{n}^{\text{ème}}$ somme partielle est donnée par

$$s_n = 1 + z + \ldots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}, \text{ si } z \neq 1.$$

Si $|z| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} |z|^n = 0$ et donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \frac{1}{1-z}$.

Puisque $\mathbb{C}$ est complet, la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ converge si et seulement si la suite est de Cauchy, c'est-à-dire on a le *Critère de Convergence de Cauchy* (CCC) :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \geq 1 \text{ tq } \forall n > m \geq N : |s_n - s_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

En particulier, $\forall n \geq N+1$ (en prenant $m = n-1$) : $|a_n| < \varepsilon$. Ceci donne une *Condition nécessaire de convergence* : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Exemple. La série géométrique $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}$ diverge si $|z| \geq 1$, puisque $\lim\limits_{n\to\infty} |z|^{n-1} \neq 0$.

Proposition 1.1.2. ***(Test de comparaison)*** *Soient $a_n \in \mathbb{C}, b_n \in \mathbb{R}$.*

(1) Si $|a_n| \leq b_n \quad \forall n \geq N_0$: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(2) Si $a_n \geq b_n \geq 0 \quad \forall n \geq N_0$: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Démonstration. (1) $\forall n > m \geq N_0$: $\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} b_k$.

Puisque $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, $\sum_{k=m+1}^{n} b_k \to 0$ quand n, $m \to \infty$. Par la CCC (1.1), la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(2) Par l'absurde, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, de (1) on déduit que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. □

Exemples. (1) $\left|\frac{\sin(n)}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{2^n}$ converge, puisque la série géométrique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge.

(2) $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} > 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge puisque $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (voir test intégral ci-dessous). □

Corollaire 1.1.3. (Test de la limite) *Soient $a_n \geq 0$, $b_n > 0$. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C > 0$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent ou divergent simultanément.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $C - \varepsilon > 0$, alors

$$\exists\ N_0 \geq 1 \text{ tq } \forall\ n \geq N_0 :\ C - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq C + \varepsilon,$$

i.e. $0 < (C-\varepsilon)b_n \leq a_n \leq (C+\varepsilon)b_n$, d'où l'on conclut par le test de comparaison. □

Définition 1.1.4. *On dit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$* ***converge absolument*** *ssi la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge. Une série convergente qui ne converge pas absolument est dite* ***conditionnellement convergente****.*

Le CCC (1.1) montre que la convergence absolue implique la convergence. En effet

$$\forall\ n > m : \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|.$$

La convergence n'implique en général pas la convergence absolue comme le montre le résultat suivant :

Proposition 1.1.5. ***(Test des séries alternées)*** *Soit a_n, $n \geq 1$, $a_n \in \mathbb{R}$. Si (1) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$ et (2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors la série alternée $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ converge.*

Démonstration. La suite des sommes partielles paires

$$s_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

est une suite croissante (puisque chaque terme entre parenthèses est positif), bornée par a_1 i.e. $s_{2n} \leq a_1$ (voir Figure 1).

FIGURE 1

Donc la limite $\lim_{n\to\infty} s_{2n}$ existe. Appelons s cette limite. Puisque

$$\lim_{n\to\infty}(s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_n = s. \qquad \square$$

$\square$

Exemple. La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ converge conditionnellement, puisque $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

La méthode suivante de **sommation par parties** (analogue discret de l'intégration par parties) est souvent utile pour analyser la convergence de séries de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Lemme 1.1.6. *Soit $s_n = b_1 + \ldots + b_n$, alors pour $n > m$, on a*

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m+1}^{n-1} (a_k - a_{k+1})s_k + a_n s_n - a_{m+1} s_m.$$

Démonstration. On écrit

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m+1}^{n} a_k(s_k - s_{k-1}) = \sum_{k=m+1}^{n} a_k s_k - \sum_{k=m}^{n-1} a_{k+1} s_k,$$

ce qui donne le résultat annoncé. □

Une application de cette méthode est fournie par le test de convergence suivant, qui généralise le test des séries alternées.

Proposition 1.1.7. ***(Test d'Abel)***
Soit $a_n \in \mathbb{R}, b_n \in \mathbb{C}$. Supposons que
(1) la suite des sommes partielles $s_n = b_1 + \ldots + b_n$ soit une suite bornée,
(2) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \ldots$ et $lim_{n\to\infty} a_n = 0$,
Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Démonstration. Par hypothèse, il exite $M > 0$ telle que $|s_n| \leq M, \forall n \geq 1$. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $N \geq 1$ tel que $a_N \leq \frac{\varepsilon}{2M}$. Par le Lemme 1.1.6, pour $n > m \geq N \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k\Big| &\leq \Big|\sum_{k=m+1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) s_k\Big| + a_n|s_n| + a_{m+1}|s_m|,\\ &\leq M \sum_{k=m+1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) + M a_n + M a_{m+1},\\ &= 2M a_{m+1} \leq 2M a_N \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Ceci montre que la suite des sommes partielles de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ est une suite de Cauchy et donc la série est convergente. □

Exemple. On prend $a_n = \frac{1}{n}$ et $b_n = e^{in\theta}, \theta \neq 0 \bmod 2\pi$, $n \geq 1$. Puisque

$$s_n = b_1 + \ldots + b_n = \left(1 + e^{i\theta} + \ldots + e^{in\theta}\right) - 1 = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} - 1,$$

on en déduit que

$$|s_n| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|} + 1 = M, \ \forall n \geq 1,$$

et donc, par le test d'Abel, pour $\theta \neq 0 \bmod 2\pi$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge.

Définition 1.1.8. *Soit $k_n, n = 1, 2, 3, \ldots$ une suite telle que l'application $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$: $n \mapsto k_n$ est une bijection. Posons*

$$a'_n = a_{k_n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

On appelle $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ un réarrangement de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Théorème 1.1.9. *Si la série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *est absolument convergente, alors tout réarrangement de cette série converge vers la même somme.*

Démonstration. Par le CCC (1.1) on a

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \geq 1 \text{ tq } \forall\, n > m \geq N : \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Choisissons p tel que $\{1, 2, \dots, N\} \subset \{k_1, \dots, k_p\}$ (avec les notations de la définition précédente). Notons s_n et s'_n les sommes partielles de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$. Alors, si $n > p$, les nombres $a_1, \dots, a_N$ n'apparaissent pas dans la différence $s_n - s'_n$, et donc, en vertu de (1.2) $|s_n - s'_n| < \varepsilon$. Ceci montre que $\lim_{n\to\infty}(s_n - s'_n) = 0$, ce qui établit le résultat. □

Exemple Contrairement aux séries absolument convergentes, pour une série conditionnellement convergente, l'ordre dans lequel on effectue la somme de la série est important. Par exemple, considérons la série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \tag{1.3}$$

et l'un de ses réarrangements

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots \tag{1.4}$$

où deux termes positifs sont toujours suivis d'un terme négatif. Si s est la somme de (1.3), alors

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots\right) < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Puisque

$$\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} = \frac{8k-3}{2k(4k-3)(4k-1)} > 0,\ k \geq 1,$$

en comparant avec la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, on voit que en notant s'_{3k} la somme des $3k$ premiers termes de (1.4), on a

$$\lim_{k\to\infty} s'_{3k} = s' < +\infty \text{ et } s' > 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

Donc si la série (1.4) converge, sa somme est nécessairement différente de la somme de la série (1.3). Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la série (1.4) converge effectivement.

On peut aussi parfois décider de la convergence d'une série en la comparant ˆ une intégrale.

Proposition 1.1.10. ***(Test intégral)*** *Soit* $f : [1, \infty[\to [0, \infty[$.

(1) Si $|a_n| \leq f(x), \forall n \geq N_0 \geq 2$, $\forall x \in]n-1, n]$ *:*

$$\int_1^\infty f(x)dx < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty |a_n| < +\infty.$$

(2) Si $f(x) \leq a_n, \forall n \geq N_0 \geq 1, \forall x \in [n, n+1[$ *:*

$$\int_1^\infty f(x)dx \text{ diverge } \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty a_n \text{ diverge.}$$

Démonstration. (1) Pour tout $k \geq N_0$, on a

$$\sum_{n=N_0}^k |a_n| \leq \int_{N_0-1}^k f(x)dx \leq \int_1^\infty f(x)dx < +\infty.$$

Puisqu'une suite croissante et bornée converge, $\displaystyle\sum_{n=N_0}^\infty |a_n| < +\infty$.

(2) Pour tout $k \geq N_0$, on a

$$\sum_{n=N_0}^k a_n \geq \int_{N_0}^{k+1} f(x)dx.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_{N_0}^{k+1} f(x)dx = +\infty$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \sum_{n=N_0}^k a_n = +\infty$ et donc la série diverge. □

Exemple. Soit $s \in \mathbb{R}, s > 0$, alors $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ converge si $s > 1$ et diverge si $s \leq 1$. En effet, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}$ si $s > 1$ et $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ diverge si $s \leq 1$.

Définition 1.1.11. *Soit* $(r_n)_{n\geq 1}$ *une suite de nombres réels. Soit*

$$E = \{x \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \Big| \exists \text{ une sous-suite } (r_{n_k})_{k\geq 1} \text{ tq } r_{n_k} \to x\}.$$

Soit $r^* = \sup E$ *et* $r_* = \inf E$ *;* r^* *et* r_* *s'appellent la* ***limite supérieure*** *et la* ***limite inférieure*** *de la suite* $(r_n)_{n\geq 1}$*. On peut montrer que* r^* *et* $r_* \in E$*. On utilise la notation*

$$r^* = \lim_{n\to\infty} \sup r_n, \quad r_* = \lim_{n\to\infty} \inf r_n.$$

On a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \inf r_n = \lim_{n\to\infty} \sup r_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} r_n$ *existe au sens large (c'est-à-dire la limite vaut éventuellement* $\pm\infty$*).*

Exemples

1) $r_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right), n = 1, 2, \ldots ;\ E = \{-1, +1\}$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup r_n = 1,\ \lim_{n\to\infty} \inf r_n = -1.$$

2) $(r_n)_{n\geq 1}$ un dénombrement de $\mathbb{Q}$; $E = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup r_n = +\infty,\ \lim_{n\to\infty} \inf r_n = -\infty.$$

Théorème 1.1.12. ***(Test de la racine)***

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \in \mathbb{C}$. *Définissons* $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$. *Alors,*

(a) si $\alpha < 1, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *converge ;*

(b) si $\alpha > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge ;*

(c) si $\alpha = 1$, *le test ne fournit pas d'information.*

Démonstration. (a) Soit β tel que $\alpha < \beta < 1$. Alors

$$\exists N \geq 1 \text{ tq } \forall n \geq N :\ \sqrt[n]{|a_n|} < \beta. \tag{1.5}$$

En effet, si ce n'était pas le cas, $\sqrt[n]{|a_n|} \geq \beta$ pour un nombre infini de valeurs de n. Puisque $\alpha < +\infty$, la suite $\sqrt[n]{|a_n|}$ est bornée. Donc, il existerait une sous-suite $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}$ telle que $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \to x \geq \beta$. Par définition de α, $x \leq \alpha < \beta$, ce qui est une contradiction. De (1.5) on déduit que $|a_n| < \beta^n$, pour tout $n \geq N$. Puisque $\beta < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n$ converge, ce qui en vertu du test de comparaison, montre que la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

(b) Soit β tel que $1 < \beta < \alpha$. Alors

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \beta \text{ pour un nombre infini de valeurs de } n.$$

Sinon

$$\exists N \geq 1 \text{ tq } \forall n \geq N :\ \sqrt[n]{|a_n|} \leq \beta \Rightarrow \alpha \leq \beta.$$

Donc $|a_n| > \beta^n > 1$ pour un nombre infini de valeurs de n, ce qui montre que $\lim_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$ et donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

(c) On a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge et la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Le test ne permet donc pas de conclure. □

On démontre semblablement le théorème suivant :

Théorème 1.1.13. ***(Test du quotient)***
Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0 \; \forall n \geq N_0$. *Notons* $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *et* $\gamma = \lim_{n\to\infty} \inf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.
Alors,

(a) si $\alpha < 1, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *converge ;*

(b) si $\gamma > 1, \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge ;*

(c) si $\gamma \leq 1 \leq \alpha$, *le test ne fournit pas d'information.*

Remarque. Le test du quotient est souvent plus facile d'application, mais moins performant que le test de la racine, comme le montre l'exemple suivant. Considérons la série

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

pour laquelle on vérifie facilement que

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0, \lim_{n\to\infty} \sup \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty,$$
$$\lim_{n\to\infty} \inf \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Le test du quotient ne permet pas de conclure, tandis que le test de la racine montre que la série est convergente (ce qui est évident dans ce cas, puisque la série est somme de deux séries géométriques convergentes).

1.2 Séries de fonctions

Nous commençons par expliquer le concept de convergence uniforme qui jouera un rôle très important tout au long du cours. Soit $E \subset \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour une fonction $f : E \to \mathbb{C}$, on note

$$\|f\| = \sup_{z\in E} |f(z)|.$$

Définition 1.2.1. *Soit* E *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *On dit qu'une suite de fonctions* $f_n : E \to \mathbb{C}, n \geq 1$, *converge uniformément vers une fonction* $f : E \to \mathbb{C}$ *si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geq 1 \quad \textit{tel que} \quad \forall n \geq N : \; |f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon, \quad \forall z \in E$$
$$\Updownarrow$$
$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Le théorème suivant sur la convergence uniforme des suites de fonctions continues est fondamental.

Théorème 1.2.2. *Si $f_n : E \to \mathbb{C}, n \geq 1$, est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers une fonction $f : E \to \mathbb{C}$, alors f est continue sur E.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Par la définition de la convergence uniforme

$$\exists N \geq 1 \quad \text{tel que} \quad |f_N(z) - f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall z \in E.$$

Soit $z_0 \in E$. Par continuité de f_N,

$$\exists\, \delta > 0 \text{ tel que } z \in E \text{ et } |z - z_0| \leq \delta \Rightarrow |f_N(z) - f_N(z_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
&z \in E \text{ et } |z - z_0| \leq \delta \Rightarrow \\
&\qquad |f(z) - f(z_0)| = |f(z) - f_N(z) + f_N(z) - f_N(z_0) + f_N(z_0) - f(z_0)| \\
&\qquad \leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

ce qui établit la continuité de f en z_0 et termine la démonstration. □

Remarque. Le résultat peut s'interpréter comme la possibilité d'échanger les limites, sous l'hypothèse de convergence uniforme, pour tout $z_0 \in E$:

$$\lim_{z \to z_0} \lim_{n \to \infty} f_n(z) = \lim_{n \to \infty} \lim_{z \to z_0} f_n(z).$$

Exemple. Soit la suite de fonctions continues $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, n \geq 1$, définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si } x \leq -\frac{1}{n}, \\ n(x + \frac{1}{n}) \quad \text{si } -\frac{1}{n} \leq x \leq 0, \\ 1 \quad \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

La limite ponctuelle, c'est-à-dire calculée point par point, $f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x)$, est

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si } x < 0, \\ 1 \quad \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Puisque f n'est pas continue en $x = 0$, la suite ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.2.3. *Soit $f_n : E \to \mathbb{C}, n = 1, 2, \ldots$, une suite de fonctions.*

*1) la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ **converge ponctuellement** sur E si et seulement si la série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge $\forall z \in E$;*

2) la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ ***converge uniformément*** *vers* $f(z)$ *sur* E *si et seulement si* $\lim_{n\to\infty} \|f - s_n\| = 0$, *où* $s_n(z) = f_1(z) + \ldots + f_n(z)$ *;*

3) la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ ***converge normalement*** *sur* E *si et seulement si* $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < +\infty$.

Proposition 1.2.4. *(1) la convergence normale implique la convergence absolue ponctuelle ;*

(2) la convergence normale implique la convergence uniforme.

Démonstration. (1) Puisque

$$|f_n(z)| \leq \|f_n\|, \forall\ z \in E,$$

le test de comparaison implique que $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ converge $\forall\ z \in E$.

(2) Appelons $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$. On a

$$|f(z) - s_n(z)| = \Big| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \Big| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|, \forall\ z \in E,$$

et donc

$$\|f - s_n\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|.$$

Puisque la série converge normalement, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\| = 0$, d'où l'on déduit que $\lim_{n\to\infty} \|f - s_n\| = 0$. $\square$

Puisque la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue, on a le

Corollaire 1.2.5. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < +\infty$ *et si les* $f_n : E \to \mathbb{C}$ *sont continues, alors* $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *est continue sur* E.

Exemples. En général, il n'y a pas de relation entre la convergence absolue ponctuelle et la convergence uniforme, comme le montrent les exemples suivants.

1) Soit la suite $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = x^n(1-x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

On a

$$s_n(x) = f_0(x) + \ldots + f_{n-1}(x) = (1-x)(1 + x + \ldots + x^{n-1}) = 1 - x^n.$$

La limite

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

est discontinue en $x = 1$, donc la série ne converge par uniformément sur $[0,1]$. A fortiori, la série ne converge pas normalement sur $[0,1]$. On peut le vérifier directement. Le maximum de $f_n(x)$ sur $[0,1]$ étant atteint en $x = \dfrac{n}{n+1}$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} = +\infty.$$

En effet, en comparant avec $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$, le test de la limite donne $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$.

2) Soit la suite $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}, n \geq 1.$$

Par le test des séries alternées, la série converge ponctuellement sur $[0,1]$. La série ne converge pas absolument sur $[0,1]$, puisque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big| f_n(x) \Big| = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Appelons $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ la somme de la série. On a

$$\Big| f(x) - s_n(x) \Big| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^2}{k^2} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \right|,$$

puisque $x \in [0,1]$. De là

$$\|f - s_n\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \right|, \tag{1.6}$$

et donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|f - s_n\| = 0$, puisque le membre de droite dans l'inégalité (1.6) est la somme des restes de deux séries convergentes et donc tend vers 0 quand $n \to \infty$.

1.3 Exercices

1. Etudier la convergence de la série $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\, ln(k)}$.

2. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Démontrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ converge.

3. Etudier la convergence des séries suivantes

$$(a)\ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) \qquad (b)\ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{ln(k)} \qquad (c)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k\, k!}{k^k}.$$

4. Eudier la convergence des séries suivantes

$$(a)\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k+1} \qquad (b)\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k\, \frac{ln(k)}{k} \qquad (c)\ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}.$$

5. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

6. Déterminer le domaine de convergence ponctuelle de la série de fonctions réelles $\sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{nx},\ x\in\mathbb{R}$. Y a-t-il convergence uniforme sur ce domaine ?

7. Considérons la série de fonctions réelles $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x\in\mathbb{R}$.
(a) Montrer que la série converge absolument sur $\mathbb{R}$ (il s'agit de la fonction exponentielle).
(b) Montrer que la série converge uniformément sur tout intervalle *borné* $I\subset\mathbb{R}$, mais qu'elle ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

8. Soit la série de fonctions réelles $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+sin(n\,x)}, x\in\mathbb{R}$.
(a) Déterminer le domaine de convergence ponctuelle de la série.
(b) Etudier la convergence uniforme et normale de la série sur son domaine de convergence ponctuelle.

9. Soit la série de fonctions réelles $\sum_{n=1}^{\infty}(x^{2n}-x^{2n+2}), x\in\mathbb{R}$.
(a) Montrer que le domaine de convergence ponctuelle de cette série est $[-1,1]$ et calculer sa somme.
(b) Montrer que la série ne converge pas uniformément sur $[-1,1]$, mais qu'elle converge uniformément et normalement sur l'ensemble $E=[-1+\varepsilon,1-\varepsilon]\cup\{-1,1\}$, où ε est un nombre réel tel que $0<\varepsilon<1$.

10. Soit la série de fonctions réelles $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{x^{2n}}{n}, x\in\mathbb{R}$.
(a) Montrer que cette série converge ponctuellement et uniformément sur l'intervalle fermé $[-1,1]$. Quelle est sa somme ?
(b) Montrer qu'il n'y a cependant pas convergence normale sur $[-1,1]$.

Chapitre 2

Séries potentielles et fonctions analytiques

2.1 Séries potentielles

Définition 2.1.1. *Soit $a_n \in \mathbb{C}, z_0 \in \mathbb{C}$. La série de fonctions*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{2.1}$$

s'appelle une ***série potentielle*** *ou une* ***série de puissances*** *ou encore une* ***série entière****. Les nombres a_n sont les coefficients de la série.*

Nous allons montrer que la série de fonctions (2.1) converge en tout point d'un disque ouvert de centre z_0

$$D(z_0, \rho) = \{z \in \mathbb{C} \Big| |z - z_0| < \rho\},$$

avec

$$\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{2.2}$$

et diverge en tout point extérieur à ce disque. En un point du bord $|z| = \rho$, la série peut converger ou diverger selon les cas. La formule (2.2) est due à Hadamard ; ρ s'appelle le *rayon de convergence* de la série potentielle (2.1) et $D(z_0, \rho)$ est le *disque de convergence*. Eventuellement on peut avoir $\rho = 0$ ou $\rho = \infty$. Plus précisément, on a le

Théorème 2.1.2. *(1) $\forall r < \rho$, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge normalement sur le disque fermé de centre z_0 et de rayon r*

$$D[z_0, r] = \{z \in \mathbb{C} \Big| |z - z_0| \leq r\}.$$

(2) $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - z_0| > \rho$, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ diverge.

Démonstration. (1) Soit $r < \rho$ et $z \in D[z_0, r]$. On a

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n|\ |z - z_0|^n \leq |a_n| r^n,$$

et donc

$$\sup_{z \in D[z_0,r]} |a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n| r^n.$$

Puisque

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| r^n} = r \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{r}{\rho} < 1,$$

par le test de la racine, la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ est convergente. Le test de comparaison montre alors que $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{z \in D[z_0,r]} \left| a_n(z - z_0)^n \right|$ est convergente, ce qui établit la convergence normale sur $D[z_0, r]$.

(2) Soit $z \in \mathbb{C}$, tel que $|z - z_0| > \rho$. On a

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\ |z - z_0|^n} = |z - z_0| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z - z_0|}{\rho} > 1,$$

ce qui, en vertu du test de la racine, montre que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ diverge pour $|z - z_0| > \rho$. □

Remarques. 1) En utilisant le test du quotient, on obtient que si $a_n \neq 0$ pour n suffisamment grand et si

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

existe au sens large (c'est-à-dire L est éventuellement $+\infty$), alors le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ est donné par $\rho = \frac{1}{L}$.

2) La fonction

$$f : D(z_0, \rho) \to \mathbb{C},\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

est continue sur $D(z_0, \rho)$, puisque continue sur tout disque fermé $D[z_0, r], r < \rho$, en vertu de la convergence normale.

Exemples.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$; $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty \Rightarrow \rho = 0$.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \rho = +\infty$.

La fonction définie sur $\mathbb{C}$ par cette série potentielle s'appelle l'exponentielle complexe et est notée e^z.

3) Le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ (série géométrique) est $\rho = 1$. Pour $|z| = 1$, $\lim_{n\to\infty} |z|^n = 1 \neq 0$, donc cette série diverge en tout point du bord de son disque de convergence.

4) Le rayon de convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ est $\rho = 1$. En $z = 1$, on a la série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ qui diverge, et en $z = -1$, la série alternée $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ qui converge. En utilisant le test d'Abel, Proposition 1.1.7, on montre que $z = 1$ est le seul point du bord du disque de convergence où la série diverge.

5) Le rayon de convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ est $\rho = 1$. Pour $|z| = 1$, on a $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Donc la série converge absolument, et à fortiori converge en tout point du bord de son disque de convergence.

Proposition 2.1.3.
Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *une série potentielle avec* $\rho > 0$*. Si* $\exists\, n \geq 0$ *tel que* $a_n \neq 0$*, alors* $\exists\, 0 < \delta \leq \rho$ *tel que* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \neq 0$*,* $\forall z$ *tel que* $0 < |z-z_0| < \delta$*.*

Démonstration. Soit $k \geq 0$ le plus petit entier tel que $a_k \neq 0$. On peut alors écrire

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = (z-z_0)^k\Big(a_k + a_{k+1}(z-z_0) + \dots\Big).$$

La série potentielle $a_k + a_{k+1}(z-z_0) + \dots$ a pour rayon de convergence ρ, et définit donc une fonction continue $g(z)$ sur le disque ouvert $D(z_0, \rho)$ telle que $g(z_0) = a_k \neq 0$. Par continuité, $g(z)$ ne s'annule donc pas au voisinage de z_0, i.e. $\exists\ 0 < \delta \leq \rho$ tel que $g(z) \neq 0$, $\forall z$ tel que $|z-z_0| < \delta$. Deux cas peuvent se produire. Soit $k = 0$, auquel cas $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \neq 0$, $\forall z$ tel que $|z-z_0| < \delta$, soit $k \geq 1$, auquel cas $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \neq 0$, $\forall z$ tel que $0 < |z-z_0| < \delta$. Dans ce dernier cas, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ a un zéro *isolé* de multiplicité k en z_0. □

On peut additionner et multiplier des séries potentielles. Pour ce faire, nous établissons d'abord les résultats sur la somme et le produit de séries numériques.

Proposition 2.1.4. *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$*, alors* $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n) = A+B$*.*

Démonstration. Soit

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

Alors

$$A_n + B_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k).$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ et $\lim_{n\to\infty} B_n = B$, on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} (A_n + B_n) = A + B,$$

ce qui établit le résultat. $\square$

Proposition 2.1.5. *Supposons que*
1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge absolument,*
2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A,$
3) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B,$
4) $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$
Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB.$$

Démonstration. Soit

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k, \quad \beta_n = B_n - B.$$

Alors

$$\begin{aligned}
C_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \ldots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) \\
&= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \ldots + a_n B_0 \\
&= a_0 (B + \beta_n) + a_1 (B + \beta_{n-1}) + \ldots + a_n (B + \beta_0) \\
&= A_n B + a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \ldots + a_n \beta_0.
\end{aligned}$$

On veut montrer que $\lim_{n\to\infty} C_n = AB$. Puisque $\lim_{n\to\infty} A_n B = AB$, il suffit de montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0, \text{ où } \gamma_n = a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \ldots + a_n \beta_0.$$

Soit $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, qui est convergente en vertu de 1). Soit $\varepsilon > 0$. Par 3) $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$ et on peut donc choisir N tel que $|\beta_n| \leq \varepsilon, \forall n \geq N$. Donc, pour $n \geq N$, on a

$$\begin{aligned}
|\gamma_n| &\leq |\beta_0 a_n + \ldots + \beta_N a_{n-N}| + |\beta_{N+1} a_{n-N-1} + \ldots + \beta_n a_0| \\
&\leq |\beta_0 a_n + \ldots + \beta_N a_{n-N}| + \varepsilon \alpha.
\end{aligned}$$

En gardant N fixe et en faisant tendre $n \to \infty$, puisque $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, on obtient

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} |\gamma_n| \leq \varepsilon \alpha.$$

Puique ε est arbitraire, ceci établit que

$$\limsup_{n\to\infty} |\gamma_n| = \liminf_{n\to\infty} |\gamma_n| = \lim_{n\to\infty} |\gamma_n| = 0.$$

Ceci termine la démonstration. □

Théorème 2.1.6. *Soient deux séries potentielles de rayon de convergence ρ_1 et ρ_2 respectivement*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \ \textit{pour } |z-z_0| < \rho_1, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n, \ \textit{pour } |z-z_0| < \rho_2,$$

et soit $R = \min(\rho_1, \rho_2)$. Alors les séries potentielles somme et produit définies par

$$s(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)(z - z_0)^n,$$
$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0)(z - z_0)^n,$$

ont un rayon de convergence supérieur ou égal à R et

$$s(z) = f(z) + g(z), \quad p(z) = f(z)g(z), \quad \forall z \textit{ tel que } |z - z_0| < R.$$

Démonstration. Cela résulte immédiatement des Propositions 2.1.4 et 2.1.5, vu que les deux séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n,$$

convergent absolument pour tout z tel que $|z - z_0| < R$. □

2.2 Fonctions analytiques : définition et propriétés

Définition 2.2.1. *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application.*

1) f est **développable en série potentielle** *au point $z_0 \in U$ si $\exists r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset U$ et $\exists \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ avec $\rho \geq r$, tels que on ait*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad \forall z \in D(z_0, r).$$

2) f est **analytique** *sur U si f est développable en série potentielle, pour tout point $z_0 \in U$.*

Remarques.

1) La représentation locale de $f(z)$ en série potentielle est unique. En effet, si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n, \forall z \text{ tq } |z - z_0| < r,$$

en vertu du Théorème 2.1.6, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)(z - z_0)^n = 0, \quad \forall z \text{ tq } |z - z_0| < r,$$

ce qui, en vertu de la Proposition 2.1.3, force $a_n = b_n$, $\forall n \geq 0$.

2) La somme $f + g$ et le produit fg de deux fonctions analytiques sur U, sont analytiques sur U, en vertu du Théorème 2.1.6.

3) La notion de fonction analytique fait sens pour des fonctions d'une variable réelle, à valeurs réelles ou complexes.

Exemple de fonction non analytique. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x < 0, \\ 0 \quad\ , x \geq 0. \end{cases}$$

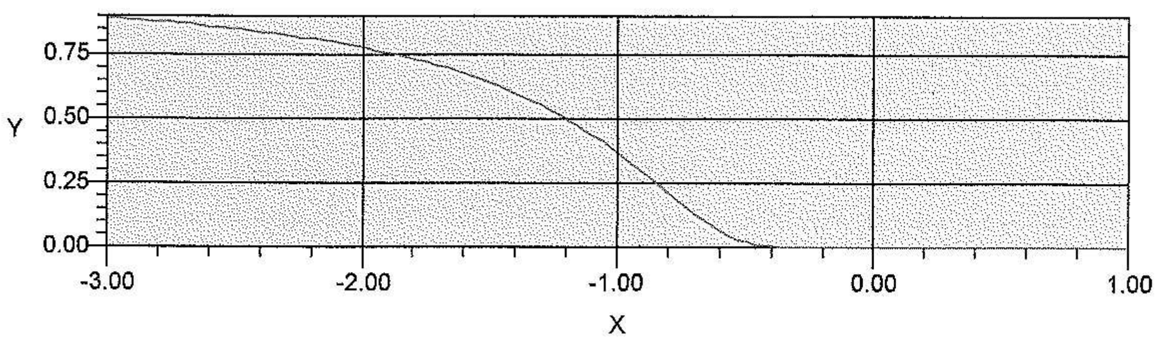


FIGURE 2

La fonction f est $\mathcal{C}^\infty$, mais n'est pas développable en série potentielle au point $x = 0$. En effet, si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour $|x| < r$, $r > 0$, comme $x = 0$ n'est pas un zéro isolé de $f(x)$, la Proposition 2.1.3 implique que $a_n = 0$, $\forall n \geq 0$. Or $f(x) \neq 0$ pour $-r < x < 0$, ce qui est une contradiction.

La Proposition 2.1.3 assure que si z_0 est un zéro d'une fonction analytique sur un ouvert U, ou bien ce zéro est isolé (c'est-à-dire il n'y a pas d'autres zéros sur un disque ouvert autour du point), ou bien la fonction est identiquement nulle au voisinage du point. Nous allons montrer que sous l'hypothèse de connexité de l'ouvert U (définie ci-dessous), soit *tous* les zéros d'une fonction analytique sur U sont isolés, soit la fonction est identiquement nulle sur U.

Définition 2.2.2. *1) Un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ est* **connexe** *ssi $\forall O_1, O_2$ ouverts tels que $U = O_1 \cup O_2$ et $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, on a $O_1 = \emptyset$ ou $O_2 = \emptyset$.*

2) Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Un ensemble $A \subset U$ est **fermé dans U** *si et seulement si $A^c \cap U$ est ouvert, où A^c dénote le complémentaire de A dans $\mathbb{C}$.*

Proposition 2.2.3. *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. U est connexe $\Leftrightarrow$ les seuls ensembles $A \subset U$ qui sont à la fois ouverts et fermés dans U sont $A = \emptyset$ et $A = U$.*

Démonstration. $\Longrightarrow$ Soit $A \subset U$ ouvert et fermé dans U. Alors

$$U = A \cup (A^c \cap U)$$

est une union de deux ouverts disjoints. Donc $A = \emptyset$ ou $A^c \cap U = \emptyset$, c'est-à-dire $A = U$.

$\Longleftarrow$ Supposons que l'on puisse écrire U sous la forme

$$U = O_1 \cup O_2$$

avec O_1, O_2 ouverts et $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Soit $A = O_1$. A est ouvert et fermé dans U, puisque $A^c \cap U = O_2$. Donc soit $A = \emptyset$, c'est-à-dire $O_1 = \emptyset$, soit $A = U$, c'est-à-dire $O_2 = \emptyset$. □

Définition 2.2.4. *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit $E \subset U$. Un point $p \in U$ est un* **point d'accumulation** *de E si et seulement si tout voisinage ouvert de p dans U contient un point de E distinct de p. Il revient au même de dire qu'il existe une suite $(p_n)_{n \geq 1}$, $p_n \in E$, p_n distincts, telle que $\lim_{n \to \infty} p_n = p$.*

Théorème 2.2.5. ***(Théorème de l'identité)*** *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et soit $f, g : U \to \mathbb{C}$ deux fonctions analytiques. Si $f = g$ sur un sous-ensemble $E \subset U$ qui possède un point d'accumulation dans U, alors $f = g$ sur U.*

Démonstration. Soit $p \in U$ un point d'accumulation de E. La fonction analytique $h = f - g$ est développable en série potentielle au point $p \in U$, i.e.

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n, \qquad |z-p| < r, r > 0.$$

Par hypothèse, il existe une suite $(p_k)_{k \geq 1}$ de points distincts de E telle que $p_k \to p$ et $h(p_k) = 0$. Donc p est un zéro non isolé de la série potentielle $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$. Par la Proposition 2.1.3, nécessairement $a_n = 0$, $\forall n \geq 0$, c'est-à-dire $h(z) = 0$ sur $D(p, r)$. Soit

$$A = \left\{ z \in U \middle| \exists r > 0 \text{ tq } h = 0 \text{ sur } D(z, r) \subset U \right\}.$$

Nous venons de montrer que $p \in A$. Par définition même, A est ouvert. Montrons que A est fermé dans U, i.e. $A^c \cap U$ est ouvert. Soit $z_0 \in A^c \cap U$. La fonction h est développable en série potentielle au point z_0 et, en utilisant à nouveau la Proposition 2.1.3.

$$\exists \delta > 0 \text{ tq } h(z) \neq 0 \qquad \forall z \text{ tq } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Donc $D(z_0, \delta) \subset A^c \cap U$, ce qui établit que $A^c \cap U$ est ouvert. Donc A est ouvert et fermé dans U. Puisque $A \neq \emptyset$ et U est connexe, en vertu de la Proposition 2.2.3, nécessairement $A = U$, i.e. $f = g$ sur U. □

Corollaire 2.2.6. ***(Principe des zéros isolés)*** *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et soit $f : U \to \mathbb{C}$ analytique, non identiquement nulle. Alors, les zéros de f sont isolés.*

Démonstration. On procède par l'absurde. Supposons qu'il existe $p \in U$ tel que $f(p) = 0$, et une suite $(p_n)_{n \geq 1}$ de points distincts telle que $p_n \to p$ et $f(p_n) = 0$. Alors, p est un point d'accumulation de $E = \{p_1, p_2, \ldots\}$. La fonction analytique $g : U \to \mathbb{C}$ identiquement nulle, coïncide avec f sur E. Par le théorème de l'identité $f = g$ sur U, c'est-à-dire f est identiquement nulle sur U, contrairement à notre hypothèse. □

Corollaire 2.2.7. ***(Principe du prolongement analytique)*** *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et soit $V \subsetneq U$ un ouvert non vide. Si $f : V \to \mathbb{C}$ est analytique, alors il existe au plus une fonction analytique $g : U \to \mathbb{C}$ qui prolonge f à U, c'est-à-dire telle que $g_{|V} = f$.*

Démonstration. Soient g_1 et g_2 deux prolongements analytiques de f à U. Alors, $g_1 - g_2$ est une fonction analytique qui est identiquement nulle sur l'ouvert non vide V. Par le principe des zéros isolés $g_1 - g_2$ est identiquement nulle sur U, i.e. $g_1 = g_2$. □

2.3 Exercices

1. Déterminer les rayons de convergence des séries potentielles suivantes :

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} \qquad (c) \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2}\, z^n.$$

Pour (c) discuter le résultat en fonction du paramètre $q \in \mathbb{C}$.

2. Déterminer les rayons de convergence des séries potentielles suivantes et étudier leur comportement sur le bord du disque de convergence :

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \qquad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}.$$

3. Calculer les rayons de convergence des séries potentielles suivantes :

$$(a) \sum_{k=2}^{\infty} (ln\ k)^2\, z^k \qquad (b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^3}{(3\,k)!}\, z^k \qquad (c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}\, z^k.$$

4. Soit la série potentielle $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{2n}}{n^2\, 3^n}$.
(a) Déterminer le rayon de convergence.
(b) Montrer que la série converge sur le bord du disque de convergence.
(c) Montrer que la série dérivée diverge en deux points du bord du disque de convergence.

5. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série potentielle de rayon de convergence $\rho > 0$. Montrer que les séries $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n z^n$ ont le même rayon de convergence ρ.

6. On définit le sinus d'une variable complexe par

$$sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

(a) Montrer que le rayon de convergence de la série potentielle est infini.
(b) Montrer que la fonction $f(z) = sin\Big(\frac{\pi}{1-z}\Big)$ est analytique sur le disque ouvert $|z| < 1$. Quels sont les zéros de f sur ce disque ouvert ? Vérifier que ceci n'est pas en contradiction avec le principe des zéros isolés.

7. Soit f une fonction analytique sur $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

(a) Si $f\big(\frac{1}{n}\big) = 0, n = 2, 3, 4, \ldots,$ alors f est identiquement nulle.

(b) Si $f\big(1 - \frac{1}{n}\big) = 0, n = 1, 2, 3, \ldots,$ alors f est identiquement nulle.

(c) Si $f\big(\frac{1}{n}\big) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^k}, n = 2, 3, 4, \ldots$, alors $f(z) = \frac{1}{1-z}$.

Dans chaque cas justifier votre réponse par une preuve ou un contre-exemple.

8. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ invariant par conjugaison complexe, c'est-à-dire que $z \in U \Rightarrow \overline{z} \in U$. Soit $\underline{f(z)}$ une fonction analytique sur U.
(a) On définit $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Montrer que g est analytique sur U.
(b) Supposons de plus U connexe et f telle que $f(U \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Montrer qu'alors

$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)}, \quad \forall z \in U.$$

9. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} exp\big(-\frac{1}{x^2}\big), \text{ si } x > 0 \\ 0, \text{ si } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$.
(b) En utilisant f, construire une fonction de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{C}$ nulle sur le disque fermé $D[0,1] = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\} \subset \mathbb{C}$, mais pas identiquement nulle.

10. Pour tout entier $n \geq 0$, on définit la *fonction de Bessel d'ordre n* par la série potentielle

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}.$$

Calculer le rayon de convergence de la série potentielle et montrer que $J_n(z)$ est solution de l'équation différentielle $z^2 y'' + zy' + (z^2 - n^2)y = 0$.

11. Démontrer que si f est une fonction analytique non nulle sur un ouvert connexe $U \subset \mathbb{C}$ contenant 0, et qui vérifie $f(z+w) = f(z)f(w)$ pour tous les $z, w \in U$ tels que $z + w \in U$, alors il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = e^{az}$. Pour rappel, l'exponentielle complexe est définie par $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Chapitre 3

Fonctions holomorphes

3.1 Définition et propriétés

Définition 3.1.1. *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction.*

*1) f est $\mathbb{C}$-**dérivable** (dérivable au sens complexe) en $z \in U$ si et seulement si $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(z+h) - f(z)}{h}$ existe.*

*2) f est **holomorphe** sur U si et seulement si f est $\mathbb{C}$-dérivable pour tout point z de U et la fonction $f' : U \to \mathbb{C}$ est continue.*

Exemples. 1) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = z^n, n \geq 0$. En utilisant l'identité

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \ldots + AB^{n-2} + B^{n-1}),$$

on a, pour $h \neq 0$,

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \frac{h}{h}\Big((z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2}z + \ldots + (z+h)z^{n-2} + z^{n-1}\Big)$$

et donc

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = nz^{n-1},$$

c'est-à-dire $f'(z) = nz^{n-1}$ et f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
2) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \bar{z}$.
On a pour $h \neq 0$, en posant $h = k + i\ell$,

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\bar{z} + \bar{h} - \bar{z}}{h} = \frac{\bar{h}}{h} = \frac{k - i\ell}{k + i\ell}.$$

La limite

$$\lim_{(k,\ell) \to (0,0)} \frac{k - i\ell}{k + i\ell}$$

n'existe pas. Elle vaut 1 si l'on tend vers $(0,0)$ le long de l'axe réel $\ell = 0$, et -1 si l'on tend vers (0,0) le long de l'axe imaginaire $k = 0$. Donc f n'est pas $\mathbb{C}$-dérivable en tout $z \in \mathbb{C}$.

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et une fonction $f : U \to \mathbb{R}^2$. Rappelons que f est différentiable en (x, y) si

$$f(x+k, y+\ell) - f(x, y) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix} + \alpha(k, \ell)\sqrt{k^2+\ell^2}, \tag{3.1}$$

avec $\lim\limits_{(k,\ell)\to(0,0)} \alpha(k, \ell) = 0$. L'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ donnée par la matrice $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ s'appelle la différentielle de f en (x, y) et se note $Df_{(x,y)}$ (ou $Df(x, y)$). Si

$$f(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

on a alors nécessairement que

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x, y) & \dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y) \\ \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y) & \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Si l'on écrit (3.1) sous-forme complexe en identifiant $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ à $x + iy$, on obtient

$$f(x+k, y+\ell) - f(x, y) = (a_1 + ia_2)k + (b_1 + ib_2)\ell + \alpha(k, \ell)\sqrt{k^2+\ell^2}, \tag{3.2}$$

avec

$$a_1 + ia_2 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y),\ b_1 + ib_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y). \tag{3.3}$$

On dit que $f : U \to \mathbb{R}^2$ est de la classe $\mathcal{C}^1$ si f est différentiable en tout point $(x, y) \in U$ et l'application

$$Df : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2),$$

est continue, où $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ désigne l'espace vectoriel des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Le théorème suivant caractérise les fonctions $\mathbb{C}$-dérivables parmi les fonctions différentiables.

Théorème 3.1.2. *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction, notée $f = P + iQ$.*

f est $\mathbb{C}$-dérivable en $z = x + iy \in U$

$$\Updownarrow$$

(1) f est différentiable en (x, y),
(2) les équations dites de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y), \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \tag{3.4}$$

sont satisfaites.

Démonstration. $\Downarrow$ Par définition de la $\mathbb{C}$-dérivabilité en $z = x + iy$

$$f(z+h) - f(z) = f'(z)h + \alpha(h)|h|, \text{avec } \lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0.$$

En écrivant $h = k + i\ell$, ceci s'écrit

$$f(x+k, y+\ell) - f(x,y) = f'(z)k + if'(z)\ell + \alpha(k,\ell)\sqrt{k^2+\ell^2},$$

avec $\lim_{(k,\ell)\to(0,0)} \alpha(k,\ell) = 0$. En vertu de (3.2) et (3.3), f est donc différentiable en (x,y) et

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \tag{3.5}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -i\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y),$$

qui donne les équations de Cauchy-Riemann.

$\Uparrow$ Inversément si f est différentiable en (x,y) et que les équations de Cauchy-Riemann écrites sous la forme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

sont satisfaites, on a en vertu de (3.2), (3.3)

$$f(x+k, y+\ell) - f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)k + i\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ell + \alpha(k,\ell)\sqrt{k^2+\ell^2}$$

avec $\lim_{(k,\ell)\to(0,0)} \alpha(k,\ell) = 0$, ce qui peut s'écrire en posant $z = x + iy$ et $h = k + i\ell$

$$f(z+h) - f(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h + \alpha(h)|h|, \text{avec } \lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0.$$

Donc f est $\mathbb{C}$-dérivable en z et

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

$\square$

Le corollaire suivant découle immédiatement de la démonstration précédente.

Corollaire 3.1.3. *Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ est holomorphe ssi f est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie les équations de Cauchy-Riemann.*

La proposition suivante sera utilisée dans la démonstration de la formule intégrale de Cauchy au § 4 de ce chapitre.

Proposition 3.1.4. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Si $g = g_1 + ig_2 : I \to U$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe, alors la composée $f \circ g : I \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et l'on a*

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$$

où f' est la dérivée complexe, $g'(t) = g_1'(t) + ig_2'(t)$ et $\cdot$ est la multiplication complexe.

Démonstration. Puisqu'une fonction holomorphe est de classe $\mathcal{C}^1$, $f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, comme composée d'applications de classe $\mathcal{C}^1$. Par le théorème de dérivation des fonctions composées de classe $\mathcal{C}^1$, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(g(t)) &= Df(g(t))g'(t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(g(t))g_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t))g_2'(t). \end{aligned}$$

Par les équations de Cauchy-Riemann écrites sous la forme (3.5) on obtient

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(t))(g_1'(t) + ig_2'(t)) = f'(g(t))g'(t).$$

□

Remarque. Une application $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{R}$-*linéaire* si

$$\begin{array}{ll} (1) & L(h_1 + h_2) = L(h_1) + L(h_2), \forall h_1, h_2 \in \mathbb{C} \\ (2) & L(\lambda h) = \lambda L(h), \forall h \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{R}. \end{array}$$

On dit que L est $\mathbb{C}$-*linéaire* si la condition (1) est satisfaite et la condition (2) est remplacée par

$$(2') \qquad L(\lambda h) = \lambda L(h), \forall h \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Une application $\mathbb{R}$-linéaire s'écrit

$$L(k + i\ell) = (a_1 + ia_2)k + (b_1 + ib_2)\ell. \tag{3.6}$$

Si (2') est satisfaite on a

$$L(i) = iL(1) \Longleftrightarrow b_1 + ib_2 = i(a_1 + ia_2)$$

et donc, en posant $h = k + i\ell$,

$$L(h) = (a_1 + ia_2)h. \tag{3.7}$$

On peut donc reformuler les équations de Cauchy-Riemann en disant que parmi les applications différentiables, celles qui sont $\mathbb{C}$-dérivables sont précisément les applications dont la différentielle est une application $\mathbb{C}$-linéaire.

Exercice. Si $a_1 + ia_2 \neq 0$, en écrivant $a_1 + ia_2 = re^{i\theta}$, on voit que l'effet de L en (3.7) sur h est de le dilater (ou le contracter) d'un facteur r, et de lui faire subir une rotation d'angle θ. Donc L préserve les angles et l'orientation ; on dit que L est *conforme*. Inversément, montrer que si une application $\mathbb{R}$-linéaire comme en (3.6) a un déterminant non nul, c'est-à-dire $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, et est conforme, alors elle est $\mathbb{C}$-linéaire.

Les propriétés suivantes des fonctions holomorphes sont élémentaires et se démontrent comme pour les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles et de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 3.1.5. *Soit $f, g : U \to \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes définies sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors*

(1) λf est holomorphe sur U et $(\lambda f)' = \lambda f'$.

(2) $f + g$ est holomorphe sur U et $(f + g)' = f' + g'$.

(3) fg est holomorphe sur U et $(fg)' = f'g + fg'$.

(4) si $f(z) \neq 0$, $\forall z \in U$, $\dfrac{1}{f}$ est holomorphe sur U et $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$.

Proposition 3.1.6. *Si $g : U' \to U$ et $f : U \to \mathbb{C}$ sont holomorphes, U' et U ouverts de $\mathbb{C}$, alors la composée $f \circ g : U' \to \mathbb{C}$ est holomorphe et*

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z).$$

3.2 Holomorphie des fonctions analytiques

Théorème 3.2.1. *Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ une série potentielle de rayon de convergence $\rho > 0$. Alors*

(1) Le rayon de convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$ est aussi égal à ρ.

(2) f est $\mathbb{C}$-dérivable sur $D(z_0, \rho)$ et $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$.

Démonstration. (1) Puisque $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, on a

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\rho}.$$

(2) On peut toujours se ramener au cas $z_0 = 0$. Supposons donc $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. On fixe $z \in D(0, \rho)$. Pour $h \in \mathbb{C}$ tel que $|z + h| < \rho$, on a

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n[(z+h)^n - z^n]}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z, h), \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$u_n(z,h) = \frac{a_n[(z+h)^n - z^n]}{h} - na_n z^{n-1}.$$

On calcule facilement que

$$u_n(z,h) = a_n\Big[(z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2}z + \ldots + (z+h)z^{n-2} + z^{n-1} - nz^{n-1}\Big].$$

Clairement $\lim_{h\to 0} u_n(z,h) = 0$. On veut en fait montrer que

$$\lim_{h\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z,h) = 0,$$

ce qui nécessite d'établir que la limite peut en fait passer à travers la somme infinie. Choisissons $0 < r < \rho$ tel que $|z| < r$. Choisissons h suffisamment petit pour que $|h| \leq r - |z|$, ce qui implique que $|z+h| \leq |z| + |h| \leq r$.

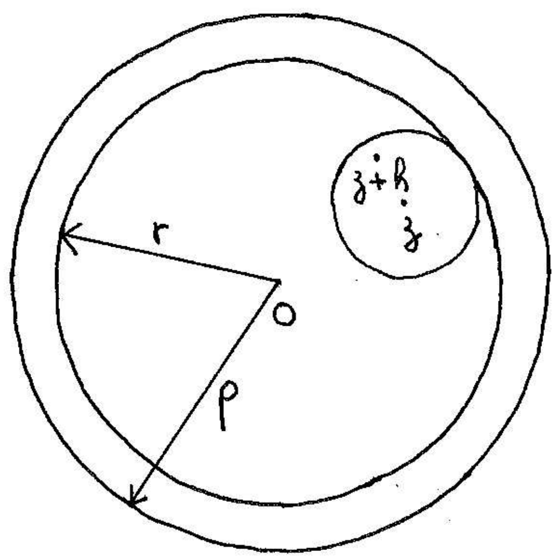


Figure 3

Pour z, h choisis comme ci-dessus, on a

$$|u_n(z,h)| \leq |a_n|(r^{n-1} + r^{n-2}r + \ldots + rr^{n-2} + r^{n-1} + nr^{n-1}) = 2n|a_n|r^{n-1}. \quad (3.8)$$

Par la première partie, puisque $r < \rho$, $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} < +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons $N \geq 1$ suffisamment grand pour que

$$2\sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.9)$$

Puisque $\lim_{h\to 0} \sum_{n=1}^{N} u_n(z,h) = 0$,

$$\exists\, \delta > 0 \text{ t.q. } |h| < \delta \Rightarrow \left| \sum_{n=1}^{N} u_n(z,h) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.10}$$

Soit $\delta' = \min(r - |z|, \delta)$. En vertu de (3.8), (3.9) et (3.10), on a

$$\begin{aligned} |h| < \delta' \Rightarrow \left| \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z,h) \right| &\leq \left| \sum_{n=1}^{N} u_n(z,h) \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(z,h) \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n| r^{n-1} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\lim_{h\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z,h) = 0$. □

Corollaire 3.2.2. *Si $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction analytique sur un ouvert U de $\mathbb{C}$, alors f est infiniment continûment $\mathbb{C}$-dérivable sur U. En particulier, f est holomorphe sur U.*

Démonstration. Soit $z_0 \in U$. Par hypothèse, il existe un disque ouvert $D(z_0, r) \subset U$, $r > 0$, sur lequel on a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \forall z \in D(z_0, r).$$

Par le Théorème 3.2.1, $f(z)$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur $D(z_0, r)$ et sa $\mathbb{C}$-dérivée $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$ existe et est continue sur $D(z_0, r)$. La continuité résulte du fait qu'une série potentielle définit une fonction continue sur son disque de convergence. Donc $f(z)$ est holomorphe sur $D(z_0, r)$. On peut faire le même raisonnement pour tout $z_0 \in U$, ce qui établit que f est holomorphe sur U. Par induction sur $k = 1, 2, \ldots$, on en déduit que la $(k-1)^{\text{ème}}$ $\mathbb{C}$-dérivée $f^{(k-1)}(z)$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur $D(z_0, r)$ et que

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1) a_n (z - z_0)^{n-k} \tag{3.11}$$

est continue sur $D(z_0, r)$. Donc f est infiniment continûment $\mathbb{C}$-dérivable sur U et, en vertu de (3.11)

$$f^{(k)}(z_0) = k! a_k \Longleftrightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \forall z_0 \in U. \tag{3.12}$$

□

3.3 Intégration le long de chemins

On appellera *chemin* une application continue $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ définie sur un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Cette condition signifie qu'il existe $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n$ tels que $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ et $\gamma\big|_{[t_{i-1}, t_i]}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. En particulier, l'intégrale

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

existe. On l'appelle la longueur du chemin γ. Si le chemin se referme, c'est-à-dire si $\gamma(a) = \gamma(b)$, on dit que c'est un *lacet*.

Exemples. 1) Le cercle de centre z_0 et de rayon r, paramétré par

$$C(z_0, r) : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \ , \ t \mapsto z_0 + re^{it},$$

est un lacet.

2) Si α et β sont deux points fixés dans $\mathbb{C}$, le chemin

$$[0, 1] \to \mathbb{C} : t \mapsto \alpha + t(\beta - \alpha)$$

est une paramétrage du segment joignant α à β.

Définition 3.3.1. *Si $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction continue et si $\gamma : [a, b] \to U$ est un chemin, on définit l'intégrale de f le long de γ par*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Exemple. Si $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ et $\gamma(t) = z_0 + re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$, est un paramétrage du cercle $C(z_0, r)$

$$\int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} i \ re^{it} dt = 2\pi i.$$

Remarques. 1) Si l'on écrit $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b]$, on a

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b \Big(P(x(t), y(t))x'(t) - Q(x(t), y(t))y'(t)\Big)dt \\
&\quad + i \int_a^b \Big(Q(x(t), y(t))x'(t) + P(x(t), y(t))y'(t)\Big)dt \\
&= \int_\gamma (Pdx - Qdy) + i \int_\gamma (Qdx + Pdy),
\end{aligned}$$

où les parties réelle et imaginaire sont des intégrales de 1-formes différentielles, comme définies dans le cours d'analyse réelle.

2) En termes de sommes de Riemann, on a

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{\delta(\Delta)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f\Big(\gamma(t_i^*)\Big)\Big(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\Big),$$

où la limite porte sur tous les découpages Δ de l'intervalle $[a, b]$, $\Delta : t_0 = a < t_1 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_{n-1} < t_n = b, t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$, et $\delta(\Delta) = \max\limits_{1\le i\le n} |t_i - t_{i-1}|$.

Les propriétés suivantes seront souvent utilisées dans la suite du cours.

Proposition 3.3.2. *(1) Soit $\varphi : [a', b'] \to [a, b]$ une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^1$. Alors*

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz.$$

(2) Si $\gamma : [a, b] \to U$ est un chemin, soit γ^* le chemin parcouru dans l'autre sens, défini par $\gamma^*(t) = \gamma(a + b - t)$. Alors

$$\int_{\gamma^*} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz.$$

Démonstration. (1) On a

$$\begin{aligned}\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)dz &= \int_{a'}^{b'} f\Big(\gamma(\varphi(t))\Big)\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)ds = \int_\gamma f(z)dz,\end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $s = \varphi(t)$.

(2) Il suffit de faire le changement de variables $s = a + b - t$ dans l'intégrale, ce qui donne

$$\begin{aligned}\int_{\gamma^*} f(z)dz &= -\int_a^b f(\gamma(a + b - t))\gamma'(a + b - t)dt \\ &= -\int_b^a f(\gamma(s))(-\gamma'(s))ds \\ &= -\int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)ds = -\int_\gamma f(z)dz.\end{aligned}$$

□

Proposition 3.3.3. *Pour tout chemin γ et toute fonction continue sur l'image de γ, on a*

$$\Big|\int_\gamma f(z)dz\Big| \le \Big(\max_{z\in\ Im\ \gamma} |f(z)|\Big)L(\gamma).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\Big|\int_\gamma f(z)dz\Big| &= \Big|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\Big| \\ &\leq \int_a^b \Big|f(\gamma(t))\Big|\, |\gamma'(t)|dt \\ &\leq \Big(\max_{t\in[a,b]}\Big|f(\gamma(t))\Big|\Big)\int_a^b |\gamma'(t)|dt = \Big(\max_{z\in\ Im\ \gamma} |f(z)|\Big)L(\gamma).\end{aligned}$$

□

Proposition 3.3.4. *Soit $\gamma : [a,b] \to U$ un chemin et soit $f_n : U \to \mathbb{C}$, $n \geq 0$ des fonctions continues. Si $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformément sur Im γ, alors*

$$\int_\gamma \Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\Big)dz = \sum_{n=0}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)dz.$$

Démonstration. Pour $z \in Im\ \gamma$, appelons $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$. On a

$$\begin{aligned}\Big|\int_\gamma f(z)dz - \sum_{n=0}^{k}\int_\gamma f_n(z)dz\Big| &= \Big|\int_\gamma \Big(f(z) - \sum_{n=0}^{k} f_n(z)\Big)dz\Big| \\ &\leq \Big(\max_{z\in\ Im\ \gamma} |f(z) - \sum_{n=0}^{k} f_n(z)|\Big)L(\gamma).\end{aligned}$$

Par définition de la convergence uniforme sur Im γ

$$\lim_{k\to\infty}\ \max_{z\in Im\gamma}\Big|f(z) - \sum_{n=0}^{k} f_n(z)\Big| = 0.$$

□

Application : une intégrale importante. Soit $r > 0$ et $a \in \mathbb{C}$. Nous allons montrer que

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,r)} \frac{dz}{z-a} = \begin{cases} 1 & \text{si } |a| < r, \\ 0 & \text{si } |a| > r. \end{cases} \tag{3.13}$$

- Si $|a| < r$, pour $z \in C(0,r)$ on a

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z(1-\frac{a}{z})} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{z^{n+1}}, \text{puisque } \Big|\frac{a}{z}\Big| = \frac{|a|}{r} < 1.$$

La série converge normalement (et donc uniformément) sur $C(0,r)$ puisque

$$\sum_{n=0}^{\infty} \max_{z\in C(0,r)} \left|\frac{a^n}{z^{n+1}}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a|^n}{r^{n+1}} < +\infty.$$

Par la Proposition 3.3.4, on peut donc intégrer terme à terme, et donc

$$I = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty} a^n \int_{C(0,r)} \frac{dz}{z^{n+1}}.$$

Puisque

$$\begin{aligned}\int_{C(0,r)} \frac{dz}{z^{n+1}} &= \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{r^{n+1}e^{i(n+1)t}}dt \\ &= \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{-int}dt,\end{aligned}$$

on voit que cette intégrale est nulle pour $n \geq 1$ et vaut $2\pi i$ pour $n = 0$. De là $I = \dfrac{2\pi i}{2\pi i} = 1$.

- Si $|a| > r$, pour $z \in C(0,r)$ on a

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a(1-\frac{z}{a})} = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{a^n}, \text{puisque } \left|\frac{z}{a}\right| = \frac{r}{|a|} < 1.$$

A nouveau la série converge normalement sur $C(0,r)$, et donc

$$I = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a^{n+1}}\int_{C(0,r)} z^n dz.$$

Or

$$\int_{C(0,r)} z^n dz = ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}dt = 0,\ \forall n \geq 0,$$

d'où l'on déduit que $I = 0$.

Exercice. Montrer semblablement que pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, on a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} \frac{dw}{w-z} = \begin{cases} 1 & \text{si } |z-z_0| < r, \\ 0 & \text{si } |z-z_0| > r. \end{cases} \tag{3.14}$$

3.4 Analyticité des fonctions holomorphes

Nous utiliserons le résultat suivant d'analyse réelle, concernant la dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

Théorème 3.4.1. *Soit* $\varphi(t,\lambda) : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}^n$ *une application continue telle que* $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda}(t,\lambda)$ *existe et est continue sur* $[a,b]\times[c,d]$. *Alors,* $\displaystyle\int_a^b \varphi(t,\lambda)dt$ *définit sur* $[c,d]$ *une fonction dérivable et*

$$\frac{d}{d\lambda}\int_a^b \varphi(t,\lambda)dt = \int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}(t,\lambda)dt.$$

Le théorème suivant est fondamental en analyse complexe.

Théorème 3.4.2 (Formule intégrale de Cauchy)**.** *Soit* f *une fonction holomorphe sur un disque ouvert* $D(z_0,R)$ *de centre* $z_0 \in \mathbb{C}$ *et de rayon* $R > 0$. *Alors,* $\forall z \in D(z_0,R)$ *et* $\forall r > 0$ *tel que* $|z - z_0| < r < R$, *on a*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z}dw. \tag{3.15}$$

Démonstration. Considérons la famille $\gamma_\lambda : [0,2\pi] \to D(z_0,R)$, $\lambda \in [0,1]$, de lacets définis comme suit

$$\gamma_\lambda(t) = (1-\lambda)z + \lambda(z_0 + re^{it}),$$

qui déforment le lacet $\gamma_1 = C(z_0,r)$ en le lacet constant $\gamma_0(t) = z$, représentés sur la Figure 4 ci-dessous.

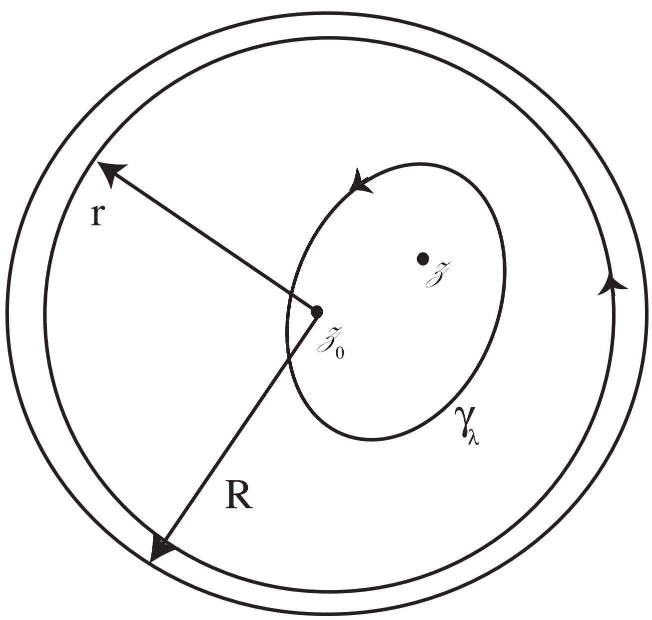


Figure 4

Définissons $g : [0,1] \to \mathbb{C}$, comme suit :

$$g(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\lambda} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw,$$

et remarquons que

$$\begin{aligned} g(1) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z}dw - f(z)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} \frac{dw}{w-z}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z}dw - f(z), \end{aligned}$$

où dans la deuxième égalité, on a utilisé l'intégrale (3.14). La formule intégrale de Cauchy (3.15) n'est rien d'autre que l'identité $g(1) = 0$. Pour l'établir, nous allons montrer que $g'(\lambda) = 0$ et $g(0) = 0$, ce qui impliquera que $g(\lambda) = 0$, $\forall \lambda \in [0,1]$.

En utilisant la Définition 3.3.1 de l'intégrale le long d'un chemin, on a

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f\left[(1-\lambda)z + \lambda(z_0 + re^{it})\right] - f(z)}{\lambda(z_0 + re^{it} - z)}\lambda i r e^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f\left[(1-\lambda)z + \lambda(z_0 + re^{it})\right] - f(z)}{z_0 + re^{it} - z} re^{it} dt, \end{aligned}$$

et en particulier $g(0) = 0$. En vertu de la Proposition 3.1.4 (c'est ici que l'on utilise que f est holomorphe), on a

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} f\left[(1-\lambda)z + \lambda(z_0 + re^{it})\right] = f'\left[(1-\lambda)z + \lambda(z_0 + re^{it})\right](-z + z_0 + re^{it}), \quad (3.16)$$

où f' est la dérivée complexe. Cette fonction est continue comme fonction de t et de λ sur $[0,2\pi] \times [0,1]$, puisque f' est continue. Les hypothèses du Théorème 3.4.1 de passage de la dérivée à travers l'intégrale sont donc satisfaites, ce qui donne

$$g'(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'\left[(1-\lambda)z + \lambda(z_0 + re^{it})\right] re^{it} dt. \quad (3.17)$$

En utilisant à nouveau la Proposition 3.1.4, on a

$$\frac{\partial}{\partial t} f\left[(1-\lambda)z + \lambda(z_0 + re^{it})\right] = f'\left[(1-\lambda)z + \lambda(z_0 + re^{it})\right] i\lambda re^{it},$$

et donc, pour $\lambda \neq 0$, (3.17) peut s'écrire

$$\begin{aligned} g'(\lambda) &= \frac{1}{2\pi i \lambda}\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} f\left[(1-\lambda)z + \lambda(z_0 + re^{it})\right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi i\lambda}\left(f\left[(1-\lambda)z + \lambda(z_0 + re^{2\pi i})\right] - f\left[(1-\lambda)z + \lambda(z_0 + r)\right]\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

puisque $e^{2\pi i} = 1$. Pour $\lambda = 0$, (3.17) donne immédiatement

$$g'(0) = \frac{r}{2\pi} f'(z) \int_0^{2\pi} e^{it} dt = 0.$$

Donc $g'(\lambda) = 0$, pour tout $\lambda \in [0,1]$, et puisque $g(0) = 0$, on en déduit que $g(\lambda) = 0$, pour tout $\lambda \in [0,1]$; en particulier, $g(1) = 0$, ce qui établit la formule intégrale de Cauchy. □

Le théorème suivant découle de la formule intégrale de Cauchy.

Théorème 3.4.3. *Si f est holomorphe sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$, alors f est analytique sur U. De plus, $\forall z_0 \in U$ on a*

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw, \tag{3.18}$$

quel que soit $r > 0$ tel que $D[z_0, r] \subset U$.

Démonstration. Soit $z_0 \in U$ et soit $D(z_0, R)$ le plus grand disque ouvert de centre z_0 et de rayon R inclus à U (éventuellement $R = \infty$). Soit $0 < r < R$. Par la formule intégrale de Cauchy,

$$\forall z \text{ tq } |z - z_0| < r : f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Pour $w \in C(z_0, r)$, puisque $\left|\dfrac{z - z_0}{w - z_0}\right| = \dfrac{|z - z_0|}{r} < 1$, on a

$$\frac{f(w)}{w - z} = \frac{f(w)}{(w - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}. \tag{3.19}$$

Soit $M = \max_{w \in C(z_0,r)} |f(w)|$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \max_{w \in C(z_0,r)} \left| \frac{f(w)(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} \right| = M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z - z_0|^n}{r^{n+1}} < +\infty,$$

ce qui montre que la série converge normalement (et donc uniformément) sur le cercle $C(z_0, r)$. Par la Proposition 3.3.4, on peut intégrer (3.19) terme à terme, ce qui donne

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)(z - z_0)^n, \tag{3.20}$$

avec

$$a_n(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw. \tag{3.21}$$

En fait, $a_n(r)$ est indépendant de r, puisque si $0 < r < r' < R$, pour tout z tel que $|z - z_0| < r$, on a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r')(z - z_0)^n,$$

ce qui force $a_n(r) = a_n(r')$. Par (3.20), $f(z)$ est donc développable en série potentielle sur $D(z_0, R)$, ce qui établit l'analyticité de f. De plus, en comparant (3.12) et (3.21), on obtient (3.18). □

Corollaire 3.4.4 (Inégalités de Cauchy)**.** *Si f est holomorphe sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$, pour tout $z_0 \in U$ on a*

$$\left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right| \leq \frac{1}{r^n} \max_{t\in[0,2\pi]}\left|f(z_0+re^{it})\right|, n \geq 0, \tag{3.22}$$

quel que soit $r > 0$ tel que $D[z_0, r] \subset U$.

Démonstration. En paramétrant le cercle $C(z_0, r)$ par $w = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, la formule (3.18) s'écrit

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})e^{-int}dt, \tag{3.23}$$

d'où l'on déduit que

$$\begin{aligned}\left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right| &\leq \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}\left|f(z_0+re^{it})\right|\left|e^{-int}\right|dt\\ &\leq \frac{1}{r^n}\max_{t\in[0,2\pi]}\left|f(z_0+re^{it})\right|.\end{aligned}$$

□

Remarque. Grâce à l'équivalence entre les notions de fonction analytique et de fonction holomorphe sur un ouvert du plan complexe, on peut donner maintenant beaucoup d'exemples de fonctions analytiques, *la condition d'holomorphie étant en général plus simple à vérifier.*

1) Une série potentielle $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, de rayon de convergence $\rho > 0$, définit une fonction analytique sur son disque de convergence $D(z_0, \rho)$. Ce résultat n'est nullement évident, puisqu'il affirme que la série peut être redéveloppée en une série potentielle au voisinage de tout point $w \in D(z_0, \rho)$. Comme on a établi au Théorème 3.2.1 qu'une série potentielle définit une fonction holomorphe dans son disque de convergence, le résultat se déduit du Théorème 3.4.3.

2) Une fonction rationnelle $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, quotient de deux polynômes, définit une fonction holomorphe sur l'ouvert $U = \mathbb{C}\backslash\{\text{zéros de } q(z)\}$, et donc une fonction analytique.

3) Si f, g sont holomorphes sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$, le quotient $\dfrac{f}{g}$ définit une fonction holomorphe et donc donc analytique sur l'ouvert $U' = \{z \in U | g(z) \neq 0\}$.

3.5 Les grands théorèmes sur les fonctions holomorphes

Définition 3.5.1. *On appelle les fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ tout entier (comme les polynômes, l'exponentielle, par exemple) des fonctions entières.*

Théorème 3.5.2. *(**Théorème de Liouville**) Toute fonction entière et bornée est constante.*

Démonstration. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Par le Théorème 3.4.3, on peut la développer en une série potentielle (série de Taylor) autour de $z_0 = 0$, dans le plus grand disque ouvert $D(0, R) \subset \mathbb{C}$ (éventuellement $R = \infty$), c'est-à-dire $\mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Comme f est bornée, il existe une constante $M > 0$ telle que $|f(z)| \leq M, \forall z \in \mathbb{C}$ et donc, en vertu des inégalités de Cauchy (3.22)

$$\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq \frac{1}{r^n} \max_{t \in [0,2\pi]} \left| f(re^{it}) \right| \leq \frac{M}{r^n} \ , \ \forall r > 0.$$

Si $n \geq 1$, en passant à la limite $r \to +\infty$, on obtient que $f^{(n)}(0) = 0$, $\forall n \geq 1$, c'est-à-dire $f(z) = f(0)$, $\forall z \in \mathbb{C}$. □

Le corollaire le plus célèbre du Théorème de Liouville est le soi-disant "théorème fondamental de l'algèbre", dont toutes les démonstrations font appel à l'analyse !

Corollaire 3.5.3. *(**Théorème de d'Alembert-Gauss**) Tout polynôme à coefficients complexes et non constant possède au moins une racine complexe.*

Démonstration. On procède par l'absurde. Supposons qu'il existe un polynôme

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \ a_n \neq 0, n \geq 1,$$

tel que $p(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$. La fonction $\dfrac{1}{p(z)}$ est alors holomorphe sur $\mathbb{C}$, et est donc une fonction entière. Montrons qu'elle est bornée. Pour $z \neq 0$, on a

$$\frac{1}{|p(z)|} = \frac{1}{|z|^n} \frac{1}{\left| a_n + \dfrac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \dfrac{a_1}{z^{n-1}} + \dfrac{a_0}{z^n} \right|},$$

le second facteur tend vers $\dfrac{1}{|a_n|} \neq 0$ quand $|z| \to +\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{|z| \to +\infty} \frac{1}{|p(z)|} = 0$. Par définition de la limite, en choisissant par exemple $\varepsilon = 1$,

$$\exists \ R > 0 \text{ tq } \forall z \text{ tq } |z| > R : \left| \frac{1}{p(z)} \right| \leq 1.$$

Comme $\dfrac{1}{p(z)}$ est continue sur le disque compact $D[0, R]$,

$$\exists \ M > 0 \text{ tq } \left| \frac{1}{p(z)} \right| \leq M, \forall z \in D[0, R].$$

De là
$$\left|\frac{1}{p(z)}\right| \leq \max(1, M), \forall z \in \mathbb{C}.$$
Par le Théorème de Liouville, $\dfrac{1}{p(z)}$ étant entière et bornée, elle est nécessairement constante. Il s'ensuit que $p(z)$ est une constante, contrairement à l'hypothèse. □

La formule trouvée en (3.23) pour les coefficients de Taylor du développement en série potentielle d'une fonction holomorphe au voisinage de z_0, donne pour $n = 0$
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt, \tag{3.24}$$
pour n'importe quel $r > 0$ tel que le disque fermé $D[z_0, r]$ est inclus à l'ouvert sur lequel la fonction est holomorphe. Elle exprime une *propriété de la moyenne*, c'est-à-dire la valeur au centre du cercle est la moyenne des valeurs prises sur le cercle. Si l'on note $f(z) = P(z) + iQ(z)$, en prenant la partie réelle et la partie imaginaire de (3.24) on obtient immédiatement que les parties réelle et imaginaire de f vérifient aussi la propriété de la moyenne
$$\left\{\begin{array}{rcl} P(z_0) & = & \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P(z_0 + re^{it})dt, \\ \\ Q(z_0) & = & \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} Q(z_0 + re^{it})dt. \end{array}\right. \tag{3.25}$$
Une conséquence très importante de la propriété de la moyenne est le théorème suivant.

Théorème 3.5.4. ***(Principe du module maximum)*** *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$. Si $|f|$ admet un maximum local en $z_0 \in U$, alors f est constante.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe un disque ouvert $D(z_0, R) \subset U$, $R > 0$, tel que
$$|f(z)| \leq |f(z_0)|, \forall z \in D(z_0, R).$$
Supposons qu'il existe $z_* \in D(z_0, R)$ tel que $|f(z_*)| < |f(z_0)|$. Soit $r = |z_* - z_0|$. Par continuité, il existe un disque $D(z_*, \varepsilon) \subset D(z_0, R), \varepsilon > 0$, tel que $|f(z)| < |f(z_0)|, \forall z \in D(z_*, \varepsilon)$. En particulier
$$|f(z)| < |f(z_0)| \text{ sur l'arc de cercle } D(z_*, \varepsilon) \cap C(z_0, r).$$
Puisque $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ sur le reste du cercle $C(z_0, r)$, on en déduit que
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|dt < |f(z_0)|.$$

Or, la propriété de la moyenne (3.24) implique que

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt,$$

ce qui conduit à $|f(z_0)| < |f(z_0)|$! Donc nécessairement

$$|f(z)| = |f(z_0)| \ , \quad \forall z \in D(z_0, R).$$

À l'aide des équations de Cauchy-Riemann, nous allons en déduire que $f(z) = f(z_0)$, $\forall z \in D(z_0, R)$. Si $f(z_0) = 0$, c'est évident. Sinon, en écrivant $f = P + iQ$, on a

$$P^2(x, y) + Q^2(x, y) = c, \quad c \neq 0, \ \forall (x, y) \in D(z_0, R),$$

et donc, en prenant les dérivées partielles par rapport à x et y

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \\ \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x, y) \\ \\ Q(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall (x, y) \in D(z_0, R).$$

Comme $P(x, y) \neq 0$ ou $Q(x, y) \neq 0$, le déterminant de la matrice ci-dessus doit être nul, c'est-à-dire, en utilisant les équations de Cauchy-Riemann (3.4)

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\right)^2 = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}(x, y)\right)^2 = 0,$$

ce qui montre que $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont constantes sur $D(z_0, R)$. Donc $f(z) = f(z_0), \forall z \in D(z_0, R)$. Puisque U est connexe, en vertu du principe du prolongement analytique, $f(z) = f(z_0), \forall z \in U$. □

Exercice. En utilisant (3.25), adapter la démonstration ci-dessus pour montrer que la partie réelle $P(x, y)$ et la partie imaginaire $Q(x, y)$ d'une fonction holomorphe $f = P + iQ$, définie sur un ouvert connexe U, satisfont à un principe du maximum et du minimum. Ceci veut dire que si P (ou Q) admet un maximum ou un minimum local en $z_0 \in U$, alors P (ou Q) est constante sur U.

Remarque. Une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U ne vérifie en général pas un principe du module minimum. Il suffit de considérer $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, donnée par $f(z) = z$, le minimum de $|f|$ est atteint en $z = 0$ et f n'est pas constante.

Corollaire 3.5.5. ***(Principe du module maximum, deuxième version)*** *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et borné. Soit $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, telle que f soit holomorphe sur U. Appelons $M = \max_{z \in \partial U} |f(z)|$, où $\partial U = \overline{U} \backslash U$. Alors*

(1) $|f(z)| \leq M \ , \ \forall z \in U$,

(2) si $\exists \ z_0 \in U$ tel que $|f(z_0)| = M$, f est constante sur U.

Démonstration. (1) Soit $M' = \max_{z \in \overline{U}} |f(z)|$. Clairement, $M \leq M'$. Supposons $M < M'$. Alors $\exists z_0 \in U$ tel que $|f(z_0)| = M'$ et donc $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, $\forall z \in U$. Par le prrincipe du module maximum, $f(z) = f(z_0)$, $\forall z \in U$ et, puisque f est continue sur $\overline{U}$, $f(z) = f(z_0)$, $\forall z \in \overline{U}$. Mais alors $M = M' = |f(z_0)|$ ce qui contredit $M < M'$.

(2) Si $\exists z_0 \in U$ tel que $|f(z_0)| = M$, alors puisque $M = M'$, par le principe du module maximum, f est constante sur U. □

Une application géométrique du principe du module maximum est fournie par le théorème suivant.

Théorème 3.5.6. ***(Lemme de Schwarz)*** *Soit* $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ *et soit* $f : D(0,1) \to D(0,1)$ *une application holomorphe telle que* $f(0) = 0$. *Alors*

(1) $|f(z)| \leq |z|$, $\forall z \in D(0,1)$,

(2) si $\exists\ z_0 \neq 0$ *tel que* $|f(z_0)| = |z_0|$, $f(z) = \lambda z$ *avec* $|\lambda| = 1$, *c'est-à-dire* f *est une rotation.*

Démonstration. (1) Puisque $f(0) = 0$, $f(z)$ admet un développement en série de Taylor autour de $z = 0$ de la forme

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots, \quad \forall z \in D(0,1).$$

Appelons $g(z) = a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots$ de sorte que $f(z) = zg(z)$, avec $g(z)$ holomorphe sur $D(0,1)$. Soit $0 < r < 1$. Sur le cercle $|z| = r$, puisque $|f(z)| < 1$, on a

$$|g(z)| = \left|\frac{f(z)}{z}\right| < \frac{1}{|z|} = \frac{1}{r}\ ,\ \text{sur } |z| = r.$$

Du Corollaire 3.5.5 on déduit que $|g(z)| < \frac{1}{r}$, $\forall z$ tel que $|z| \leq r$. Fixons $z \neq 0$, $z \in D(0,1)$. On a donc

$$|f(z)| < \frac{|z|}{r}, \quad \forall r \geq |z|, \quad r < 1.$$

En passant à la limite $r \to 1$ dans cette dernière inégalité, on obtient que $|f(z)| \leq |z|$, $\forall z \in D(0,1)$.

(2) Soit $z_0 \in D(0,1), z_0 \neq 0$ tel que $|g(z_0)| = 1$. Par la première partie, on sait que $|g(z)| \leq 1$, $\forall z \in D(0,1)$. Donc $|g(z)|$ admet un maximum en z_0. Par le principe du module maximum, on en déduit que $g(z) = g(z_0)$, $\forall z \in D(0,1)$, c'est-à-dire $f(z) = g(z_0)z$, avec $|g(z_0)| = 1$. □

3.6 Exercices

1. Déterminer l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ où la fonction $f(z) = |z|^2$ est $\mathbb{C}$-dérivable.

2. Déterminer le plus grand ouvert $U \subset \mathbb{C}$ sur lequel les fonctions suivantes d'une variable complexe $z \in \mathbb{C}$ sont holomorphes :

$$(a)\ f(z) = \overline{z} \qquad (b)\ f(z) = \frac{1}{\overline{z}} \qquad (c)\ f(z) = \frac{z}{z^2+4}.$$

3. Démontrer qu'il existe une unique fonction $f(z)$ holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que

$$\mathrm{Re}(f(z)) = (\mathrm{Re}\, z)^2 - (\mathrm{Im}\, z)^2,\ \forall z \in \mathbb{C},$$

et qui s'annule en $z = 0$.

4. Existe-t-il une ou plusieurs fonction(s) f holomorphe(s) sur $\mathbb{C}$ et telle(s) que

$$\mathrm{Re}(f(z)) = 2\,\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z),\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Justifier votre réponse.

5. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ invariant par conjugaison complexe, c'est-à-dire que $z \in U \Rightarrow \overline{z} \in U$. Soit $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y), z = x + iy$, une fonction holomorphe sur U. On définit $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$. En utilisant les équations de Cauchy-Riemann, montrer que g est holomorphe sur U.

6. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction analytique sur un ouvert connexe $U \subset \mathbb{C}$. Démontrer que si f et toutes ses $\mathbb{C}$-dérivées s'annulent en un point $z_0 \in U$, alors f est identiquement nulle.

7. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière, c.à.d. f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier.

(a) Supposons qu'il existe un entier naturel $k \geq 0$ et deux nombres réels positifs R, M, tels que l'on ait

$$|f(z)| \leq M|z|^k, \quad \forall z \text{ tel que } |z| \geq R.$$

Démontrer que $f(z)$ est nécessairement un polynôme de degré inférieur ou égal à k.

(b) Montrer que si l'on suppose en (a) que $R = 0$, alors il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que $f(z) = cz^k$.

8. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière (c.à.d. holomorphe sur $\mathbb{C}$) non constante.

(a) Démontrer que l'image de f est dense dans $\mathbb{C}$.

(b) Donner un exemple où $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ et un autre exemple où $f(\mathbb{C}) \neq \mathbb{C}$.

9. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et borné et soit $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, holomorphe dans U. On suppose que $|f|$ est constante sur ∂U. Démontrer que f admet un zéro dans U ou qu'elle est constante. Donner un exemple où f n'est pas constante.

10. Soit $f : D[0,1] = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| \leq 1\} \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur le disque fermé $D[0,1]$ et holomorphe sur le disque ouvert $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\}$. Supposons en outre que f s'annule sur le demi-cercle $\{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1 \text{ et } \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$. Démontrer qu'alors f est identiquement nulle sur $D[0,1]$.

11. Soit f est une fonction holomorphe sur l'ouvert $D(0,a) = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < a\}$, avec $a > 1$. Démontrer que, si $f(0) = 1$ et si $|f(z)| > 1$ lorsque $|z| = 1$, alors f s'annule en au moins un point du disque ouvert unité $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\}$.

12. **Automorphismes du disque unité**. Soit

$$D = D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\}.$$

Un *automorphisme* de D est une bijection holomorphe de D dans D dont l'inverse est également holomorphe.

(a) En vous aidant du *lemme de Schwarz*, déterminer les automorphismes de D qui fixent l'origine $z = 0$.

(b) Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $|a|^2 - |b|^2 = 1$, l'application

$$f_{a,b}(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}$$

est un automorphisme de D.

(c) Montrer que pour tout $w \in D$, il existe $a, b \in \mathbb{C}$ avec $|a|^2 - |b|^2 = 1$, tels que $f_{a,b}(w) = 0$.

(d) En déduire l'ensemble de *tous les automorphismes* de D.

13. Soit un cercle $C(z_0, r)$ de centre z_0 et de rayon $r > 0$, parcouru dans le sens anti-horlogique. Calculer

$$\int_{C(z_0,r)} (z - z_0)^n \, dz, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

14. Soit γ le carré dans le plan complexe de sommets $0, 1, 1 + i$ et i, parcouru dans le sens anti-horlogique. Calculer

$$\int_\gamma f(z) \, dz,$$

pour $f(z) = z^3$ et $f(z) = \mathrm{Re}(z)$.

15. Considérons le cercle $C(0,1)$ de centre 0 et de rayon 1 parouru dans le sens anti-horlogique dans le plan complexe. Calculer

$$\int_{C(0,1)} \left(2 + z + \frac{1}{z}\right) \frac{\exp(z^2)}{z} \, dz,$$

$$\int_{C(0,1)} \left(2 - z - \frac{1}{z}\right) \frac{\exp(z^2)}{z} \, dz.$$

Indication. On peut s'aider de la formule intégrale de Cauchy.

Chapitre 4

Séries de Laurent, points singuliers

4.1 Homotopie des chemins et intégrales de fonctions holomorphes

Théorème 4.1.1. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ et soit $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to U : (s,t) \mapsto \Gamma(s,t)$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. Alors*

$$\int_{\partial\Gamma} f(z)dz = 0,$$

où l'intégrale sur le bord $\partial\Gamma$ de Γ est définie comme

$$\int_{\partial\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma(\cdot,0)} f(z)dz + \int_{\Gamma(1,\cdot)} f(z)dz - \int_{\Gamma(\cdot,1)} f(z)dz - \int_{\Gamma(0,\cdot)} f(z)dz,$$

avec $\Gamma(\cdot,0)$ le chemin $s \mapsto \Gamma(s,0)$, $\Gamma(1,\cdot)$ le chemin $t \mapsto \Gamma(1,t)$, etc.

Démonstration. Pour $s \in [0,1]$ on considère les chemins

$$\begin{array}{lcl} \gamma_s : [0,1] \to U & , & \gamma_s(t) = \Gamma(s,t), \\ \delta_s : [0,s] \to U & , & \delta_s(u) = \Gamma(u,0), \\ \delta'_s : [0,s] \to U & , & \delta'_s(u) = \Gamma(u,1). \end{array} \tag{4.1}$$

Pour démontrer le théorème, on va démontrer que l'intégrale sur le bord du rectangle défini par s est nulle, c'est-à-dire qu'on a

$$\forall\ s \in [0,1] \quad \underbrace{\int_{\gamma_s} f(z)dz - \int_{\gamma_0} f(z)dz}_{G(s)} = \underbrace{\int_{\delta'_s} f(z)dz - \int_{\delta_s} f(z)dz}_{D(s)}.$$

Le théorème est cette formule pour $s = 1$. On a

$$G(s) = \int_0^1 \left\{ f\Big(\Gamma(s,t)\Big)\frac{\partial\Gamma}{\partial t}(s,t) - f\Big(\Gamma(0,t)\Big)\frac{\partial\Gamma}{\partial t}(0,t) \right\} dt$$

et

$$D(s) = \int_0^s \left\{ f\Big(\Gamma(u,1)\Big)\frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u,1) - f\Big(\Gamma(u,0)\Big)\frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u,0) \right\} du.$$

Pour $G(s)$, on vérifie que les conditions du Théorème 3.4.1 de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre (s en l'occurence) sont satisfaites. En utilisant la Proposition 3.1.4, on obtient

$$\begin{aligned} G'(s) &= \int_0^1 \left\{ f'\Big(\Gamma(s,t)\Big)\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,t)\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,t) + f\Big(\Gamma(s,t)\Big)\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial s \partial t}(s,t) \right\} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left\{ f\Big(\Gamma(s,t)\Big)\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,t) \right\} dt \\ &= f\Big(\Gamma(s,1)\Big)\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,1) - f\Big(\Gamma(s,0)\Big)\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,0) \\ &= D'(s). \end{aligned}$$

Les fonctions G et D ont la même dérivée, elles diffèrent donc d'une constante. Mais $G(0) = D(0) = 0$, donc $G(s) = D(s)$ pour tout s. □

Corollaire 4.1.2. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ et soit $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to U$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que les chemins*

$$\gamma_s = \Gamma(s, \cdot) : [0,1] \to U$$

vérifient l'une des conditions suivantes

(1) Pour tout s, γ_s est un lacet.

(2) Les extrémités $\gamma_s(0)$ et $\gamma_s(1)$ ne dépendent pas de s.

Alors,

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_0} f(z)dz.$$

Démonstration. Dans le premier cas, on déforme un lacet sur un autre, on a $\Gamma(s,0) = \Gamma(s,1)$ pour tout $s \in [0,1]$, c'est-à-dire $\delta_1 = \delta_1'$, voir (4.1). Donc, en vertu du Théorème 4.1.1

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\partial \Gamma} f(z)dz &= \int_{\delta_1} f(z)dz + \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\delta_1'} f(z)dz - \int_{\gamma_0} f(z)dz \\ &= \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_0} f(z)dz. \end{aligned}$$

Dans le deuxième cas, on déforme un chemin de $\alpha = \gamma_0(0)$ à $\beta = \gamma_0(1)$ en un autre chemin de $\alpha = \gamma_1(0)$ à $\beta = \gamma_1(1)$ et les deux chemins δ_1 et δ_1' en (4.1) sont constants, donc $\displaystyle\int_{\delta_1} f(z)dz = 0$ et $\displaystyle\int_{\delta_1'} f(z)dz = 0$, et le Théorème 4.1.1 donne

$$0 = \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_0} f(z)dz.$$

□

Terminologie. Sous l'une ou l'autre des hypothèses du Corollaire 4.1.2, on appelle l'application Γ une homotopie de γ_0 à γ_1 [1].

4.2 Fonctions holomorphes dans une couronne et séries de Laurent

Une couronne (on dit aussi un anneau) est la partie du plan délimitée par deux cercles concentriques. Si ρ_1 et ρ_2 sont deux nombres réels positifs, on notera

$$A(z_0;\rho_1,\rho_2)=\Big\{z\in\mathbb{C}\mid \rho_1<|z-z_0|<\rho_2\Big\}.$$

On autorise ρ_1 à être nul (la couronne est un disque moins son centre) ou/et ρ_2 à être infini.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes (indexée par $\mathbb{Z}$) telle que, si $\dfrac{1}{\rho_1}$ est le rayon de convergence de $g(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}z^n$ et ρ_2 est le rayon de convergence de $f_2(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, on ait $\rho_1<\rho_2$. Alors, la fonction $f_1(z)=g\Big(\dfrac{1}{z}\Big)$ est holomorphe sur $\Big\{z\in\mathbb{C}\;\Big|\;|z|>\rho_1\Big\}$, tandis que $f_2(z)$ est holomorphe sur $\Big\{z\in\mathbb{C}\;\Big|\;|z|<\rho_2\Big\}$. De là

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \tag{4.2}$$

est une fonction holomorphe sur $A(0;\rho_1,\rho_2)=\Big\{z\in\mathbb{C}\;\Big|\;\rho_1<|z|<\rho_2\Big\}$. La série (4.2) s'appelle une *série de Laurent* dans la couronne $A(0;\rho_1,\rho_2)$. On l'écrit $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_nz^n$, mais la convergence de cette série doit toujours être interprétée comme la convergence de chacune des deux séries dans (4.2).

Par dérivation des fonctions composées, la $\mathbb{C}$-dérivée de f est

$$\begin{aligned} f'(z) &= -\frac{1}{z^2}g'\left(\frac{1}{z}\right)+f_2'(z)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-n)a_{-n}z^{-n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}na_nz^{n-1}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}na_nz^{n-1}. \end{aligned}$$

Soient r_1, r_2 tels que $\rho_1<r_1\le r_2<\rho_2$. On a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\max_{r_1\le|z|\le r_2}\frac{|a_{-n}|}{|z|^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_{-n}|}{r_1^n}<+\infty,\ \text{puisque}\ \frac{1}{r_1}<\frac{1}{\rho_1},$$

1. Le Corollaire 4.1.2 est encore vrai pour une homotopie continue entre lacets ou chemins $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \max_{r_1 \leq |z| \leq r_2} |a_n| \ |z|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r_2^n < +\infty, \text{ puisque } r_2 < \rho_2,$$

ce qui montre que la série de Laurent converge normalement sur toute couronne fermée $\left\{ z \in \mathbb{C} \middle| r_1 \leq |z| \leq r_2 \right\}$ incluse à la couronne (ouverte) $A(0; \rho_1, \rho_2)$.

Définition 4.2.1. *On dit qu'une fonction $f(z)$, définie dans une couronne $A(z_0; R_1, R_2)$ est **développable en série de Laurent** dans cette couronne, s'il existe une série de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$, avec $\rho_1 \leq R_1 < R_2 \leq \rho_2$, telle que*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \ tq \ R_1 < |z - z_0| < R_2. \tag{4.3}$$

Remarquons que si le développement (4.3) existe, il est unique. En effet, $\forall R_1 < r < R_2$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, la série

$$f(z_0 + re^{it})e^{-ikt} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n r^n e^{i(n-k)t},$$

converge normalement sur $[0, 2\pi]$ et peut donc être intégrée terme à terme, ce qui conduit à

$$a_k = \frac{1}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})e^{-ikt} dt. \tag{4.4}$$

Exemple. Soit $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$, qui est holomorphe sur $\mathbb{C} \backslash \{0, 1\}$.

- sur $A(0; 0, 1)$ on a

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

- sur $A(0; 1, \infty)$ on a

$$\frac{1}{z(1-z)} = -\frac{1}{z^2(1 - \frac{1}{z})} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n},$$

- sur $A(1; 0, 1)$ on a

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{(1-z)\Big(1 + (z-1)\Big)} = -\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n.$$

Lemme 4.2.2. *Soit g holomorphe sur $A(z_0; R_1, R_2)$, alors $\int_{C(z_0, r)} g(z) dz$ ne dépend pas de $r \in]R_1, R_2[$.*

Démonstration. Si $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$, on déforme le cercle de rayon r_1 sur le cercle de rayon r_2 dans la couronne, à travers les cercles concentriques. Une formule pour cette homotopie est

$$\Gamma(s,t) = z_0 + \Big((1-s)r_1 + sr_2\Big)e^{it},$$

$(s,t) \in [0,1] \times [0,2\pi]$. Le résultat suit alors du Corollaire 4.1.2 (1). $\square$

Proposition 4.2.3. ***(Formule intégrale de Cauchy pour une couronne)*** *Soit f une fonction holomorphe sur la couronne $A(z_0;R_1,R_2)$. Soit $z \in A(z_0;R_1,R_2)$ et soient r_1, r_2 tels que $R_1 < r_1 < |z-z_0| < r_2 < R_2$. Alors*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_2)} \frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_1)} \frac{f(w)}{w-z}dw. \tag{4.5}$$

Démonstration. On considère la fonction $g : A(z_0;R_1,R_2) \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{si } w \neq z, \\ f'(z) & \text{si } w = z. \end{cases}$$

Elle est évidemment holomorphe sauf peut-être en $w = z$. En fait, elle l'est aussi en ce point. Il suffit de développer la fonction holomorphe f en série potentielle au voisinage de z en

$$f(w) = f(z) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(w-z)^n,$$

de sorte que $f'(z) = b_1$ et que

$$\frac{f(w)-f(z)}{w-z} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(w-z)^{n-1}.$$

Donc sur ce voisinage

$$g(w) = f'(z) + \sum_{n=2}^{\infty} b_n(w-z)^{n-1}.$$

Donc g est holomorphe sur $A(z_0;R_1,R_2)$. On peut donc lui appliquer le Lemme 4.2.2 pour obtenir

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_1)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_2)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw. \tag{4.6}$$

En se rappelant l'intégrale (3.14), puisque $|z-z_0| > r_1$ et $|z-z_0| < r_2$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_1)} \frac{dw}{w-z} = 0 \text{ et } \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_2)} \frac{dw}{w-z} = 1.$$

Donc (4.6) se réduit à

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_1)} \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_2)} \frac{f(w)}{w-z}dw - f(z),$$

ce qui établit (4.5). $\square$

Théorème 4.2.4. ***(Laurent)***
Toute fonction holomorphe dans une couronne $A(z_0; R_1, R_2)$ est développable en série de Laurent dans cette couronne et le développement est unique.

Démonstration. Soit $z \in A(z_0; R_1, R_2)$. Choisissons r_1, r_2 tels que $R_1 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R_2$, la Proposition 4.2.3 donne

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r_2)} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r_1)} \frac{f(w)}{w-z} dw. \tag{4.7}$$

Pour $w \in C(z_0, r_2)$, $\left|\dfrac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1$, et l'on a

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{(w-z_0)\left(1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}. \tag{4.8}$$

Puisque, en posant $M = \max_{w \in C(z_0,r_2)} |f(w)|$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \max_{w \in C(z_0,r_2)} \left| \frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \right| = M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z-z_0|^n}{r_2^{n+1}} < +\infty,$$

la série (4.8) converge normalement (donc uniformément) sur $C(z_0, r_2)$. De même, pour $w \in C(z_0, r_1)$, $\left|\dfrac{w-z_0}{z-z_0}\right| < 1$, et l'on a

$$\frac{f(w)}{w-z} = -\frac{f(w)}{(z-z_0)\left(1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}\right)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(w)(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}. \tag{4.9}$$

À nouveau la série converge normalement sur $C(z_0, r_1)$.

En substituant (4.8) et (4.9) dans (4.7), puisque l'intégration terme à terme est légitime, on obtient

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r_2)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right) (z-z_0)^n \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r_1)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n+1}} dw \right) (z-z_0)^{-n}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

La fonction $\dfrac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}$ est holomorphe sur $A(z_0; R_1, R_2)$ et donc, par le Lemme 4.2.2, l'intégrale

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw, \tag{4.11}$$

est indépendante du choix de $r \in]R_1, R_2[$. Il résulte alors de (4.10) que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

avec a_n définis comme en (4.11). Notons que (4.11) est identique à (4.4), formule que nous avions obtenue pour établir l'unicité du développement de Laurent. □

Corollaire 4.2.5. *Soit f une fonction holomorphe dans une couronne $A(z_0; R_1, R_2)$. Il existe une fonction f_2, holomorphe pour $|z - z_0| < R_2$ et une fonction f_1 holomorphe pour $|z - z_0| > R_1$ et telles qu'on ait*

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) \ , \ \forall z \in A(z_0; R_1, R_2).$$

De plus cette décomposition est unique si on impose que f_1 tende vers 0 quand $|z|$ tend vers l'infini.

Démonstration. Le Théorème 4.2.4 affirme l'existence d'un développement de f en série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

tel que les deux fonctions

$$f_1(z) = \sum_{n<0} a_n (z - z_0)^n \text{ et } f_2(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n,$$

aient les propriétés voulues.

Si $f = g_1 + g_2$ est une autre décomposition vérifiant ces propriétés, posons

$$h(z) = \begin{cases} f_2(z) - g_2(z) & \text{pour } |z - z_0| < R_2 \\ g_1(z) - f_1(z) & \text{pour } |z - z_0| > R_1. \end{cases}$$

(ces deux formules donnent le même résultat sur la couronne). La fonction h est entière, elle tend vers 0 quand $|z|$ tend vers l'infini, de sorte qu'elle est bornée. Elle est donc constante d'après le théorème de Liouville (Théorème 3.5.2). La constante est nulle puisque h tend vers 0 quand $|z|$ tend vers l'infini. □

4.3 Points singuliers isolés

On considère maintenant une fonction $f(z)$ holomorphe dans un disque ouvert moins son centre (disque pointé)

$$A(z_0; 0, R) = \left\{ z \in \mathbb{C} \ \middle| \ 0 < |z - z_0| < R \right\}.$$

Dans ce cas le théorème de Laurent affirme que la fonction se développe en

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

où la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ converge sur $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ et converge normalement sur $|z-z_0| \geq \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, tandis que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge sur $D(z_0, R)$. Demandons-nous si cette fonction peut se prolonger en une fonction holomorphe sur tout le disque $|z-z_0| < R$, centre inclus. Ce prolongement, s'il existe, est évidemment unique par continuité.

Théorème 4.3.1. ***(Théorème de la singularité apparente de Riemann)*** *La fonction f se prolonge en une fonction holomorphe sur $D(z_0,R)$ $\Leftrightarrow$ f est bornée au voisinage de z_0.*

Démonstration.

$\Rightarrow$ f est holomorphe sur $D(z_0, R)$, donc continue sur $D(z_0, R)$ et bornée au voisinage de z_0.

$\Leftarrow$ La fonction $f(z)$ se développe en une série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n. \tag{4.12}$$

Par hypothèse, il existe deux réels $r_0 > 0$ et M tels que

$$0 < |z-z_0| \leq r_0 \;\Rightarrow\; |f(z)| \leq M.$$

En vertu de (4.4)

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})e^{-int}dt, \;\forall 0 < r < R,$$

et donc

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \frac{1}{r^n} \max_{t\in[0,2\pi]} \left| f(z_0 + re^{it}) \right| \\ &\leq \frac{M}{r^n}\;, \;\forall n \in \mathbb{Z}, \;\forall\; 0 < r \leq r_0. \end{aligned}$$

Cette majoration impose $|a_{-n}| \leq Mr^n$, $\forall n \geq 1$, $\forall 0 < r \leq r_0$, et donc, en passant à la limite $r \to 0$, $a_{-n} = 0$, $\forall n \geq 1$.

La série de Laurent (4.12) est donc une série entière, qui donne le prolongement voulu en z_0. □

Définition 4.3.2. *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le disque pointé $A(z_0; 0, R)$ $= \{z \in \mathbb{C} | 0 < |z-z_0| < R\}$. On dit que z_0 est un* ***point singulier isolé*** *de f si la fonction f ne peut pas se prolonger en une fonction holomorphe dans le disque tout entier $|z-z_0| < R$.*

Une condition nécessaire et suffisante pour que z_0 soit un point singulier isolé est que les coefficients a_n du développement de Laurent ne soient pas tous nuls pour $n < 0$. On voit que deux cas sont possibles :
1^er^ cas : il n'existe qu'un nombre fini d'entiers $n < 0$ pour lesquels $a_n \neq 0$. Dans ce cas il existe un entier $k \geq 1$ tel que $(z - z_0)^k f(z)$ se prolonge en une fonction holomorphe $g(z)$ sur $D(z_0, R)$, avec $g(z_0) \neq 0$. On dit alors que f est *méromorphe* en z_0 et que z_0 est un *pôle* de f. Si $k = 1$, on dit que z_0 est un pôle simple.
2^ème^ cas : il existe une infinité d'entiers $n < 0$ tels que $a_n \neq 0$. Dans ce cas on dit que z_0 est un *point singulier essentiel* de la fonction f.

Théorème 4.3.3. *Si z_0 est un pôle d'une fonction holomorphe sur un disque pointé $A(z_0; 0, R)$, alors $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$.*

Démonstration. Il existe $k \geq 1$ tel que $g(z) = (z - z_0)^k f(z)$ est holomorphe sur $D(z_0, R)$ et $g(z_0) \neq 0$. Donc

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \lim_{z \to z_0} \frac{|g(z)|}{|z - z_0|^k} = +\infty.$$

□

Théorème 4.3.4. *(**Casorati-Weierstrass**) Si z_0 est un point singulier essentiel isolé d'une fonction $f(z)$ holomorphe dans un disque pointé $A(z_0; 0, R)$, alors*

$$\forall 0 < \varepsilon < R : \overline{f\Big(A(z_0; 0, \varepsilon)\Big)} = \mathbb{C}.$$

Démonstration. Il faut montrer que $\forall c \in \mathbb{C}, \forall \alpha > 0$:

$$D(c, \alpha) \cap f\Big(A(z_0; 0, \varepsilon)\Big) \neq \emptyset.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons $\exists\, c \in \mathbb{C}, \exists\, \alpha > 0$ tels que

$$|f(z) - c| \geq \alpha,\ \forall\, z \in A(z_0; 0, \varepsilon).$$

Alors la fonction

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - c}$$

est holomorphe sur $A(z_0; 0, \varepsilon)$ et satisfait à l'inégalité

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - c|} \leq \frac{1}{\alpha},\ \forall\, z \in A(z_0; 0, \varepsilon).$$

Le Théorème 4.3.1 montre alors que g se prolonge en une fonction (encore notée g) holomorphe sur le disque $D(z_0, \varepsilon)$ telle que

$$g(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z) - c}.$$

Puisque z_0 est un point singulier isolé, à nouveau par le Théorème 4.3.1, la fonction f est non bornée sur tout voisinage de z_0, donc cette limite doit être nulle et $g(z_0) = 0$. Donc $\exists\ k \geq 1$ tel que
$$g(z) = (z - z_0)^k h(z),$$
avec $h(z)$ holomorphe et différente de zéro en tout $z \in D(z_0, \varepsilon)$. Mais alors
$$f(z) = c + \frac{1}{(z - z_0)^k} \frac{1}{h(z)},$$
et f a un pôle d'ordre $k \geq 1$ en z_0, ce qui est en contradiction avec le fait que f avait une singularité essentielle en z_0. □

Exercice. Montrer que la formulation suivante est équivalente à l'énoncé du théorème de Casorati-Weierstrass :
$$\forall\ c \in \mathbb{C} \quad \exists\ (z_n)_{n\geq 1}\ z_n \to z_0 \text{ tq } f(z_n) \to c \text{ quand } n \to +\infty.$$

Exemple. La fonction $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$ a une singularité essentielle en 0.

- Pour $c \neq 0$, $c = re^{i\theta}$, $r \neq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Les solutions de l'équation $e^b = c$ sont $b_n = \ln r + i(\theta + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$. La suite $\left(z_n = \frac{1}{b_n}\right)_{n\geq 1}$ est telle que $z_n \to 0$ et $f(z_n) = e^{\frac{1}{z_n}} \to c$ quand $n \to +\infty$. On a même ici $f(z_n) = c$, $\forall n \geq 1$.
- Pour $c = 0$, la suite $\left(z_n = -\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ est telle que $z_n \to 0$ et $f(z_n) = e^{\frac{1}{z_n}} = e^{-n} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Le fait que l'on ait trouvé, dans l'exemple ci-dessus, pour toutes les valeurs de c (sauf 0) une suite z_n tendant vers z_0 et telle que $f(z_n) = c$ n'est pas un accident mais un fait très général comme énoncé dans le théorème suivant, qu'il n'est pas question de démontrer, mais qu'il serait dommage de ne pas connaître !

Théorème 4.3.5. *(connu sous le nom de* ***"Grand Théorème de Picard"****) Si z_0 est un point singulier essentiel isolé d'une fonction $f(z)$ holomorphe dans un disque pointé $A(z_0; 0, R)$, alors $\forall\ 0 < \varepsilon < R$: $f\big(A(z_0; 0, \varepsilon)\big) = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}$ privé d'un seul point.*

Exemples. Pour $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, on a montré ci-dessus que $\forall\ 0 < \varepsilon < +\infty$ $f\big(A(0; 0, \varepsilon)\big) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. On montre facilement que si $f(z) = \sin \frac{1}{z}$, $\forall\ 0 < \varepsilon < +\infty$, $f\big(A(0; 0, \varepsilon)\big) = \mathbb{C}$.

Exercice. Déduire du "Grand Théorème de Picard" le résultat suivant, connu sous le nom de **"Petit Théorème de Picard"**. *Une fonction entière qui n'est pas un polynôme atteint chaque valeur une infinité de fois, avec une exception possible.*

La notion suivante est importante, car beaucoup de fonctions complexes, notamment la célèbre fonction zêta de Riemann qui intervient dans la démonstration du théorème des nombres premiers, sont de ce type.

Définition 4.3.6. *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On appelle* ***fonction méromorphe*** *sur U une fonction $f(z)$ définie et holomorphe sur un ouvert U' obtenu en enlevant de U un ensemble de points isolés dont chacun est un pôle de f.*

Exemples. 1) Une fonction rationnelle $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, quotient de deux polynômes relativement premiers (c'est-à-dire sans facteurs communs), avec $q(z)$ un polynôme de degré supérieur ou égal à 1, est holomorphe sur l'ouvert $U' = \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}$ où z_i sont les zéros distincts de $q(z)$. Au voisinage de chaque z_i, on a

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_i)^{k_i}} \frac{p(z)}{c \prod\limits_{j \neq i} (z - z_j)^{k_j}}, \quad c \in \mathbb{C}, c \neq 0.$$

Le second facteur est holomorphe au voisinage de z_i ; donc chaque z_i est un pôle de f et f est méromorphe sur $\mathbb{C}$.

2) Si f et g sont des fonctions holomorphes (analytiques) sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$, et g n'est pas identiquement nulle, alors $\dfrac{f}{g}$ est une fonction méromorphe sur U. En effet, l'ensemble $F = \big\{z \in U | g(z) = 0\big\}$ est un ensemble fermé dans U de points isolés (par le principe des zéros isolés, Corollaire 2.2.6) ; $\dfrac{f}{g}$ est holomorphe sur $U' = U \setminus F$, et au voisinage de tout $z_0 \in F$, on a $g(z) = (z - z_0)^k h(z)$, $k \geq 1$, avec $h(z)$ holomorphe et différente de zéro. Donc $(z - z_0)^k \dfrac{f(z)}{g(z)}$ est holomorphe au voisinage de z_0 et z_0 est un pôle de $\dfrac{f(z)}{g(z)}$.

4.4 Exercices

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b > a > 0$. Donner le développement en série de Laurent de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)},$$

dans les couronnes ouvertes $A(0; 0, a)$ et $A(0; a, b)$.

2. Trouver le développement en série de Laurent de la fonction

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)},$$

dans la couronne ouverte $A(0; 1, 2)$.

3. Les fonctions suivantes sont-elles méromorphes sur $\mathbb{C}$? Dans tous les cas, déterminer leurs pôles.

$$(a)\ f(z) = \frac{z^3 - 1}{z^4 + 1} \qquad (b)\ f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^6 - 5} \qquad (c)\ f(z) = \frac{z\ sin(z)}{z^2 + 1}.$$

4. Existe-t-il un *polynôme non nul* $p(z)$ tel que la fonction

$$f(z) = p(z)\, e^{\frac{1}{z}},$$

admette un prolongement continu en $z = 0$, de sorte que $f(z)$ soit une fonction entière (c'est-à-dire holomorphe sur $\mathbb{C}$) ?

5. (a) Montrer que la fonction

$$f(z) = sin\Big(\frac{1}{z}\Big),$$

possède en $z = 0$ une singularité essentielle.

(b) Soit $c \in \mathbb{C}$ un nombre complexe arbitraire. Quelles sont les solutions de l'équation $f(z) = c$? En déduire qu'il existe une suite $(z_n)_{n\geq 1}$ tel que $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ et $f(z_n) = c$, $\forall n \geq 1$.

(c) Montrer que la fonction

$$g(z) = \frac{1}{sin(z)},$$

est méromorphe sur $\mathbb{C}$. Montrer que tous ses pôles sont *simples* (c.à.d. d'ordre 1).

6. On considère la fonction

$$f(z) = \frac{1}{sin(1/z)}.$$

(a) Déterminer le plus grand ouvert U de $\mathbb{C}$ sur lequel f est holomorphe.

(b) Déterminer l'ensemble des pôles de f. Calculer le coefficient a_{-1} du développement de Laurent de f au voisinage de chaque pôle (c.-à.-d. sur le plus grand disque ouvert centré en chaque pôle sur lequel la fonction est holomorphe sauf au pôle).

(c) $z = 0$ est-il un pôle, une singularité essentielle de f ? Justifier votre réponse.

7. Calculer le coefficient a_{-1} du développement de Laurent sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ de la fonction

$$f(z) = \exp\Big(z + \frac{1}{z}\Big).$$

8. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto f(z)$ une fonction entière.

(a) Montrer que la fonction $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} : z \mapsto g(z) = f\big(\frac{1}{z}\big)$ possède un pôle en $z = 0$ si et seulement si f est un polynôme non constant.

(b) Montrer que si f n'est pas un polynôme, alors $\overline{f\big(A(0; R, +\infty)\big)} = \mathbb{C}, \forall R > 0$, où $A(0; R, +\infty) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$ et la barre désigne l'adhérence.

(c) Est-il vrai que, pour autant que f ne soit pas une fonction constante, on a toujours $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$? Justifier votre réponse.

9. Déterminer le domaine de convergence ponctuelle de la série de Laurent

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

Expliquer pourquoi $z = 0$ n'est pas une singularité essentielle pour f.

10. **Automorphismes du plan complexe**.

(a) Démontrer que tout automorphisme $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (bijection holomorphe dont l'inverse est holomorphe) telle que $f(0) = 0$ est de la forme

$$f(z) = az, \text{ avec } a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Indication. Commencer par montrer que la fonction $g(z) = f(1/z)$ définie et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ne possède pas de singularité essentielle en $z = 0$, à l'aide du théorème de Casorati-Weierstrass.

(b) En déduire tous les automorphismes de $\mathbb{C}$.

11. Calculer le coefficient a_{-1} du développement de Laurent des fonctions méromophes suivantes en leur(s) pôle(s) (c.à.d. sur le plus grand disque ouvert centré en chaque pôle, sur lequel la fonction est holomorphe sauf au pôle) :

$$(a)\ f(z) = \frac{sin(z)}{z^2}$$
$$(b)\ f(z) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$$
$$(c)\ f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$$
$$(d)\ f(z) = \frac{2z+1}{z^2-z-2}$$
$$(e)\ f(z) = \frac{z(z-2)}{(z+1)^2(z^2+4)}.$$

Chapitre 5

Théorème des résidus et applications

5.1 Problème des primitives et logarithme complexe

Définition 5.1.1. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$. Une primitive de f sur U est une fonction holomorphe $F : U \to \mathbb{C}$ telle que $F'(z) = f(z), \forall z \in U$.*

Proposition 5.1.2. *Soit F une primitive d'une fonction holomorphe sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ et soit $\gamma : [a, b] \to U$ un chemin, alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big). \tag{5.1}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b F'\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}F\big(\gamma(t)\big)dt = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big), \end{aligned}$$

où dans la deuxième égalité, on a utilisé la Proposition 3.1.4. □

L'obstruction à l'existence d'une primitive en général, provient de la topologie de l'ouvert U sur laquelle la fonction holomorphe est définie. Par exemple la fonction $f(z) = \dfrac{1}{z}$ holomorphe sur l'ouvert $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, n'admet pas de primitive sur cet ouvert. En effet, considérons le cercle unité de centre 0, $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}^*$, $\gamma(t) = e^{it}$. On sait que $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$. Or, si $\dfrac{1}{z}$ admettait une primitive sur $\mathbb{C}^*\backslash\{0\}$, en vertu de (5.1), cette intégrale devrait être nulle (puisque pour un lacet, l'extrémité et l'origine du chemin coïncident).

Définition 5.1.3. *Un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ est simplement connexe si et seulement si U est connexe et il existe $z_0 \in U$ tel que tout lacet basé en z_0 est homotope au lacet constant égal à z_0. En utilisant que U est connexe, on vérifie facilement que cette notion est indépendante du choix de z_0.*

Exemple. Un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ est dit *étoilé* s'il existe $z_0 \in U$ tel que pour tout $z \in U$, le segment $\{z_0 + s(z - z_0), s \in [0,1]\}$ qui joint z_0 à z est entièrement contenu dans U. Si $\gamma : [0,1] \to U$ est un lacet basé en z_0, c'est-à-dire $\gamma(0) = \gamma(1) = z_0$, on voit immédiatement que

$$\Gamma(s,t) = z_0 + (1-s)\big(\gamma(t) - z_0\big) \ , \quad (s,t) \in [0,1] \times [0,1],$$

définit une homotopie du lacet $\gamma(t)$ (pour $s = 0$) sur le lacet constant z_0 (pour $s = 1$).

Proposition 5.1.4. *Sur un ouvert simplement connexe $U \subset \mathbb{C}$, toute fonction holomorphe f admet une primitive holomorphe, unique à l'addition près d'une constante.*

Démonstration. Fixons un point $z_0 \in U$. Montrons d'abord que la fonction

$$F(z) = \int_\gamma f(w)dw,$$

où $\gamma : [0,1] \to U$ est un chemin tel que $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(1) = z$, est bien définie. Soit $\tilde{\gamma}$ un autre chemin de z_0 au même point z. Alors le chemin composé $\gamma \cdot \tilde{\gamma}^* : [0,2] \to U$

$$\gamma \cdot \tilde{\gamma}^*(t) = \begin{cases} \gamma(t), t \in [0,1] \\ \tilde{\gamma}(2-t), t \in [1,2], \end{cases}$$

est un lacet en z_0. Il est donc homotope au lacet constant $\delta(t) = z_0, \ \forall t \in [0,2]$, et le Corollaire 4.1.2 (1) nous donne donc que

$$0 = \int_\delta f(w)dw = \int_{\gamma \cdot \tilde{\gamma}^*} f(w)dw = \int_\gamma f(w)dw - \int_{\tilde{\gamma}} f(w)dw,$$

ce qui est l'indépendance espérée.

Si h est un nombre complexe de module suffisamment petit, le segment $\delta : [0,1] \to U, \delta(t) = z + th$ est contenu dans un petit disque de centre z contenu dans U. On peut calculer $F(z+h)$ en intégrant f le long d'un chemin de z_0 à z suivi de δ. Donc

$$F(z+h) = F(z) + \int_\delta f(w)dw = F(z) + \int_0^1 f(z+th)hdt,$$

ou encore

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \left| \int_0^1 \Big(f(z+th) - f(z) \Big) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \Big| f(z+th) - f(z) \Big| dt \\ &\leq \max_{t \in [0,1]} \Big| f(z+th) - f(z) \Big|. \end{aligned}$$

La dernière quantité tend vers zéro quand $h \to 0$, par continuité de f. Donc F est $\mathbb{C}$-dérivable et $F'(z) = f(z)$. Puisque $f(z)$ est continue, F est holomorphe sur U.

Si F et G sont deux primitives de f sur U, alors $(F-G)' = 0$ sur U. Donc $F-G$ est localement constante sur U et, puisque U est connexe, $F-G$ est constante sur U, en vertu du Principe du prolongement analytique (Corollaire 2.2.7). □

L'exemple du logarithme complexe

Soit $U_\pi = \mathbb{C}\backslash\{x \in \mathbb{R} | x \le 0\}$, l'ouvert du plan complexe obtenu en enlevant l'axe réel négatif. C'est un ouvert étoilé sur n'importe quel point de l'axe réel strictement positif, donc simplement connexe. On peut donc définir une primitive de $\dfrac{1}{z}$ sur U_π par

$$F(z) = \int_1^z \frac{dw}{w},$$

où l'intégrale est prise le long d'un chemin arbitraire dans U_π, joignant 1 à z. En particulier

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, x > 0 : F(x) = \int_1^x \frac{dw}{w} = \ln\ x. \tag{5.2}$$

Puisque $e^{F(z)}$ est holomorphe sur U_π et $e^{F(z)} = z$ sur l'axe réel positif, par le théorème de l'identité (Théorème 2.2.5), on doit avoir $e^{F(z)} = z$ sur U_π. On en déduit que

$$F(z) = \ln|z| + i \arg z, \quad -\pi < \arg z < +\pi, \tag{5.3}$$

où la détermination de l'argument est fixée par la condition $F(z) = \ln z$, pour $z \in \mathbb{R}$, $z > 0$, et la continuité de $F(z)$.

La fonction définie en (5.3) s'appelle la détermination principale du logarithme complexe et sera notée Log z. C'est une fonction holomorphe sur U_π. Puisque $F'(z) = \dfrac{1}{z}$, par induction, $F^{(n)}(z) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{z^n}, n \ge 1$, et comme $F(1) = 0$, on obtient immédiatement le développement de Taylor

$$\text{Log } z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n, \text{valide sur } |z-1| < 1. \tag{5.4}$$

De plus, on sait que la série (5.4) converge sur tout le bord de son disque de convergence, sauf en $z = 0$ (voir Exemple 4, Chapitre 2, Section 1).

On peut montrer que si une série potentielle converge en un point du bord de son disque de convergence, la valeur de la série en ce point est égale à la limite de la série potentielle quand on tend vers le bord le long du rayon joignant le centre au point correspondant du bord. On déduit alors de (5.2) et (5.4) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \ln x = \ln 2.$$

On obtient d'autres déterminations du logarithme complexe en enlevant une demi-droite arbitraire du plan complexe. Sur l'ouvert

$$U_\theta = \mathbb{C}\backslash\{re^{i\theta} | r \ge 0\}, \quad \theta \text{ fixé}, \ 0 \le \theta \le 2\pi,$$

toutes les déterminations holomorphes du logarithme complexe (i.e. primitives de $1/z$) sont données par

$$\log z = \ln|z| + i \arg z + c, \quad \theta - 2\pi < \arg z < \theta, \tag{5.5}$$

où c est une constante arbitraire. On doit prendre $c = 2\pi i k, k \in \mathbb{Z}$ si l'on impose en plus que $e^{\log z} = z$.

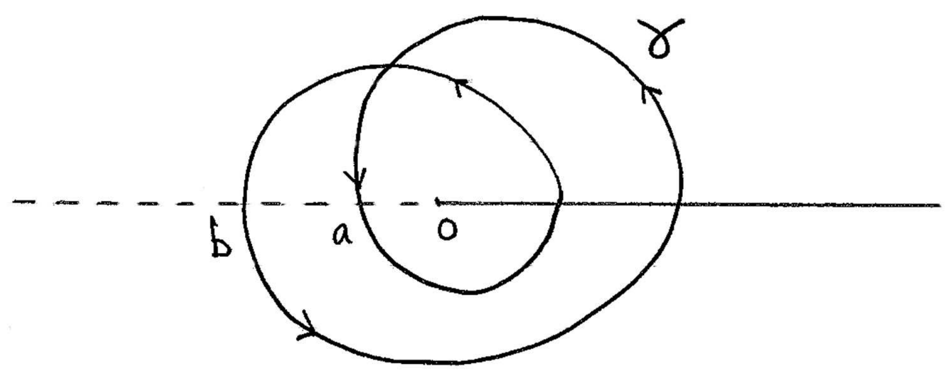
Finalement, nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition 5.1.5. *Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un lacet et soit $z_0 \in \mathbb{C}$ un point qui n'est pas sur l'image de γ, le nombre*

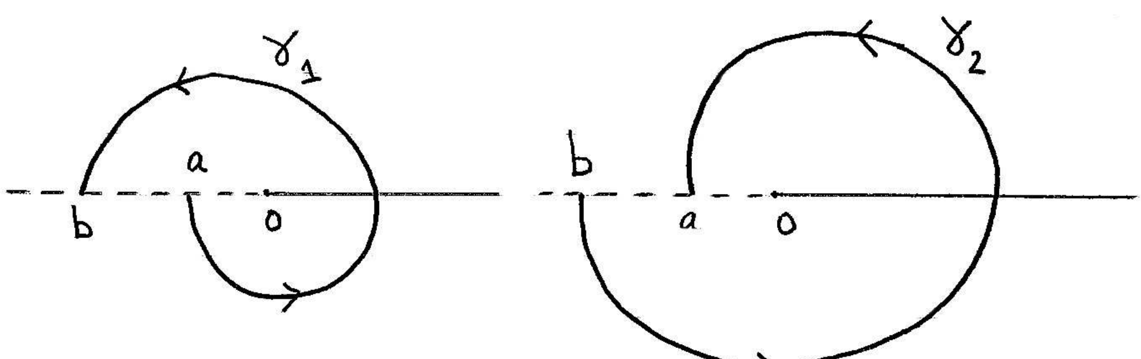
$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} \tag{5.6}$$

*s'appelle **l'indice de z_0 par rapport à** γ. On le note $\mathrm{Ind}_\gamma\,(z_0)$.*

On peut montrer que $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) \in \mathbb{Z}$ et que cet entier compte le nombre de tours orientés que le lacet γ fait autour du point z_0. Plutôt que de donner une démonstration, illustrons ceci sur un exemple. Décomposons le lacet sur la figure suivante



en deux chemins



Puisque Log z est une primitive de $\frac{1}{z}$ sur U_π, en utilisant la Proposition 5.1.2 et en notant $(\text{Log } a)_+$ (resp. $(\text{Log } a)_-$) etc. la limite de Log z quand z tend vers a par valeurs imaginaires positives (resp. négatives), on a

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{dz}{z} &= \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} \\
&= (\text{Log } b)_+ - (\text{Log } a)_- + (\text{Log } a)_+ - (\text{Log } b)_- \\
&= (\ln|b| + i\pi) - (\ln|a| - i\pi) + (\ln|a| + i\pi) - (\ln|b| - i\pi) \\
&= 4\pi i,
\end{aligned}$$

et donc $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2$. On laisse au lecteur le soin d'imaginer une preuve générale de la signification géométrique de l'indice d'un point par rapport à un lacet.

Le théorème suivant est souvent utilisé pour étalir qu'une fonction est holomorphe en certains points où l'on sait seulement à priori que la fonction est continue.

Théorème 5.1.6. *(**Théorème de Morera**). Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$. Si $\int_\gamma f(z)dz = 0$, pour tout lacet $\gamma = \partial\triangle$, bord de $\triangle \subset U$, triangle dont l'intérieur est inclus à U, alors f est holomorphe sur U.*

Démonstration. Soit $z_0 \in U$ et soit $D \subset U$ un disque ouvert de centre z_0 inclus à U. On définit

$$F : D \to \mathbb{C}, z \mapsto \int_{[z_0,z]} f(w)dw,$$

où $[z_0, z]$ dénote le segment joignant z_0 à z. Soit $h \in \mathbb{C}$ suffisamment petit pour que $z + h \in D$. Le triangle de sommets $z_0, z, z+h$ et son intérieur sont inclus à U et donc

$$\int_{[z_0,z]} f(w)dw + \int_{[z,z+h]} f(w)dw + \int_{[z+h,z_0]} f(w)dw = 0.$$

De là, il découle que

$$F(z+h) = F(z) + \int_{[z,z+h]} f(w)dw = F(z) + h\int_0^1 f(z+th)dt.$$

On onclut alors exactement comme dans la démonstration de la Proposition 5.1.4 que F est $\mathbb{C}$ dérivable sur D et $F'(z) = f(z)$, $\forall z \in D$. Donc f est holomorphe sur D, et donc sur U puisque le choix de z_0 était arbitraire. □

5.2 Théorème des résidus

Le théorème des résidus, démontré dans cette section, inclut la formule intégrale de Cauchy comme cas particulier. C'est l'un des résultats centraux de l'analyse complexe qui conduit rapidement à des applications intéressantes, dont certaines seront discutées ultérieurement.

Définition 5.2.1. *Soit f une fonction holomorphe sur un disque pointé $A(z_0; 0, R)$. Alors f admet donc un développement en série de Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ sur $A(z_0; 0, R)$, où les a_n sont donnés par la formule (4.11). Le coefficient*

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} f(z)dz, \quad \forall\ 0 < r < R,$$

de ce développement s'appelle le ***résidu*** *de f en z_0, ce qui se note*

$$a_{-1} = \text{rés}\ (f, z_0).$$

Théorème 5.2.2. *(**Théorème des résidus**) Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et soit $z_1, \ldots, z_m \in U$, m points distincts dans U. Soit f une fonction holomorphe sur $U \backslash \{z_1, \ldots, z_m\}$; c'est-à-dire f est holomorphe sauf en des points singuliers isolés $z_1, \ldots, z_m$. Soit $\gamma : [a, b] \to U\backslash\{z_1, \ldots, z_m\}$ un lacet qui ne passe par aucun des z_j et est* ***homotope à un point dans*** *U. Alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \Big\{\text{rés}(f, z_j)\ \text{Ind}_\gamma(z_j)\Big\},$$

où rés (f, z_j) *est le résidu en z_j (Définition 5.2.1) et* $\text{Ind}_\gamma(z_j)$ *est l'indice de z_j par rapport à γ (Définition 5.1.5).*

Démonstration. Puisque z_j est un point singulier isolé de f, on peut écrire

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_j)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_j)^n,$$

sur un disque pointé $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-z_j| < r\}$ qui ne contient aucun point singulier. Appelons

$$S_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_j)^n},$$

la partie singulière du développement de Laurent. On sait que cette série est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{z_j\}$ et converge normalement sur $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_j| \geq \varepsilon\}$, $\quad \forall\varepsilon > 0$.

Définissons la fonction

$$g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{m} S_j(z).$$

Puisque f est holomorphe sur $U\backslash\{z_1, \ldots, z_m\}$ et $S_j(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{z_j\}$, g est holomorphe sur $U\backslash\{z_1, \ldots, z_m\}$.

Tous les z_j sont des singularités apparentes de g, puisque sur le disque pointé $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_j| < r\}$, on a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_j)^n + S_j(z)$$

et donc

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_j)^n - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} S_k(z).$$

Puisque les fonctions $S_k(z), k \neq j$, sont holomorphes sur $\mathbb{C} \backslash \{z_k\}$, nous savons que la limite $\lim_{z \to z_j} g(z)$ existe et est égale à $a_0 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} S_k(z_j)$. Par le Théorème 4.3.1, g se prolonge donc en une fonction holomorphe sur U.

Puisque γ est un lacet homotope à un point dans U et que g est holomorphe sur U, en vertu du Corollaire 4.1.2 (1),

$$\int_\gamma g(z)dz = 0 \Leftrightarrow \int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{m} \int_\gamma S_j(z)dz. \tag{5.7}$$

Considérons $\int_\gamma S_j(z)dz$. Puisque $U \backslash \gamma([a, b])$ est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que le disque ouvert $D(z_j, \varepsilon) \subset U \backslash \gamma([a, b])$, pour tout $1 \leq j \leq m$, c'est-à-dire $\mathrm{Im}\gamma \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_j| \geq \varepsilon\}$. Donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_j)^{-n}$ converge normalement sur $\mathrm{Im}\gamma$, ce qui permet de l'intégrer terme à terme et conduit à

$$\int_\gamma S_j(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \int_\gamma \frac{dz}{(z - z_j)^n}. \tag{5.8}$$

Notons que pour $n \geq 2$,

$$\frac{1}{(z - z_j)^n} = \frac{d}{dz} \left\{ \frac{(z - z_j)^{1-n}}{1 - n} \right\} \ , \ z \neq z_j,$$

et donc, par la Proposition 5.1.2 et le fait que γ est un lacet, tous les termes dans (5.8) sont nuls, sauf celui correspondant à $n = 1$, qui donne

$$\int_\gamma S_j(z)dz = a_{-1} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_j} = \text{rés } (f, z_j) 2\pi i \ \mathrm{Ind}_\gamma(z_j),$$

par définition du résidu (Définition 5.2.1) et de l'indice (Définition 5.1.5). Donc (5.7) se réduit à

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \Big\{ \text{rés } (f, z_j) \mathrm{Ind}_\gamma(z_j) \Big\}.$$

□

Calcul pratique des résidus

- **Cas d'un pôle d'ordre $k \geq 1$.** Soit $f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} g(z)$, où $g(z)$ est holomorphe au voisinage du point z_0, avec $g(z_0) \neq 0$. Le résidu de $f(z)$ est égal au coefficient de $(z-z_0)^{k-1}$ dans le développement de Taylor de $g(z)$ au point z_0. Tout revient donc à calculer un développement limité de $g(z)$. Pour cela, il est souvent commode de prendre comme nouvelle variable $t = z - z_0$.

Exemple. Soit $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}$. Soit à calculer le résidu de $f(z)$ au pôle double $z = i$. On a ici

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2} g(z), \text{ avec } g(z) = \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2}.$$

Posons $z = i + t$, et cherchons le coefficient de t dans le développement de Taylor de

$$h(t) = \frac{e^{i(i+t)}}{(i+t)(2i+t)^2}.$$

On a

$$e^{i(i+t)} = e^{-1}(1 + it + \dots), \quad (i+t)(2i+t)^2 = -4i - 8t + \dots$$

et donc

$$h(t) = \frac{e^{-1} + ie^{-1}t + \dots}{-4i - 8t + \dots} = c_0 + c_1 t + \dots,$$

où les c_n sont déterminés inductivement

$$e^{-1} = -4ic_0 \Rightarrow c_0 = \frac{i}{4e}, \quad ie^{-1} = -4ic_1 - 8c_0 \Rightarrow c_1 = -\frac{3}{4e}.$$

D'où

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2}\left(\frac{i}{4e} - \frac{3}{4e}(z-i) + \dots\right)$$

et rés $(f, i) = -\dfrac{3}{4e}$.

- **Cas d'une singularité essentielle.** Dans le cas d'une singularité essentielle, il n'y a pas de méthode simple comme pour le cas d'un pôle, donc il faut être capable de déterminer le développement de Laurent.

Exemple. La fonction $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$ a une singularité essentielle en $z = 0$. On peut écrire $\forall\ z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots\right)\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Le produit de ces deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_0 b_n z^n + a_1 b_{n-1} z^{n-2} + \dots + a_{n-1} b_1 z^{-n+2} + a_n b_0 z^{-n}\right).$$

Puisque cette série est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, on peut la resommer comme suit

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k}b_k\right) z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n+k}\right) z^n,$$

ce qui donne le développement de Laurent de f sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Le résidu en $z = 0$ est donc

$$\text{rés } (f, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}b_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!k!}.$$

C'est effectivement la réponse que l'on aurait obtenue en calculant naïvement (comme avec des polynômes ou des séries potentielles) le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans (5.9), ce qui est donc licite !

5.3 Calcul d'intégrales par la méthode des résidus

On se propose de calculer des intégrales définies sans expliciter une primitive de la fonction sous le signe d'intégration, mais en interprétant la valeur de l'intégrale comme somme des résidus relatifs à des points singuliers isolés d'une fonction holomorphe convenablement choisie. Il n'y a pas de méthode générale permettant de traiter ce problème. Nous allons nous borner à considérer quelques types classiques et à indiquer, pour chacun d'eux, quel est le procédé qui permet de transformer le problème en un calcul de résidus.

- **1$^{\text{er}}$ type. Intégrales trigonométriques**

Théorème 5.3.1. *Soit $R(x, y)$ une fonction rationnelle de x, y $R(x, y) = \dfrac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, avec $P(x, y), Q(x, y)$ des polynômes tels que $Q(x, y) \neq 0$ sur le cercle unité $x^2 + y^2 = 1$. Alors*

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = 2\pi i \sum \{\textit{résidus de } f(z) \textit{ à l'intérieur du cercle unité}\}$$

où

$$f(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right). \tag{5.10}$$

Démonstration. Puisque $Q(x, y) \neq 0$ sur $x^2 + y^2 = 1$, $f(z)$ est une fonction rationnelle de z qui n'a pas de pôles sur le cercle unité. Comme $f(z)$ est rationnelle, elle n'a qu'un nombre fini de pôles dans $\mathbb{C}$. En appliquant le théorème des résidus à $U = \mathbb{C}$ et $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$, le cercle unité, on trouve

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum \{\text{résidus de } f \text{ à l'intérieur de } \gamma\},$$

vu que le cercle unité tourne une fois dans le sens positif autour des pôles qui lui sont intérieurs et zéro fois autour des pôles qui lui sont extérieurs.

D'autre part, un calcul direct en utilisant (5.10) donne

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(e^{it})ie^{it}dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{ie^{it}} R(\cos t, \sin t)ie^{it}dt = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt,$$

ce qui établit le résultat. □

Exemple. Evaluer

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + a^2 - 2a\cos t}, a \in \mathbb{R}, a \neq \pm 1.$$

On a $R(x, y) = \dfrac{1}{1 + a^2 - 2ax}$. Pour $-1 \leq x \leq +1$,

$$\begin{aligned} 1 + a^2 - 2ax &\geq 1 + a^2 - 2a = (1 - a)^2 > 0, \text{ si } a \geq 0, a \neq 1, \\ 1 + a^2 - 2ax &\geq 1 + a^2 + 2a = (1 + a)^2 > 0, \text{ si } a \leq 0, a \neq -1. \end{aligned}$$

On calcule à partir de (5.10) que

$$f(z) = \frac{i}{(z - a)(az - 1)}.$$

– Si $|a| < 1$, alors

$$f(z) = \frac{1}{z - a}\left(\frac{i}{a^2 - 1} + \dots\right), \text{ au voisinage de } z = a,$$

et donc

$$I = 2\pi i \text{ rés } (f, a) = 2\pi i \frac{i}{a^2 - 1} = \frac{2\pi}{1 - a^2}.$$

– Si $|a| > 1$, alors

$$f(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{a}}\left(\frac{i}{a(\frac{1}{a} - a)} + \dots\right), \text{ au voisinage de } z = \frac{1}{a},$$

et donc

$$I = 2\pi i \text{ rés}\left(f, \frac{1}{a}\right) = 2\pi i \frac{i}{1 - a^2} = \frac{2\pi}{a^2 - 1}.$$

- $2^{\text{ème}}$ **type** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Le résultat le plus simple sur les intégrales de ce type est le suivant.

Théorème 5.3.2. *Soit f(z) une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ sauf en un nombre fini de points, dont aucun ne se trouve sur l'axe réel. Supposons qu'il existe une constante M et un nombre R tels que*

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^\alpha}, \text{ pour } |z| \geq R, \text{ avec } \alpha > 1.$$

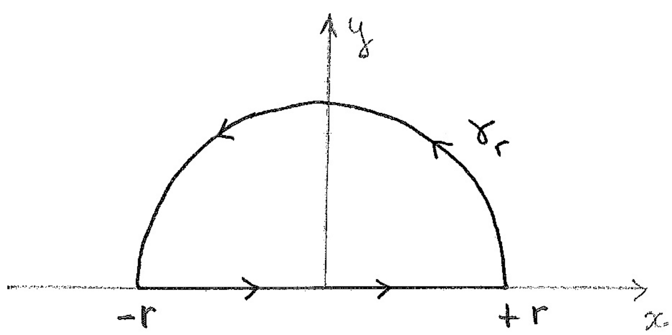
Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$ *et*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= 2\pi i \sum \{\textit{résidus de } f \textit{ dans le demi-plan supérieur}\} && (5.11) \\ &= -2\pi i \sum \{\textit{résidus de } f \textit{ dans le demi-plan inférieur}\}. && (5.12) \end{aligned}$$

Démonstration. Par hypothèse on a

$$\int_R^\infty \Big|f(x)\Big|dx \leq M \int_R^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = M \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_R^\infty = M \frac{R^{1-\alpha}}{\alpha - 1} < +\infty,$$

puisque $\alpha > 1$. De même $\int_{-\infty}^{-R} |f(x)|dx < +\infty$ et donc $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$. A nouveau par hypothèse, tous les points singuliers de f sont à l'intérieur du cercle de rayon R. Pour $r \geq R$, considérons le lacet γ_r représenté sur sur la Figure ci-dessous.



Par le théorème des résidus appliqué à $U = \mathbb{C}$ et γ_r, puisque tous les points singuliers de f dans le demi-plan supérieur sont à l'intérieur de γ_r

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz = 2\pi i \sum \{\text{résidus de } f \text{ dans le demi-plan supérieur}\}, \ \forall r \geq R. \quad (5.13)$$

On a

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz = \int_{-r}^{+r} f(x)dx + \int_0^\pi f(re^{it}) ire^{it} dt. \quad (5.14)$$

Montrons que la deuxième intégrale tend vers zéro quand $r \to \infty$. En effet

$$\begin{aligned} \left|\int_0^\pi f(re^{it}) ire^{it} dt\right| &\leq \int_0^\pi |f(re^{it})| r dt \\ &\leq \frac{M}{r^\alpha} r\pi = \frac{\pi M}{r^{\alpha-1}}, \text{ puisque } r \geq R. \end{aligned}$$

Puisque $\alpha > 1$, $\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^{\alpha-1}} = 0$, ce qui établit l'assertion. En passant à la limite $r \to \infty$ dans (5.13), en utilisant (5.14), on obtient (5.11).

La formule (5.12) s'obtient en considérant un contour similaire dans le demi-plan inférieur, en observant que cette fois l'indice des points singuliers à l'intérieur de contour vaut -1, puisque le lacet tourne alors dans le sens horloger. □

Exemple. Le théorème s'applique aux fonctions rationnelles $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, où $Q(x)$ est un polynôme qui ne s'annule pas sur l'axe réel et tel que $\deg Q(x) \geq \deg P(x) + 2$. Soit par exemple à évaluer

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}.$$

Dans ce cas $P(x) = 1$, $Q(x) = x^4+1$. Les pôles de $f(z) = P(z)/Q(z)$ sont situés aux racines quatrièmes de -1, c'est-à-dire $e^{\frac{i\pi}{4}}$, $e^{\frac{3i\pi}{4}}$, $e^{\frac{5i\pi}{4}}$, $e^{\frac{7i\pi}{4}}$. Ces pôles sont simples et seulement les deux premiers se trouvent dans le demi-plan supérieur. Au voisinage de chaque pôle z_j, $1 \leq j \leq 4$, on a

$$\frac{1}{Q(z)} = \frac{1}{z - z_j}\left\{\frac{1}{Q'(z_j)} + \dots\right\},$$

donc rés $(f, z_j) = \frac{1}{4z_j^3} = -\frac{z_j}{4}$, puisque $z_j^4 = -1$. De là

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \left(\text{rés } \left(f, e^{\frac{i\pi}{4}}\right) + \text{rés } \left(f, e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\right) \\ &= 2\pi i \left(-\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{4} - \frac{e^{\frac{3i\pi}{4}}}{4}\right) = -\frac{\pi i}{2} 2i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

On peut aussi calculer certaines transformées de Fourier par calcul des résidus.

Théorème 5.3.3. *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ sauf en un nombre fini de points, dont aucun ne se trouve sur l'axe réel. Supposons que*

$$\lim_{|z|\to+\infty} |f(z)| = 0.$$

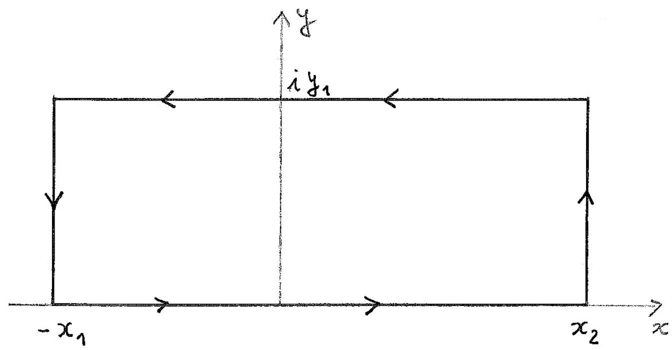
Alors, pour tout $a > 0$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}dx$ est conditionnellement convergente (c'est-à-dire, les limites $\lim_{c\to+\infty} \int_0^c f(x)e^{iax}dx$ et $\lim_{c\to-\infty} \int_c^0 f(x)e^{iax}dx$ existent) et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}dx = 2\pi i \sum \{\textit{résidus de } f(z)e^{iaz} \textit{ dans le demi-plan supérieur}\}. \tag{5.15}$$

Si $a < 0$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}dx = -2\pi i \sum \{\textit{résidus de } f(z)e^{iaz} \textit{ dans le demi-plan inférieur}\}. \tag{5.16}$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse $\exists R > 0$ tel que $|f(z)| < \varepsilon$, $\forall z$ tel que $|z| \geq R$. Supposons $a > 0$. On considère un lacet rectangulaire comme sur la Figure ci-dessous



avec $x_1, x_2, y_1 \geq R$, de sorte que tous les points singuliers de f situés dans le demi-plan supérieur sont à l'intérieur du rectangle. Par le théorème des résidus appliqué à $U = \mathbb{C}$ et au lacet ainsi défini

$$\int_{-x_1}^{x_2} f(x)e^{iax}dx + I_1 + I_2 + I_3 = 2\pi i \sum \{\text{résidus de } f(z)e^{iaz} \text{ dans le demi-plan supérieur}\} \tag{5.17}$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{y_1} f(x_2+iy)e^{ia(x_2+iy)}idy, \\ I_2 &= -\int_{-x_1}^{x_2} f(x+iy_1)e^{ia(x+iy_1)}dx, \\ I_3 &= -\int_0^{y_1} f(-x_1+iy)e^{ia(-x_1+iy)}idy. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Estimons ces trois intégrales. Puisque $x_2 \geq R$, on a

$$|f(x_2+iy)| < \varepsilon$$

et donc

$$|I_1| \leq \int_0^{y_1} |f(x_2+iy)|e^{-ay}dy < \varepsilon \int_0^{y_1} e^{-ay}dy = \frac{\varepsilon}{a}(1-e^{-ay_1}) < \frac{\varepsilon}{a}, \tag{5.19}$$

puisque $a > 0$. De même, on a

$$|I_3| < \frac{\varepsilon}{a}. \tag{5.20}$$

Puisque $y_1 \geq R$, on a

$$|f(x+iy_1)| < \varepsilon$$

et donc

$$|I_2| \leq \int_{-x_1}^{x_2} \Big| f(x+iy_1) \Big| e^{-ay_1}dx < \varepsilon e^{-ay_1}(x_1+x_2). \tag{5.21}$$

Des estimations (5.19), (5.20) et (5.21), on déduit à partir de (5.17) que

$$\left|\int_{-x_1}^{x_2} f(x)e^{iax}dx - 2\pi i \sum\{\text{résidus de } f(z)e^{iaz} \text{ dans le demi-plan supérieur}\}\right|$$
$$< \frac{2\varepsilon}{a} + \varepsilon e^{-ay_1}(x_1+x_2), \quad \forall x_1, x_2, y_1 \geq R.$$

En faisant tendre $y_1 \to +\infty$, puisque $a > 0$, on obtient

$$\left|\int_{-x_1}^{x_2} f(x)e^{iax}dx - 2\pi i \sum\{\text{résidus de } f(z)e^{iaz} \text{ dans le demi-plan supérieur}\}\right| \leq \frac{2\varepsilon}{a},$$

$\forall x_1, x_2 \geq R$. Ceci établit l'existence de la limite

$$\lim_{\substack{x_1\to+\infty \\ x_2\to+\infty}} \int_{-x_1}^{x_2} f(x)e^{iax}dx.$$

L'existence de cette double limite est équivalente à l'assertion que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}dx$ est conditionnellement convergente. De plus le raisonnement montre que cette intégrale admet l'évaluation en termes de résidus annoncée en (5.15).

Un raisonnement semblable avec un lacet rectangulaire dans le demi-plan inférieur, donne le résultat (5.16) quand $a < 0$, en observant que l'indice de chaque point singulier dans le demi-plan inférieur par rapport à ce lacet est -1. $\square$

Exemple. Soit à évaluer l'intégrale

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+m^2}dx, \text{ où } m > 0.$$

– Si $a > 0$, (5.15) donne

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \text{ rés } \left(\frac{e^{iaz}}{z^2+m^2}, im\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-ma}}{m}.$$

– Si $a < 0$, (5.16) donne

$$I = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \text{ rés } \left(\frac{e^{iaz}}{z^2+m^2}, -im\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{ma}}{m}.$$

– Si $a = 0$, (5.11) donne

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \text{ rés } \left(\frac{1}{z^2+m^2}, im\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{m},$$

de sorte que $I = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{e^{-m|a|}}{m}$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Valeur principale de Cauchy

On peut étendre les Théorèmes 5.3.2 et 5.3.3 au cas où la fonction $f(z)$ admet des singularités sur l'axe réel, pour autant que ce soient des pôles simples et que l'intégrale soit interprétée au sens de la valeur principale de Cauchy.

Soit $f(x)$ continue sur $\mathbb{R}$ sauf en $x = x_0$ et telle que

$$\int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_0+\eta}^{+\infty} f(x)dx < +\infty \ , \ \forall \varepsilon, \eta > 0.$$

Si la limite de chacune des deux intégrales existe lorsque $\varepsilon \to 0$ et $\eta \to 0$ (indépendamment l'un de l'autre), on dit que l'intégrale converge. Considérons par exemple

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^3} + \int_{\eta}^{\infty} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2\eta^2}.$$

Cette intégrale n'est pas convergente, puisque la limite $\varepsilon \to 0$, $\eta \to 0$, n'existe pas. Par exemple si $\eta = 2\varepsilon$, on a $-\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2\eta^2} = -\frac{3}{8\varepsilon^2}$ et la limite vaut $-\infty$ quand $\varepsilon \to 0$, tandis que si $\eta = \varepsilon$, on a $-\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2\varepsilon^2} = 0$, et la limite est nulle quand $\varepsilon \to 0$. Donc la limite dépend de la manière dont ε et η tendent vers zéro. Néanmoins, si la limite existe quand $\varepsilon = \eta \to 0$ (c'est-à-dire de manière symétrique) on appelle cette limite la valeur principale de Cauchy, ce que l'on note

$$vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = 0.$$

Plus généralement, on introduit la définition suivante :

Définition 5.3.4. *Soit f continue sur $\mathbb{R}$ sauf en $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Si $\int_{-\infty}^{x_1-\varepsilon} f(x)dx < +\infty$ et $\int_{x_n+\varepsilon}^{+\infty} f(x)dx < +\infty$ $\forall \varepsilon > 0$ et si la limite*

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left(\int_{-\infty}^{x_1-\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}+\varepsilon}^{x_n-\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_n+\varepsilon}^{+\infty} f(x)dx \right)$$

*existe et est finie, on appelle cette limite la **valeur principale de Cauchy**, et on la note $vp \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.*

Théorème 5.3.5. *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ sauf en un nombre fini de points. Supposons que les singularités de $f(z)$ sur l'axe réel sont des pôles simples. Alors, si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite*

(1) $\exists\ R, M > 0$ *tels que* $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^\alpha}$, *pour* $|z| \geq R$, *avec* $\alpha > 1$, *ou*

(2) $f(z) = e^{iaz}g(z)$, *avec* $a > 0$, *et* $\lim_{|z|\to+\infty} |g(z)| = 0$,

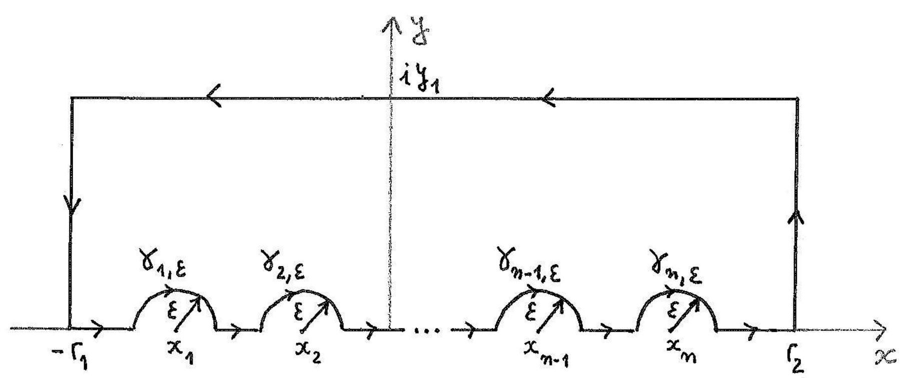
la valeur principale de Cauchy $vp \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *existe et*

$$vp \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum\{\textit{résidus de } f(z) \textit{ dans le demi-plan supérieur}\}$$
$$+\pi i \sum\{\textit{résidus de } f(z) \textit{ sur l'axe réel}\}. \tag{5.22}$$

Avec les mêmes hypothèses si dans (2) on a $f(z) = e^{iaz}g(z)$, *avec* $a < 0$, *alors*

$$vp \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = -2\pi i \sum\{\textit{résidus de } f(z) \textit{ dans le demi-plan inférieur}\}$$
$$-\pi i \sum\{\textit{résidus de } f(z) \textit{ sur l'axe réel}\}. \tag{5.23}$$

Démonstration. Dans les deux cas, on adapte la démonstration des Théorèmes 5.3.2 et 5.3.3 de la même manière. Par exemple, pour le cas (2), on considère le lacet



où $r_1, r_2, y_1 \geq R$ et $\varepsilon > 0$ est choisi suffisamment petit pour que toutes les singularités de $f(z)$ dans le demi-plan supérieur soient à l'intérieur du lacet. On note $\gamma_{j,\varepsilon}, 1 \leq j \leq n$, les demi-cercles de rayon $\varepsilon > 0$, centrés en x_j :

$$\gamma_{j,\varepsilon} : [0, \pi] \to \mathbb{C} \ , \ \gamma_{j,\varepsilon}(t) = x_j + \varepsilon e^{i(\pi-t)}. \tag{5.24}$$

Par le théorème des résidus, on obtient

$$\int_{-r_1}^{x_1-\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}+\varepsilon}^{x_n-\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_n+\varepsilon}^{r_2} f(x)dx$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_{j,\varepsilon}} f(z)dz + I_1 + I_2 + I_3 =$$
$$2\pi i \sum\{\text{résidus de } f(z) \text{ dans le demi-plan supérieur}\},$$

où I_1, I_2 et I_3 sont définis comme en (5.18) (avec x_1 et x_2 dans cette formule remplacés par r_1 et r_2). Par un raisonnement semblable à celui fait dans le Théorème

5.3.3, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{x_1-\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}+\varepsilon}^{x_n-\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_n+\varepsilon}^{+\infty} f(x)dx \\
&= 2\pi i \sum \{\text{résidus de } f(z) \text{ dans le demi-plan supérieur}\} \\
&\qquad - \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_{j,\varepsilon}} f(z)dz. \qquad (5.25)
\end{aligned}$$

Par hypothèse, x_j est un pôle simple de $f(z)$, donc

$$f(z) = \frac{a_j}{z-x_j} + h_j(z), \text{ au voisinage de } x_j,$$

avec $h_j(z)$ holomorphe. Puisque $h_j(z)$ est continue sur $\gamma_{j,\varepsilon}$, $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_{j,\varepsilon}} h_j(z)dz = 0$, et en utilisant (5.24)

$$\int_{\gamma_{j,\varepsilon}} \frac{a_j}{z-x_j} dz = a_j \int_0^{\pi} \frac{-\varepsilon i e^{i(\pi-t)}}{\varepsilon e^{i(\pi-t)}} dt = -\pi i a_j,$$

donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_{j,\varepsilon}} f(z)dz = -\pi i a_j = -\pi i \text{ rés}(f, x_j).$$

On peut alors passer à la limite $\varepsilon \to 0$ dans (5.25) ce qui établit à la fois l'existence de $vp \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ et la formule (5.22). □

Exemple. Par le Théorème 5.3.5 (2), l'intégrale

$$I = vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$$

existe et vaut πi rés $\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0\right) = \pi i$.

En prenant la partie réelle et la partie imaginaire de I, on obtient donc

$$vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0 \quad \text{et} \quad vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

Puisque $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est (conditionnellement) convergente et donc

$$\begin{aligned}
vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ \varepsilon>0}} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \right) \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.
\end{aligned}$$

Nous avons donc établi que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$.

- **$3^{\text{ème}}$ type. Intégrales faisant intervenir des fonctions multivaluées**

A titre d'exemple, on se propose d'évaluer l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{x^a}{1+x} dx \ , \qquad -1 < a < 0.$$

Soit $f(x) = \dfrac{x^a}{1+x}$. Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{a-1}} = 1$, il existe des constantes $M_1, R_1 > 0$ telles que $f(x) \le M_1 x^{a-1}$, pour $x \ge R_1$, et donc

$$\int_{R_1}^\infty f(x)dx \le M_1 \int_{R_1}^\infty x^{a-1} dx = M_1 \left[\frac{x^a}{a}\right]_{R_1}^\infty = -M_1 \frac{R_1^a}{a},$$

puisque $a < 0$. Comme $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{x^a} = 1$, il existe aussi des constantes $M_2, R_2 > 0$ telles que $f(x) \le M_2 x^a$, pour $x \le R_2$, et donc

$$\int_0^{R_2} f(x)dx \le M_2 \int_0^{R_2} x^a dx = M_2 \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_0^{R_2} = M_2 \frac{R_2^{a+1}}{a+1},$$

puisque $a + 1 > 0$. L'intégrale est donc convergente pour $-1 < a < 0$.

Considérons la détermination holomorphe du logarithme complexe sur l'ouvert simplement connexe $U = \mathbb{C}\backslash[0, \infty[$, définie par

$$\log z = \ln|z| + i \arg z, \qquad 0 < \arg z < 2\pi.$$

La fonction

$$f(z) = \frac{e^{a \log z}}{1+z}$$

est holomorphe sur $U\backslash\{-1\}$, elle possède un pôle simple en $z = -1$ et le résidu en ce point est

$$\text{rés } (f, -1) = e^{a\log(-1)} = e^{ia\pi}.$$

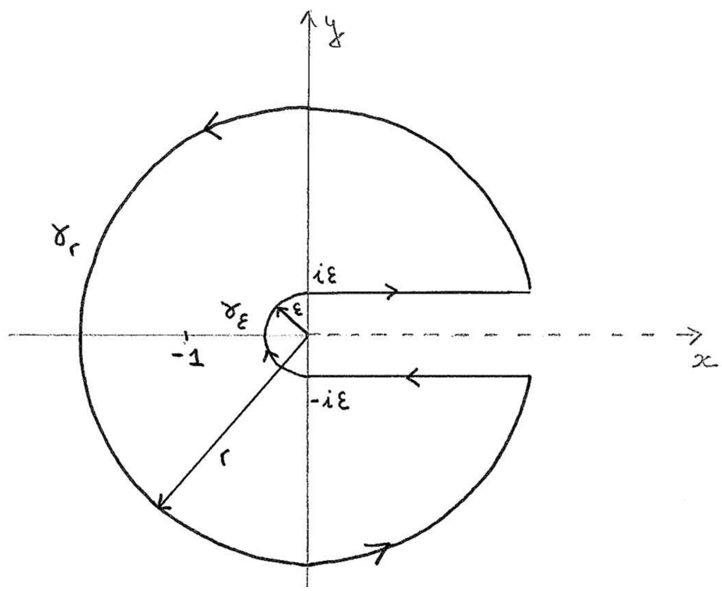
Remarquons que pour $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, on a

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} f(x + i\varepsilon) = \frac{e^{a\ln x}}{1+x} = \frac{x^a}{1+x}, \tag{5.26}$$

tandis que

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} f(x - i\varepsilon) = \frac{e^{a(\ln x + 2\pi i)}}{1+x} = e^{2\pi i a} \frac{x^a}{1+x}. \tag{5.27}$$

Soit le lacet $\delta_{r,\varepsilon}$ dans U comme sur la Figure ci-dessous



où $r > 1$ et $0 < \varepsilon < 1$. Puisque U est simplement connexe, le lacet $\delta_{r,\varepsilon}$ est homotope à un point dans U et le théorème des résidus donne

$$\int_{\delta_{r,\varepsilon}} f(z)dz = 2\pi i \text{ rés } (f, -1) = 2\pi i e^{ia\pi}, \ \forall r > 1, \ \forall 0 < \varepsilon < 1. \tag{5.28}$$

Notons γ_r l'arc de cercle de rayon r et γ_ε l'arc de cercle de rayon ε, contenus dans le lacet $\delta_{r,\varepsilon}$, comme indiqué sur la Figure. Sur γ_r on a

$$e^{a \log z} = e^{a(\ln r + i \arg z)} = r^a e^{i \arg z}$$

et

$$|1 + z| \geq \Big| 1 - |z| \Big| = |z| - 1 = r - 1, \text{ puisque } r > 1,$$

et donc

$$|f(z)| = \left| \frac{e^{a \log z}}{1+z} \right| = \frac{r^a}{|1+z|} \leq \frac{r^a}{r-1}, \text{ sur } \gamma_r.$$

On en déduit que

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z)dz \right| \leq \left(\max_{z \in \gamma_r} |f(z)| \right) \ell(\gamma_r) \leq 2\pi \frac{r^{a+1}}{r-1} \ \to 0 \text{ quand } r \to \infty, \text{ puisque } a < 0.$$

De même sur γ_ε, puisque $\dfrac{1}{1+z}$ est bornée au voisinage de 0, on a

$$|f(z)| = \frac{\varepsilon^a}{|1+z|} \leq M\varepsilon^a \ , \quad \text{sur } \gamma_\varepsilon,$$

et donc

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz \right| \leq \left(\max_{z \in \gamma_\varepsilon} |f(z)| \right) \ell(\gamma_\varepsilon) \leq \pi M \varepsilon^{a+1} \ \to 0 \text{ quand } \varepsilon \to 0, \text{ puisque } a + 1 > 0.$$

Décomposant l'intégrale sur le lacet (5.28) en ses différentes composantes, on obtient

$$2\pi i e^{ia\pi} = \int_0^{\sqrt{r^2-\varepsilon^2}} f(x+i\varepsilon)dx - \int_0^{\sqrt{r^2-\varepsilon^2}} f(x-i\varepsilon)dx + \int_{\gamma_r} f(z)dz + \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz,$$

$$\forall r > 1,\ \forall 0 < \varepsilon < 1,$$

ce qui en passant à la limite $r \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, et en utilisant (5.26) et (5.27) donne

$$\begin{aligned} 2\pi i e^{ia\pi} &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left(\int_0^\infty f(x+i\varepsilon)dx - \int_0^\infty f(x-i\varepsilon)dx \right) \\ &= \int_0^\infty \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} f(x+i\varepsilon)dx - \int_0^\infty \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} f(x-i\varepsilon)dx \\ &= (1-e^{2\pi i a}) \int_0^\infty \frac{x^a}{1+x}dx. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Donc

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x}dx = \frac{2\pi i e^{ia\pi}}{1-e^{2\pi i a}} = -\frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Le passage de la limite à travers l'intégrale dans (5.29) se justifie aisément par convergence dominée. En effet, puisque $a < 0$,

$$\left| f(x \pm i\varepsilon) \right| = \frac{e^{a \ln |x \pm i\varepsilon|}}{|1+x \pm i\varepsilon|} < \frac{e^{a \ln x}}{1+x} = \frac{x^a}{1+x},$$

et $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x}dx < +\infty$.

5.4 Nombre de zéros et de pôles d'une fonction méromorphe

Théorème 5.4.1 (Principe de l'argument)**.** *Soit f une fonction méromorphe sur un ouvert simplement connexe $U \subset \mathbb{C}$, dont l'ensemble F des zéros et des pôles est fini. Soit γ un lacet dans $U \backslash F$, alors*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{z_j \in F} v_{z_j}(f)\ Ind_\gamma(z_j), \tag{5.30}$$

où $v_{z_j}(f)$ s'appelle la valuation de f en z_j et est définie comme suit

$$v_{z_j}(f) = \begin{cases} \text{ordre du zéro de } f \text{ en } z_j, \text{ si } z_j \text{ est un zéro,} \\ -\text{ordre du pôle de } f \text{ en } z_j, \text{ si } z_j \text{ est un pôle.} \end{cases}$$

Démonstration. Puisque $f(z)$ est holomorphe et différente de zéro sur $U\backslash F$ et que $f'(z)$ est aussi holomorphe sur $U\backslash F$, la fonction $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ est holomorphe sur $U\backslash F$. Au voisinage de tout point $z_j \in F$, on a

$$f(z) = (z - z_j)^{n_j} g(z), \text{ avec } g(z) \text{ holomorphe au voisinage de } z_j \text{ et } g(z_j) \neq 0,$$

où $n_j = v_{z_j}(f)$, et donc

$$f'(z) = n_j(z - z_j)^{n_j - 1} g(z) + (z - z_j)^{n_j} g'(z),$$

d'où l'on obtient que au voisinage de z_j

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_j}{z - z_j} + \frac{g'(z)}{g(z)}, \text{ avec } \frac{g'(z)}{g(z)} \text{ holomorphe au voisinage de } z_j.$$

Donc

$$\text{rés}\left(\frac{f'}{f}, z_j\right) = n_j = v_{z_j}(f).$$

Par hypothèse, le lacet γ ne passe pas par les points singuliers de $\dfrac{f'}{f}$, et il est homotope à un point dans U, puisque U est simplement connexe. Le théorème des résidus donne alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz &= \sum_{z_j \in F} \text{rés}\left(\frac{f'}{f}, z_j\right) \operatorname{Ind}_\gamma(z_j) \\ &= \sum_{z_j \in F} v_{z_j}(f) \operatorname{Ind}_\gamma(z_j). \end{aligned}$$

□

Interprétation géométrique

Le Théorème 5.4.1 s'appelle le principe de l'argument au vu de l'interprétation géométrique suivante. Soit $\gamma : [a, b] \to U\backslash F$, une paramétrisation du lacet. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\gamma'(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{(f\circ\gamma)'(t)}{(f\circ\gamma)(t)}dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma} \frac{dz}{z} = \operatorname{Ind}_{f\circ\gamma}(0). \end{aligned}$$

Donc l'intégrale $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ compte le nombre de tours orientés que fait l'image du lacet γ par f autour de 0 (clairement le lacet $f \circ \gamma$ ne passe pas par 0, puisque f ne s'annule pas sur γ). Autrement dit

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi} \operatorname{var}_\gamma \arg f(z),$$

où $\mathrm{var}_\gamma \arg f(z)$ est la variation de l'argument de $f(z)$, lorsque z parcourt le lacet γ.

Définition 5.4.2. *On dira qu'un lacet γ est **simple et positivement orienté** si*

$$Ind_\gamma(z) = 1 \text{ où } Ind_\gamma(z) = 0, \ \forall\, z \in \mathbb{C}\backslash Im\ \gamma.$$

Les points $z \in \mathbb{C}\backslash Im\ \gamma$ pour lesquels l'indice vaut 1 (respectivement 0) sont appelés les points intérieurs (respectivement extérieurs) au lacet γ.

Le principe de l'argument est souvent appliqué au cas d'un lacet simple positivement orienté. Dans ce cas, la formule (5.30) se réduit à la formule (5.31) ci-dessous.

Corollaire 5.4.3. *Avec les mêmes hypothèses que dans le Théorème 5.4.1, si de plus γ est un lacet simple positivement orienté, on a*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = Z_f - P_f, \tag{5.31}$$

où Z_f (respectivement P_f) est le nombre de zéros (respectivement le nombre de pôles) de f à l'intérieur du lacet γ, comptés avec leurs multiplicités.

Le théorème qui suit est un outil assez pratique pour compter les zéros d'une fonction (d'un polynôme, par exemple), dans un ouvert du plan complexe.

Théorème 5.4.4. *(**Théorème de Rouché**) Soient f et g des fonctions méromorphes sur un ouvert simplement connexe $U \subset \mathbb{C}$, avec un nombre fini de zéros et de pôles dans U. Soit γ un lacet simple positivement orienté dans U, ne passant par aucun pôle de f et de g. Supposons que*

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|\ ,\ \forall\, z \in\ Im\ \gamma, \tag{5.32}$$

alors

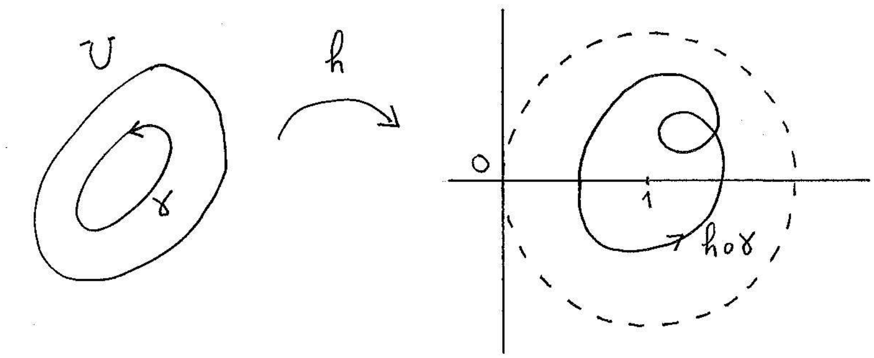
$$Z_f - P_f = Z_g - P_g$$

où Z_f, P_f, Z_g et P_g sont définis comme dans le Corollaire 5.4.3.

Démonstration. L'inégalité (5.32) montre en particulier que $f(z)$ et $g(z)$ ne s'annulent pas sur $\mathrm{Im}\gamma$. La fonction $h(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$ est par hypothèse méromorphe sur U et, par la remarque précédente, elle n'a pas de zéro et de pôle sur γ. On peut donc écrire (5.32) comme suit

$$|h(z) - 1| < 1,\ \forall\, z \in\ \mathrm{Im}\ \gamma,$$

ce qui veut dire que l'image $h \circ \gamma$ du lacet γ par l'application h est entièrement contenue dans le disque de centre 1 et de rayon 1.



En vertu de l'interprétation géométrique donnée précédemment, on a donc

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)}dz = \mathrm{Ind}_{h\circ\gamma}(0) = 0.$$

Un simple calcul montre que

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)},$$

et donc, en vertu du Corollaire 5.4.3 appliqué à f et g, on en déduit que

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz = (Z_f - P_f) - (Z_g - P_g).$$

□

Exemple. On se propose de déterminer le nombre de zéros comptés avec multiplicités du polynôme $f(z) = z^8 - 5z^3 + z - 2$ à l'intérieur du cercle unité, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Soit $g(z) = -5z^3$. Pour tout $z \in \mathrm{Im}\ \gamma$, c'est-à-dire $|z| = 1$, on a

$$|f(z) - g(z)| = |z^8 + z - 2| \leq |z|^8 + |z| + 2 = 4 < |g(z)| = |5z^3| = 5.$$

On déduit alors du Théorème de Rouché que

$$Z_f = Z_g = 3,$$

où Z_f et Z_g dénotent le nombre de zéros de f et de g à l'intérieur du cercle unité, comptés avec multiplicités.

5.5 Le résidu à l'infini

Soit une fonction f holomorphe sur le complémentaire d'un disque fermé de rayon $R \geq 0$, c'est-à-dire

$$f : A(0; R, \infty) = \{z \in \mathbb{C}\ |; |z| > R\} \to \mathbb{C}.$$

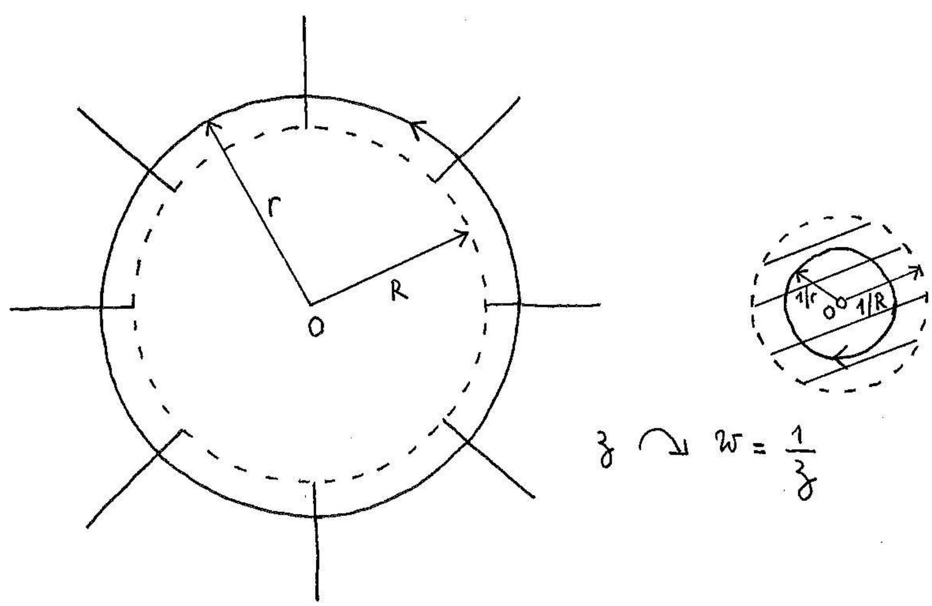
Par le théorème de Laurent (Théorème 4.2.4) f admet le développement

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

où la première série définit une fonction holomorphe sur $|z| > R$ et la deuxième série définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. On cherche à comprendre le comportement de $f(z)$ quand $|z| \to +\infty$. Pour ce faire, il est naturel de faire le changement de variable $w = \dfrac{1}{z}$ et de considérer la fonction

$$g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{w^n} \tag{5.33}$$

qui est holomorphe sur le disque pointé $A\Big(0; 0, \dfrac{1}{R}\Big)$ de centre 0 et de rayon $\dfrac{1}{R}$. Le développement (5.33) est le développement de Laurent de la fonction $g(w)$ sur ce disque pointé. La première série est holomorphe sur $|w| < \dfrac{1}{R}$ et la deuxième sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Comprendre le comportement de $f(z)$ quand $|z| \to +\infty$, revient à comprendre le comportement de $g(w)$ au voisinage de $w = 0$.



Définition 5.5.1. *On dira que $f(z)$ est holomorphe (resp. méromorphe, resp. possède une singularité essentielle) en $z = \infty$ si et seulement si $g(w) = f\Big(\dfrac{1}{w}\Big)$ est holomorphe (resp. méromorphe, resp. possède une singularité essentielle) en $w = 0$.*

Définition 5.5.2. *Soit $f : A(0; R, \infty) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, le* ***résidu de*** *f* ***à l'infini****, noté rés (f, ∞) est défini comme suit*

$$\text{rés}\big(f(z), z = \infty\big) = \text{rés}\ \left(-\frac{1}{w^2} f\Big(\frac{1}{w}\Big), w = 0\right). \tag{5.34}$$

Pour retenir cette définition, on écrit formellement

$$f(z)dz = f\Big(\frac{1}{w}\Big)d\Big(\frac{1}{w}\Big) = -\frac{1}{w^2}f\Big(\frac{1}{w}\Big)dw,$$

ce qui peut se justifier dans le cadre de la théorie des formes différentielles.

Théorème 5.5.3. *Soit $f : A(0; R, \infty) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors $\forall r > R$, on a*

$$\text{rés } (f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,r)} f(z)dz, \tag{5.35}$$

où $C(0, r)$ dénote le cercle de centre 0 et de rayon r, parcouru en sens direct (sens anti-horloger).

Démonstration. Il suffit de montrer que

$$\int_{C(0,r)} f(z)dz = \int_{C^*(0,\frac{1}{r})} -\frac{1}{w^2}f\Big(\frac{1}{w}\Big)dw, \tag{5.36}$$

où $C^*\Big(0, \dfrac{1}{r}\Big)$ dénote le cercle du centre 0 et de rayon $\dfrac{1}{r}$ parcouru dans le sens horloger. En effet, si c'est le cas, en vertu des Définitions 5.2.1 et 5.5.2, on a

$$\text{rés } (f, \infty) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,\frac{1}{r})} -\frac{1}{w^2}f\Big(\frac{1}{w}\Big)dw = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,r)} f(z)dz,$$

où $C\Big(0, \dfrac{1}{r}\Big)$ et $C(0, r)$ sont les cercles de centres 0 et de rayons respectifs $\dfrac{1}{r}$ et r parcourus en sens direct. Il reste à établir (5.36). On a

$$\begin{aligned}
&\int_{C^*(0,\frac{1}{r})} -\frac{1}{w^2}f\Big(\frac{1}{w}\Big)dw = \int_{C(0,\frac{1}{r})} \frac{1}{w^2}f\Big(\frac{1}{w}\Big)dw \\
&= \int_0^{2\pi} r^2e^{-2it}f(re^{-it})\frac{i}{r}e^{it}dt \\
&= -\int_0^{2\pi} f(re^{-it})(-ire^{-it})dt \\
&= -\int_{C^*(0,r)} f(z)dz = \int_{C(0,r)} f(z)dz,
\end{aligned}$$

où $C^*(0, r)$ est le cercle de centre 0 et de rayon r, parcouru dans le sens horloger. □

A titre d'illustration du résidu à l'infini, évaluons l'intégrale

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

par résidus. Bien sûr cette intégrale vaut π, une primitive est donnée par arc sin x.

On laisse au lecteur le soin d'établir qu'il existe une détermination holomorphe $f(z)$ de $\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ sur $\mathbb{C}\backslash[-1,+1]$ avec les propriétés suivantes

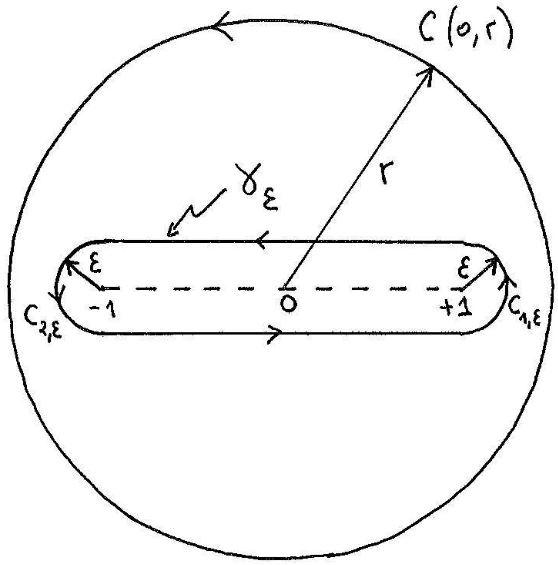
$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ >}} f(x\pm i\varepsilon) = \mp\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x\in\,]-1,1[, \tag{5.37}$$

$$f(x) = \frac{1}{i\sqrt{x^2-1}},\ \text{pour } x\in\mathbb{R}, x>1, \tag{5.38}$$

$$f(x) = -\frac{1}{i\sqrt{x^2-1}},\ \text{pour } x\in\mathbb{R}, x<-1, \tag{5.39}$$

où la racine carrée dans ces formules dénote la racine carrée positive.

Considérons le lacet γ_ε représenté sur la Figure ci-dessous.



Ce lacet est homotope dans l'ouvert $U=\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ à un cercle $C(0,r)$ de centre 0 et de rayon r, pour r suffisamment grand (voir la Figure). Comme $f(z)$ est holomorphe sur U, on a donc

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,r)} f(z)dz = -\text{rés }(f,\infty), \tag{5.40}$$

où la dernière égalité résulte de (5.35).

A partir de (5.38) (on pourrait aussi utiliser (5.39)), on a

$$\begin{aligned} -\frac{1}{w^2}f\Big(\frac{1}{w}\Big) &= -\frac{1}{w^2}\frac{1}{i\sqrt{\frac{1}{w^2}-1}},\ \text{pour } 0<w<1,\\ &= \frac{i}{w}\frac{1}{\sqrt{1-w^2}} = \frac{1}{w}\Big(i+O(w)\Big), \end{aligned}$$

et donc rés $(f, \infty) = i$.

Notons $C_{1,\varepsilon}$ et $C_{2,\varepsilon}$ les deux demi-cercles contenus dans le lacet γ_ε. On montre facilement que

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{C_j^\varepsilon} f(z) dz = 0 \quad , \quad j = 1, 2.$$

En utilisant (5.37), on en déduit que

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz = 2 \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

En passant à la limite $\varepsilon \to 0$ dans (5.40), on obtient

$$\frac{1}{2\pi i} \, 2 \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -i,$$

c'est-à-dire $I = \pi$.

5.6 Exercices

1. (a) On considère le lacet rectangulaire γ positivement orienté dans le plan complexe ayant pour sommets $-u, v, -u + 2\pi i, v + 2\pi i$, où u, v sont des nombres réels strictement positifs. Evaluer, par le théorème des résidus, l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{e^{az}}{1 + e^z} \, dz, \quad a \in \mathbb{C},$$

et justifier son application.

(b) Supposons que $a \in \mathbb{R}$ et soit tel que $0 < a < 1$. Exprimer la limite lorsque $u, v \to +\infty$ de l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{e^{az}}{1 + e^z} \, dz,$$

en terme d'une intégrale le long de l'axe réel, où γ est le lacet décrit en (a). Justifier en détail votre réponse.

(c) En déduire la valeur de l'intégrale sous forme réelle

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} \, dx, \quad 0 < a < 1.$$

2. (a) Montrer que la fonction

$$f(z) = \frac{e^{az}}{e^z + e^{-z}},$$

où $a \in \mathbb{C}$, est méromorphe sur $\mathbb{C}$. Déterminer l'ensemble des pôles de la fonction ainsi que leur ordre et calculer le résidu en chaque pôle.

(b) On considère le lacet rectangulaire γ positivement orienté dans le plan complexe ayant pour sommets $-u, v, -u+i\pi, v+i\pi$, où u, v sont des nombres réels strictement positifs. Evaluer, par le théorème des résidus, l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{e^{az}}{e^z+e^{-z}}\,dz,$$

et justifier son application.

(c) Supposons que $a \in \mathbb{R}$ et soit tel que $-1<a<1$. Exprimer la limite lorsque $u, v \to +\infty$ de l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{e^{az}}{e^z+e^{-z}}\,dz,$$

en terme d'une intégrale le long de l'axe réel, où γ est le lacet décrit en (b). Justifier en détail votre réponse.

(d) En déduire la valeur de l'intégrale sous forme réelle

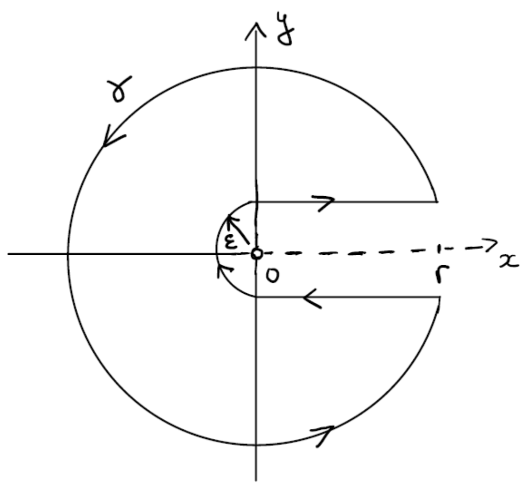
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{e^x+e^{-x}}\,dx, \quad -1<a<1.$$

3. (a) Choisir une détermination de $\log(z)$ telle que

$$f(z)=\frac{\log^2(z)}{(z+1)^2(z+2)}$$

soit méromorphe sur $\mathbb{C}\setminus[0,\infty[$. Déterminer l'ensemble des pôles de la fonction ainsi que leur ordre et calculer le résidu en chaque pôle.

(b) Soit le lacet γ représenté ci-dessous, où les nombres réels ε et r vérifient $0<\varepsilon<1<\frac{r}{2}$.



Evaluer par le théorème des résidus (en justifiant son application) l'intégrale

$$\int_\gamma f(z)\,dz.$$

(c) Exprimer la limite lorsque $r \to \infty$ et $\varepsilon \to 0$ de l'intégrale

$$\int_\gamma f(z)\, dz$$

en termes d'une intégrale le long de l'axe réel positif. Justifier en détail votre réponse.

(d) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x+1)^2(x+2)}\, dx.$$

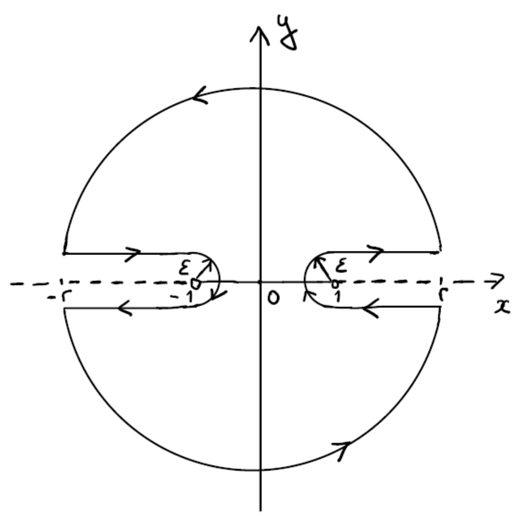
On demande d'exprimer le résultat final sous forme réelle.

4. (a) Montrer qu'il existe une unique détermination holomorphe $f(z)$ de $\sqrt{z^2-1}$ sur l'ouvert $U = \mathbb{C} \setminus \big(]-\infty,-1] \cup [1,\infty[\big)$ telle que $f(x) = i\sqrt{1-x^2}$ sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$, où $\sqrt{1-x^2}, x \in]-1,1[$, est la racine carrée positive.

(b) Evaluer par le théorème des résidus

$$\int_\gamma \frac{dz}{zf(z)},$$

sur le lacet γ contenu dans l'ouvert U, $0 < \varepsilon < 1 < r$, représenté ci-dessous



où f est la fonction définie en (a), et justifier son application.

(c) Exprimer la limite lorsque $r \to \infty$ et $\varepsilon \to 0$ de l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{dz}{zf(z)},$$

en termes d'une intégrale le long de l'axe réel positif. Justifier en détail votre réponse.

(d) En déduire (sous forme réelle) la valeur de l'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

5. Evaluer l'intégrale
$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x}},$$
en appliquant le théorème des résidus sur un contour adéquat. Justifier toutes les étapes.

6. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

(a) Montrer qu'il existe une unique détermination holomorphe $f(z)$ de $\sqrt{(z-a)(b-z)}$ sur l'ouvert $U = \mathbb{C} \setminus [a, b]$ telle que
$$f(x) = i\sqrt{(x-a)(x-b)}, \text{ pour } x \in \mathbb{R}, x > b,$$
où $\sqrt{(x-a)(x-b)}, x \in \mathbb{R}, x > b$, est la racine carrée positive.

(b) Calculer le résidu à l'infini
$$\text{rés}\Big(\frac{z}{f(z)}, \infty\Big),$$
où $f(z)$ est définie en (a).

(c) En déduire que
$$\int_a^b \frac{x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\, dx = \pi\, \frac{a+b}{2},$$
où $\sqrt{(x-a)(b-x)}, x \in [a, b]$, est la racine carrée positive.

7. On considère le carré γ_N de sommets $(N+1/2)(\pm 1 \pm i)$, $N = 1, 2, 3, \ldots$

(a) En utilisant le théorème des résidus, calculer
$$\int_{\gamma_N} \frac{\pi\, cot(\pi\, z)}{z^2}\, dz,$$
où $cot(z) = \frac{cos(z)}{sin(z)}$.

(b) Montrer que
$$\lim_{N\to\infty} \int_{\gamma_N} \frac{\pi\, cot(\pi\, z)}{z^2}\, dz = 0.$$

(c) En déduire la célèbre formule due à Euler
$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

8. Montrer que le théorème de Rouché peut être utilisé pour démontrer le théorème fondamental de l'algèbre, à savoir qu'un polynôme de degré n à coefficients complexes possède n racines complexes (en comptant les multiplicités).

9. Utiliser le théorème de Rouché pour déterminer le nombre de racines que possède le plynôme $p(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ dans le disque unité $|z| \leq 1$, en comptant les multilicités.

10. Utiliser le théorème de Rouché pour trouver le nombre de zéros (comptés avec multiplicité) de la fonction $f(z) = e^z - 4z^2 - 1$ dans le disque unité $|z| \leq 1$.

Bibliographie

[1] L.V. Ahlfors, *Complex analysis*, 3rd edition, McGraw-Hill Book Company, 1979.

[2] M. Audin, *Analyse complexe*, `http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin/analysecomp.pdf`

[3] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Paris, Hermann, 1961.

[4] J.E. Marsden, M.J. Hoffman, *Basic complex analysis*, New York, W.H. Freeman and Company, 1987.