

Notions de physique mathématique
LMAT1161

Luc Haine
Professeur à l'Université catholique de Louvain
Ecole de mathématique
Chemin du Cyclotron 2
B-1348 Louvain-la-Neuve

16 décembre 2020

Table des matières

1	Oscillateurs linéaires et forcés	7
1.1	Equations homogènes	7
1.2	Equations inhomogènes	14
1.3	Exercices	21
2	Chaîne d'oscillateurs linéaires	23
2.1	Deux oscillateurs couplés	23
2.2	Chaîne d'oscillateurs	29
2.3	Appendice: Equations aux différences	38
2.4	Exercices	40
3	Mécanique newtonienne	43
3.1	Lois de Newton	43
3.2	Lois de conservation	50
3.2.1	Conservation de l'énergie	50
3.2.2	Conservation de la quantité de mouvement	60
3.2.3	Conservation du moment cinétique	61
3.3	Exercices	64
3.3.1	Mécanique newtonienne et relativité galiléenne	64
3.3.2	Lois de conservation	67
4	Repères cartésiens non inertiels	71
4.1	Forces fictives	71
4.2	Influence de la rotation diurne de la Terre	80
4.2.1	Expérience de Reich	80
4.2.2	Le pendule de Foucault	85
4.3	Exercices	88

5	Systèmes à un degré de liberté	93
5.1	Solution analytique	93
5.2	Diagramme du potentiel et plan de phase	104
5.2.1	Diagramme du potentiel	104
5.2.2	Plan de phase	107
5.3	Mouvement dans un champ central	112
5.4	Le problème de Kepler	116
5.5	Exercices	119

Introduction

La principale découverte de Newton, celle qu'il a cru indispensable de garder secrète et qu'il n'a publiée que sous la forme d'un anagramme tient dans la phrase suivante : "*Data aequatione quocunqve fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire; et vice versa.*" Ce qu'on traduit dans le langage mathématique moderne "Il est utile de résoudre des équations différentielles".

Vladimir Arnold

Cette citation de Vladimir Arnold (1937-2010), un des plus grands mathématiciens du 20^{ième} siècle, fixe l'objectif de ce cours qui est d'initier, via l'étude de la *mécanique rationnelle*, à la théorie mathématique des équations différentielles. La loi fondamentale de la mécanique

$$\vec{F} = m\vec{a}, \text{ "Force = masse} \times \text{accélération"},$$

est en effet une équation différentielle que l'on écrit

$$m \ddot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(t, \vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t)),$$

où $\dot{\vec{x}}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$ et $\ddot{\vec{x}}(t) = \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2}$, avec $\vec{x}(t)$ un vecteur décrivant la position du système étudié à chaque instant t . Le problème mathématique posé par la *mécanique rationnelle* est de trouver les solutions de cette équation différentielle, si l'on connaît les forces qui agissent sur le système. De nos jours, les équations différentielles apparaissent dans de nombreux problèmes de modélisation en biologie, en économie et en géographie notamment.

Le premier triomphe de l'étude des équations différentielles est la possibilité de déduire de la loi de la gravitation universelle de Newton (1643-1727), les trois célèbres lois de Kepler (1571-1630), qui régissent le mouvement des

planètes autour du Soleil. C'est ce que l'on appelle en *mécanique rationnelle* "la résolution du problème à deux corps". L'étude systématique entreprise à la fin du 19^{ième} siècle par le mathématicien Henri Poincaré (1854-1912) du problème à trois corps (par exemple le mouvement d'un satellite artificiel dans le champ de gravitation de la Terre et de la Lune), montra que les solutions de ce problème peuvent être très compliquées, et que le problème est en quelque sorte "insoluble" en général. Cette étude a conduit notamment à la *théorie du chaos*, qui s'est développée durant la deuxième moitié du 20^{ième} siècle, et est encore aujourd'hui un domaine très actif de recherche.

La difficulté du problème de la résolution des équations différentielles de la mécanique réside dans la nature des forces. Quand les forces dépendent linéairement des positions et des vitesses, les solutions peuvent être comprises explicitement. C'est le cas des équations des oscillateurs linéaires et forcés et des chaînes d'oscillateurs linéaires que nous étudions dans les chapitres 1 et 2. Quand la dépendance des forces par rapport aux positions et aux vitesses n'est plus linéaire, comme c'est le cas pour la force de gravitation universelle, le problème est en général compliqué. Nous abordons cette étude au chapitre 3, via l'étude des lois de Newton et des lois de conservation que l'on peut en déduire. Les lois de Newton sont formulées dans un repère inertiel, c'est-à-dire un repère où le principe d'inertie de Galilée (1564-1642) est vérifié (avec une bonne approximation). Le chapitre 4 est consacré à l'étude des lois de la mécanique dans des repères non inertiels, étude qui se révéla fondamentale pour le développement de la relativité générale de Albert Einstein (1879-1955). Le chapitre 5 est consacré aux seuls problèmes non linéaires de la *mécanique rationnelle* qui peuvent toujours être résolus explicitement, les systèmes à un degré de liberté, et ceux qui s'y ramènent par utilisation des lois de conservation. Cette étude est illustrée par la solution explicite du problème à deux corps, et la déduction des célèbres trois lois de Kepler.

Chapitre 1

Oscillateurs linéaires et forcés

Dans ce chapitre nous étudions les solutions d'équations différentielles du type

$$m\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + kx(t) = f(t). \quad (1.1)$$

Quand $k > 0$ et $\gamma > 0$, c'est l'équation d'un oscillateur harmonique amorti soumis à une force extérieure $f(t)$ agissant dans la direction de son mouvement et fonction du temps ; $k > 0$ est la constante de raideur du ressort, on suppose que la force de frottement $-\gamma\dot{x}(t)$, $\gamma > 0$, a le sens opposé de la vitesse et qu'elle lui est proportionnelle.

1.1 Equation linéaire homogène à coefficients constants

L'équation

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

s'appelle une équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre à coefficients constants. La remarque la plus importante à faire pour une telle équation est que la somme de deux solutions est encore une solution, et la multiplication d'une solution par une constante arbitraire, est aussi une solution. Cela veut dire que l'ensemble des solutions de l'équation (1.2) forme un espace vectoriel. Dans le cas d'une équation du deuxième ordre, nous allons montrer que cet espace vectoriel est de dimension deux. Pour des raisons qui vont apparaître immédiatement, il est plus facile de commencer par déterminer l'ensemble des solutions de (1.2) à valeurs complexes. On cherche

donc toutes les fonctions $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ deux fois différentiables telles que, après substitution dans l'équation (1.2), l'équation est identiquement satisfaite. On remarque que ceci implique que $x(t)$ est nécessairement infiniment continûment dérivable, on dit que $x(t)$ est de classe \mathcal{C}^∞ .

On définit

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \{x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ de classe } \mathcal{C}^\infty\}.$$

On a

$$\begin{aligned} x_1, x_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) &\Rightarrow x_1 + x_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \\ x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}), c \in \mathbb{C} &\Rightarrow cx \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est un espace vectoriel sur \mathbb{C} . Pour $x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on définit

$$Dx = \dot{x}(t).$$

L'application

$$D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : x \mapsto Dx,$$

est une application linéaire, puisque

$$\begin{aligned} D(c_1x_1(t) + c_2x_2(t)) &= c_1D(x_1(t)) + c_2D(x_2(t)), \\ \forall x_1(t), x_2(t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

De même $D \circ D = D^2$ est une application linéaire. Définissons

$$P(D) = D^2 + aD + bI, \tag{1.3}$$

où I désigne l'identité. Clairement, $P(D)$ définit donc aussi une application linéaire

$$\begin{aligned} P(D) : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : \\ x(t) &\mapsto P(D)(x(t)) = \ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t). \end{aligned}$$

Résoudre (1.2) revient à déterminer le noyau $\ker P(D)$.

Lemme 1.1.1.

$$P(D) = (D - \lambda_1 I) \circ (D - \lambda_2 I), \tag{1.4}$$

avec λ_1 et λ_2 les racines complexes du polynôme caractéristique

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2). \tag{1.5}$$

Démonstration. Comme λ_1 et λ_2 sont les racines de l'équation caractéristique (1.5), on a

$$a = -(\lambda_1 + \lambda_2) \quad \text{et} \quad b = \lambda_1 \lambda_2.$$

De là, on calcule

$$\begin{aligned} (D - \lambda_1 I) \circ (D - \lambda_2 I)(x(t)) &= (D - \lambda_1 I)(\dot{x}(t) - \lambda_2 x(t)), \\ &= \ddot{x}(t) - (\lambda_1 + \lambda_2)\dot{x}(t) + \lambda_1 \lambda_2 x(t), \\ &= \ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = P(D)(x(t)). \end{aligned}$$

□

Définition 1.1.2. Soit $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on définit l'exponentielle complexe par la formule d'Euler

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lemme 1.1.3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, et $x(t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Si l'on pose $x(t) = y(t)e^{\lambda t}$, alors

$$(D - \lambda I)x(t) = e^{\lambda t} Dy(t), \quad (1.6)$$

$$(D - \lambda I)^2 x(t) = e^{\lambda t} D^2 y(t). \quad (1.7)$$

Démonstration. Cela résulte d'un simple calcul. On a

$$\begin{aligned} (D - \lambda I)x(t) &= (y(t)e^{\lambda t})' - \lambda y(t)e^{\lambda t} \\ &= \dot{y}(t)e^{\lambda t} + \lambda y(t)e^{\lambda t} - \lambda y(t)e^{\lambda t} = e^{\lambda t} Dy(t), \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} (D - \lambda I)^2 x(t) &= (D - \lambda I) \circ (D - \lambda I)x(t) \\ &= (D - \lambda I)(\dot{y}(t)e^{\lambda t}) \\ &= e^{\lambda t} D\dot{y}(t) = e^{\lambda t} D^2 y(t). \end{aligned}$$

□

Le théorème suivant donne la description complète du noyau de $P(D)$ (voir (1.3),(1.4)), et donc de l'espace vectoriel complexe des solutions de (1.2).

Théorème 1.1.4. *Pour tout $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, on a*

$$1) \ker(D - \lambda I) = \{ce^{\lambda t} | c \in \mathbb{C}\}, \quad (1.8)$$

$$2) \ker(D - \lambda I)^2 = \{(c_1 + c_2 t)e^{\lambda t} | c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}, \quad (1.9)$$

3) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors

$$\ker(D - \lambda_1 I) \circ (D - \lambda_2 I) = \{c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} | c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}. \quad (1.10)$$

Démonstration. 1) En vertu de (1.6), en posant $x(t) = y(t)e^{\lambda t}$, on a

$$(D - \lambda I)x(t) = 0 \Leftrightarrow e^{\lambda t} Dy(t) = 0 \Leftrightarrow Dy(t) = 0 \Leftrightarrow y(t) = c,$$

ce qui établit (1.8).

2) De même, en utilisant (1.7), on a

$$(D - \lambda I)^2 x(t) = 0 \Leftrightarrow e^{\lambda t} D^2 y(t) = 0 \Leftrightarrow y(t) = c_1 + c_2 t,$$

ce qui établit (1.9).

3) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et si $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in \ker(D - \lambda_1 I)$ et $x_2 \in \ker(D - \lambda_2 I)$, alors puisque $(D - \lambda_1 I) \circ (D - \lambda_2 I) = (D - \lambda_2 I) \circ (D - \lambda_1 I)$, on a

$$(D - \lambda_1 I) \circ (D - \lambda_2 I)x = (D - \lambda_2 I) \circ (D - \lambda_1 I)x_1 + (D - \lambda_1 I) \circ (D - \lambda_2 I)x_2 = 0,$$

et donc

$$\ker(D - \lambda_1 I) + \ker(D - \lambda_2 I) \subset \ker(D - \lambda_1 I) \circ (D - \lambda_2 I). \quad (1.11)$$

Inversément, en remarquant que

$$I = \frac{D - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{D - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

pour tout $x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on peut écrire

$$x = \frac{(D - \lambda_2 I)x}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{(D - \lambda_1 I)x}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad (1.12)$$

et donc, si $x \in \ker(D - \lambda_1 I) \circ (D - \lambda_2 I)$, en posant

$$x_1 = \frac{(D - \lambda_2 I)x}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{(D - \lambda_1 I)x}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

on a $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \ker(D - \lambda_1 I)$ et $x_2 \in \ker(D - \lambda_2 I)$, c'est-à-dire

$$\ker(D - \lambda_1 I) \circ (D - \lambda_2 I) \subset \ker(D - \lambda_1 I) + \ker(D - \lambda_2 I). \quad (1.13)$$

De plus, en vertu de (1.12), on voit que si $x \in \ker(D - \lambda_1 I) \cap \ker(D - \lambda_2 I)$, alors $x = 0$. Dès lors

$$\ker(D - \lambda_1 I) \cap \ker(D - \lambda_2 I) = \{0\}. \quad (1.14)$$

En combinant (1.11), (1.13) et (1.14), on en déduit que

$$\ker(D - \lambda_1 I) \circ (D - \lambda_2 I) = \ker(D - \lambda_1 I) \oplus \ker(D - \lambda_2 I),$$

ce qui, compte tenu de (1.8), établit (1.10). \square

Théorème 1.1.5. *Les solutions réelles de l'équation (1.2) sont données par*

1) Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \lambda_1 \neq \lambda_2 : x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda : x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.15)$$

2) Si $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$:

$$x(t) = e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t), c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (1.16)$$

Démonstration. On a

$$x(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x(t) = \bar{x}(t).$$

1) Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

$$\begin{aligned} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} &= \bar{c}_1 e^{\lambda_1 t} + \bar{c}_2 e^{\lambda_2 t} \\ &\Leftrightarrow (c_1 - \bar{c}_1) e^{\lambda_1 t} = (\bar{c}_2 - c_2) e^{\lambda_2 t} \Leftrightarrow c_1 = \bar{c}_1, c_2 = \bar{c}_2, \end{aligned}$$

puisque $\ker(D - \lambda_1 I) \cap \ker(D - \lambda_2 I) = \{0\}$ (voir (1.14)), donc $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t} &= (\bar{c}_1 + \bar{c}_2 t) e^{\lambda t} \\ &\Leftrightarrow c_1 + c_2 t = \bar{c}_1 + \bar{c}_2 t, \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow c_1 = \bar{c}_1, c_2 = \bar{c}_2, \end{aligned}$$

et donc $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ceci établit (1.15).

2) Si $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$,

$$\begin{aligned} c_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)t} &= \overline{c_1} e^{(\alpha-i\beta)t} + \overline{c_2} e^{(\alpha+i\beta)t} \\ \Leftrightarrow (c_1 - \overline{c_2}) e^{(\alpha+i\beta)t} &= (\overline{c_1} - c_2) e^{(\alpha-i\beta)t} \Leftrightarrow c_1 = \overline{c_2}, c_2 = \overline{c_1}, \end{aligned}$$

puisque $\ker(D - \lambda_1) \cap \ker(D - \lambda_2) = \{0\}$ (voir (1.14)). Donc

$$c_1 = r + is, \quad c_2 = r - is, \quad r, s \in \mathbb{R},$$

et

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\alpha t} ((r + is)(\cos\beta t + i\sin\beta t) + (r - is)(\cos\beta t - i\sin\beta t)), \\ &= e^{\alpha t} (2r \cos\beta t + (-2s) \sin\beta t), \quad r, s \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ce qui établit (1.16). □

Définition 1.1.6. *Le wronskien $W(x_1, x_2; t)$ de deux solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ de (1.2) est défini par*

$$W(x_1, x_2; t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = x_1(t)\dot{x}_2(t) - x_2(t)\dot{x}_1(t). \quad (1.17)$$

Lemme 1.1.7. *Soient $x_1(t), x_2(t)$ une base de l'espace vectoriel des solutions réelles de (1.2), alors $W(x_1, x_2; t) \neq 0$, $\forall t$.*

Démonstration. Ceci résulte d'un calcul direct en considérant les trois cas possibles du théorème précédent, voir (1.15) et (1.16).

1) Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors

$$W(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}; t) = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}.$$

Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, alors

$$W(e^{\lambda t}, te^{\lambda t}; t) = e^{2\lambda t}.$$

2) Soit $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Dans ce cas

$$W(e^{\alpha t} \cos\beta t, e^{\alpha t} \sin\beta t; t) = \beta e^{2\alpha t}.$$

□

Remarque 1.1.8. *Le résultat est aussi vrai si l'on considère l'espace vectoriel des solutions complexes de (1.2), en remarquant que l'exponentielle complexe ne s'annule jamais.*

Théorème 1.1.9. (*Existence et unicité de la solution du problème de Cauchy*). *Quels que soient $t_0, x_0, v_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution de l'équation (1.2) qui satisfait*

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0.$$

Démonstration. On sait que l'espace vectoriel des solutions est de dimension deux. Soit $x_1(t), x_2(t)$ une base de cet espace, alors toute solution de (1.2) est de la forme

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t).$$

Si l'on impose les conditions initiales $x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = v_0$, on obtient

$$\begin{pmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ \dot{x}_1(t_0) & \dot{x}_2(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Ce système est uniquement résoluble vu que $W(x_1, x_2; t_0) \neq 0$, en vertu du lemme précédent. Ceci établit l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy. \square

Exemple 1. On considère l'équation (1.1) d'un oscillateur amorti (ou pas), sans force externe, c'est-à-dire $f(t) = 0$:

$$\ddot{x}(t) + \frac{\gamma}{m} \dot{x}(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0, \quad k > 0, \gamma \geq 0.$$

Les deux racines de l'équation caractéristique, voir (1.5),

$$\lambda^2 + \frac{\gamma}{m} \lambda + \frac{k}{m} = 0,$$

sont données par

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}.$$

Trois cas sont possibles :

- Mouvements apériodiques (frottement fort) : $\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m}$.
Dans ce cas $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$, la solution générale s'écrit

$$c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

elle est exponentiellement amortie.

- Mouvements critiques : $\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m}$.

La solution générale s'écrit

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\frac{\gamma}{2m}t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Mouvements oscillants (frottement faible) : $\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m}$.

La solution générale s'écrit

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}t}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)), \text{ avec}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

On peut la réécrire sous la forme

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)e^{-\frac{\gamma}{2m}t}, \quad A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \tan \varphi = \frac{c_1}{c_2},$$

le mouvement est du type sinusoidal amorti.

Quand $\gamma = 0$, on retrouve la solution sinusoidale pour l'oscillateur harmonique (non amorti) obtenue par intégration au chapitre précédent :

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (1.18)$$

1.2 La solution générale de l'équation inhomogène

Nous nous attachons maintenant à comprendre l'équation inhomogène

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = f(t), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad (1.19)$$

où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction primitivable.

Théorème 1.2.1. *La solution générale de l'équation inhomogène (1.19) est donnée par*

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t), \quad (1.20)$$

où $x_h(t)$ est la solution générale de l'équation homogène (1.2) et $x_p(t)$ est une solution particulière de l'équation inhomogène (1.19).

Démonstration. Soit $x_p(t)$ une solution particulière de l'équation (1.19). Alors pour toute autre solution $y(t)$ de cette équation, puisque

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) &= f(t), \\ \ddot{x}_p(t) + ax_p'(t) + bx_p(t) &= f(t), \end{aligned}$$

en faisant la différence des deux équations, on obtient,

$$\frac{d^2}{dt^2}(y(t) - x_p(t)) + a \frac{d}{dt}(y(t) - x_p(t)) + b(y(t) - x_p(t)) = 0,$$

et donc

$$y(t) - x_p(t) = x_h(t),$$

avec $x_h(t)$ une solution de l'équation homogène (1.2). \square

Théorème 1.2.2. (*Méthode de la variation des constantes*) Si $x_1(t), x_2(t)$ forment une base de l'espace vectoriel des solutions (réelles ou complexes) de l'équation homogène (1.2), alors une solution particulière de l'équation inhomogène (1.19) est donnée par

$$x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t),$$

avec

$$c_1(t) = - \int \frac{x_2(t)f(t)}{W(t)} dt, \quad c_2(t) = \int \frac{x_1(t)f(t)}{W(t)} dt, \quad (1.21)$$

et $W(t) = W(x_1, x_2; t)$ le wronskien de $x_1(t), x_2(t)$, défini en (1.17).

Démonstration. En posant

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix},$$

l'équation inhomogène du deuxième ordre (1.19) est équivalente à l'équation vectorielle du premier ordre

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= A\vec{x}(t) + \vec{F}(t), \quad \text{avec} \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}, \quad \vec{F}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

En posant

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{pmatrix},$$

puisque $x_1(t), x_2(t)$ sont solutions de l'équation homogène (1.2), on a

$$\dot{Y}(t) = AY(t). \quad (1.23)$$

On cherche une solution particulière $\vec{x}_p(t)$ de (1.22) sous la forme

$$\vec{x}_p(t) = Y(t)\vec{c}(t), \quad \vec{c}(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}.$$

En substituant dans (1.22), on obtient

$$\dot{Y}(t)\vec{c}(t) + Y(t)\dot{\vec{c}}(t) = AY(t)\vec{c}(t) + \vec{F}(t),$$

et donc, en utilisant (1.23),

$$\begin{aligned} AY(t)\vec{c}(t) + Y(t)\dot{\vec{c}}(t) &= AY(t)\vec{c}(t) + \vec{F}(t) \\ \Downarrow \\ Y(t)\dot{\vec{c}}(t) &= \vec{F}(t). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Puisque $x_1(t), x_2(t)$ est une base de solutions de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène (1.2), par définition du Wronskien (1.17), on a

$$\det Y(t) = W(t) \neq 0, \quad \forall t \Rightarrow Y^{-1}(t) = \frac{1}{W(t)} \begin{pmatrix} \dot{x}_2(t) & -x_2(t) \\ -\dot{x}_1(t) & x_1(t) \end{pmatrix}.$$

L'équation (1.24) est donc équivalente à

$$\dot{\vec{c}}(t) = Y^{-1}(t)\vec{F}(t) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x_2(t)f(t)}{W(t)} \\ \frac{x_1(t)f(t)}{W(t)} \end{pmatrix},$$

ce qui établit le résultat. \square

Exemple 2. On considère l'équation de l'oscillateur forcé amorti (1.1)

$$\ddot{x}(t) + \frac{\gamma}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{F}{m}\cos(\omega t). \quad (1.25)$$

La solution de l'équation homogène a été traitée dans l'Exemple 1. Nous nous concentrons ici sur la recherche d'une solution particulière de l'équation inhomogène.

Afin de pouvoir facilement calculer les intégrales données en (1.21) on considère les solutions complexes de l'équation

$$\ddot{z}(t) + \frac{\gamma}{m}\dot{z}(t) + \frac{k}{m}z(t) = \frac{F}{m}e^{i\omega t}. \quad (1.26)$$

On considère le cas général où le polynôme caractéristique associé à l'équation homogène possède deux racines distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2$ réelles ou complexes. Dans ce cas

$$z_1(t) = e^{\lambda_1 t}, z_2(t) = e^{\lambda_2 t}, W(t) = W(z_1, z_2; t) = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}.$$

On calcule facilement à partir de (1.21)

$$\begin{aligned} c_1(t) &= - \int \frac{z_2(t)F e^{i\omega t}}{mW(t)} dt = - \frac{F e^{(i\omega - \lambda_1)t}}{m(\lambda_2 - \lambda_1)(i\omega - \lambda_1)}, \\ c_2(t) &= \int \frac{z_1(t)F e^{i\omega t}}{mW(t)} dt = \frac{F e^{(i\omega - \lambda_2)t}}{m(\lambda_2 - \lambda_1)(i\omega - \lambda_2)}, \end{aligned}$$

et donc, en utilisant que $\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{\gamma}{m}$ et $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{k}{m}$, on obtient

$$\begin{aligned} z_p(t) &= c_1(t)z_1(t) + c_2(t)z_2(t), \\ &= \frac{F e^{i\omega t}}{m(i\omega - \lambda_1)(i\omega - \lambda_2)} \\ &= \frac{F e^{i\omega t} ((k - m\omega^2) - i\gamma\omega)}{(k - m\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}. \end{aligned}$$

En posant

$$x_p(t) = \operatorname{Re}(z_p(t)),$$

puisque $z_p(t)$ vérifie (1.26), en prenant la partie réelle de cette équation, on obtient que

$$x_p(t) = \frac{F(k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \cos(\omega t) + \frac{F\gamma\omega}{(k - m\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \sin(\omega t),$$

est une solution particulière de (1.25). Si l'on cherche à écrire $x_p(t)$ sous la forme d'une amplitude multipliée par un facteur oscillant

$$x_p(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (1.27)$$

on calcule facilement que

$$A^2 = \frac{F^2}{(k - m\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}, \quad \tan\varphi = \frac{\gamma\omega}{m\omega^2 - k}. \quad (1.28)$$

La formule finale reste valide quand les deux racines de l'équation caractéristique sont égales, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (au vu des simplifications), et tant que $\gamma \neq 0$.

Quand

$$\gamma = 0 \quad \text{et} \quad \omega^2 = \frac{k}{m},$$

l'amplitude de l'oscillation en (1.28) devient infinie et la formule donnée en (1.27) n'est plus valide. C'est le phénomène de résonance quand la fréquence naturelle de l'oscillateur

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m},$$

coïncide avec la fréquence de la force d'excitation périodique externe.

Pour mieux appréhender le phénomène de la résonance, tentons de comprendre l'amplitude $A(\omega)$ de l'oscillation en fonction de la fréquence d'excitation externe. On calcule facilement

$$A(\omega) = \frac{F}{\sqrt{\Delta(\omega)}}, \quad \text{avec}$$

$$\Delta(\omega) = m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2.$$

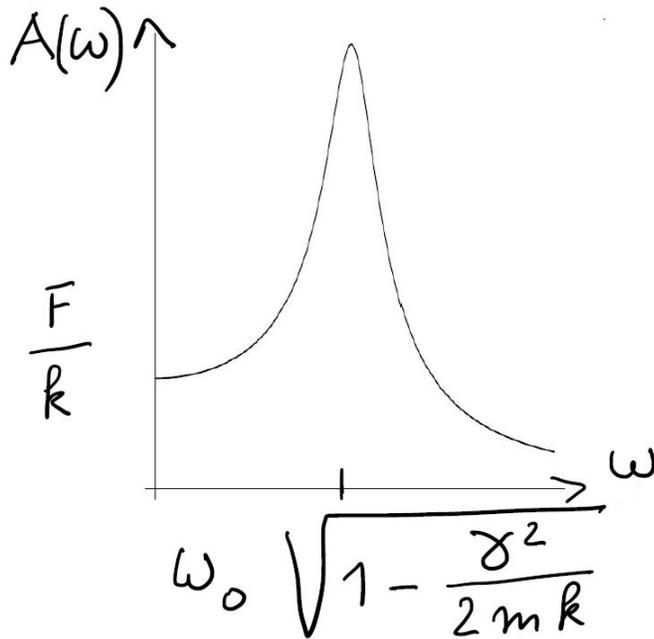
Comme

$$\frac{d}{d\omega}\Delta(\omega) = 2\omega(\gamma^2 + 2m^2(\omega^2 - \omega_0^2)),$$

si $\gamma^2 < 2mk$ (frottement suffisamment faible), puisque $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, on a

$$\frac{d}{d\omega}\Delta(\omega) = 0 \Leftrightarrow \omega = 0 \text{ ou } \omega = \pm\omega_0 \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2mk}}.$$

On vérifie facilement que $\Delta(\omega)$ a un maximum en $\omega = 0$ et un minimum en $\omega = \pm\omega_0 \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2mk}}$, donc $A(\omega)$ possède un minimum en $\omega = 0$ et un maximum en $\omega = \pm\omega_0 \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2mk}}$. Sur la Figure 1 ci-dessous, on représente le graphe de $A(\omega)$ en fonction de ω , pour $\omega \geq 0$.

Figure 1. Graphe de $A(\omega)$

Quand $\omega \rightarrow 0$, $A(\omega) \rightarrow F/k$, comme on pouvait s'y attendre, car $x_p(t) = F/k$ est une solution particulière quand $\omega = 0$. Quand $\omega \rightarrow \infty$, $A \rightarrow 0$. Intuitivement, l'oscillateur est excité tellement rapidement qu'il n'a pas le temps de réagir. Quand le frottement γ est faible, le maximum de l'amplitude est observé pour une valeur de ω proche de la fréquence naturelle ω_0 . Ce phénomène s'appelle la résonance.

Pour terminer, nous cherchons une solution du cas correspondant exactement à la résonance

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F}{m} \cos(\omega t), \quad \omega = \omega_0. \quad (1.29)$$

A nouveau il est plus facile de traiter le cas complexe

$$\ddot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = \frac{F}{m} e^{i\omega_0 t}.$$

On prend pour base de solutions complexes de l'équation homogène

$$\begin{aligned} \ddot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) &= 0, \\ z_1(t) &= e^{i\omega_0 t}, \quad z_2(t) = e^{-i\omega_0 t}. \end{aligned}$$

Le wronskien est donné par $W = -2i\omega_0$. On calcule facilement à partir de (1.21)

$$\begin{aligned} c_1(t) &= - \int \frac{z_2(t) F e^{i\omega_0 t}}{mW} dt = \frac{Ft}{2im\omega_0}, \\ c_2(t) &= \int \frac{z_1(t) F e^{i\omega_0 t}}{mW} dt = \frac{F e^{2i\omega_0 t}}{4m\omega_0^2}, \end{aligned}$$

et donc

$$z_p(t) = c_1(t)z_1(t) + c_2(t)z_2(t) = \frac{Ft}{2im\omega_0} e^{i\omega_0 t} + \frac{F}{4m\omega_0^2} e^{i\omega_0 t}.$$

Puisque le second terme est solution de l'équation homogène, on peut prendre comme solution particulière de l'équation inhomogène

$$\tilde{z}_p(t) = \frac{Ft}{2im\omega_0} e^{i\omega_0 t}.$$

Donc

$$x_p(t) = \operatorname{Re}(\tilde{z}_p(t)) = \frac{F}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t),$$

est une solution particulière de l'équation inhomogène (1.29).

La solution générale (1.20) s'obtient donc comme solution générale de l'équation homogène (1.18) additionnée à la solution particulière

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t).$$

On voit que donc que l'amplitude de l'oscillation augmente indéfiniment.

1.3 Exercices

1. Trouver dans chaque cas l'unique solution $x(t)$ des équations différentielles linéaires homogènes suivantes avec les conditions initiales données :

$$\ddot{x} + x = 0, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$\ddot{x} + 9x = 0, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = -1.$$

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0, \quad x(0) = 2, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

2. Une particule obéit la loi du mouvement

$$\ddot{x} + 10\dot{x} + 16x = 0,$$

avec les conditions initiales $x(0) = 1$ et $\dot{x}(0) = 4$. Le mouvement est-il oscillatoire? Quelle est la valeur maximale de x ?

3. Trouver la solution des problèmes de Cauchy suivants :

$$\ddot{x} + x = 3 \cos(\omega t), \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1.$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x = \sin t, \quad x(2) = 0, \quad \dot{x}(2) = 1.$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{-t}, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = -1.$$

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 10 \cos(\omega t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

4. On considère un oscillateur harmonique

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m},$$

soumis à l'action d'une force extérieure donnée par

$$\begin{cases} F(t) = 0, & t < 0, \\ F(t) = \frac{F_0 t}{T}, & 0 \leq t \leq T, \\ F(t) = F_0, & t > T. \end{cases}$$

- Calculer la solution générale de l'équation pour $t < 0, 0 \leq t \leq T, t > T$.
- Déterminer la solution $x(t), t \in \mathbb{R}$, telle que $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$.
- Déterminer l'amplitude A finale des oscillations correspondant à ces conditions initiales, c'est-à-dire écrire la solution trouvée en b) sous la forme

$$x(t) = A \sin(\omega(t - T) - \varphi) + B, \quad \text{pour } t \geq T.$$

5. Même problème que l'exercice 4, avec la force extérieure donnée par

$$\begin{cases} F(t) = 0, & t < 0, \\ F(t) = F_0 \sin(\omega t), & 0 \leq t \leq T = \frac{2\pi}{\omega}, \\ F(t) = 0, & t > T. \end{cases}$$

Chapitre 2

Chaîne d'oscillateurs

2.1 Deux oscillateurs couplés

Deux masses identiques de masse m sont attachées par un ressort de constante de raideur k à un support rigide et connectées entre elles par un autre ressort de constante de raideur s , comme sur la Figure 1 ci-dessous.

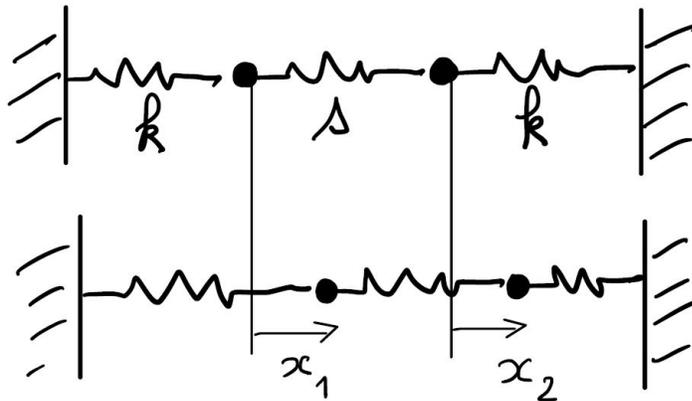


Figure 1.

La partie supérieure de la Figure 1 représente le système à l'équilibre, avec l_0 la longueur naturelle des ressorts. Les longueurs naturelles pourraient être différentes (cela n'a aucune influence), par contre il est important, comme nous allons le voir, que les masses soient identiques. Les déplacements des masses par rapport à leur position d'équilibre sont notées x_1 et x_2 comme sur

la partie inférieure de la Figure 1. En supposant que les ressorts obéissent à la loi de Hooke, on obtient facilement le système suivant d'équations linéaires et couplées décrivant le mouvement des deux masses :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1(t) &= -kx_1(t) + s(x_2(t) - x_1(t)), \\ m\ddot{x}_2(t) &= -s(x_2(t) - x_1(t)) - kx_2(t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

En posant

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} k+s & -s \\ -s & k+s \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

le système (2.1) s'écrit

$$m\ddot{\vec{x}}(t) + A\vec{x}(t) = 0. \quad (2.3)$$

Il est important de remarquer que A est une matrice symétrique, ce qui va nous permettre d'utiliser le théorème spectral. On cherche des solutions sous la forme

$$\vec{x}(t) = e^{\pm i\omega t} \vec{f},$$

avec $\vec{f} \in \mathbb{R}^2$ un vecteur indépendant du temps t . En substituant dans (2.3), on obtient

$$-m\omega^2 e^{\pm i\omega t} \vec{f} + e^{\pm i\omega t} A\vec{f} = 0,$$

ce qui après simplification donne

$$A\vec{f} = m\omega^2 \vec{f}.$$

On est donc amené à calculer les vecteurs propres et les valeurs propres de A en (2.2). Le polynôme caractéristique de A est donné par

$$\det(A - \lambda I) = (k + s - \lambda)^2 - s^2 = \lambda^2 - 2(k + s)\lambda + k^2 + 2ks.$$

Les deux racines (nécessairement réelles) sont positives et données par

$$\lambda_1 = k, \quad \lambda_2 = k + 2s.$$

On calcule facilement les vecteurs propres correspondants

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

satisfaisant respectivement

$$A\vec{f}_1 = \lambda_1 \vec{f}_1 \quad \text{et} \quad A\vec{f}_2 = \lambda_2 \vec{f}_2.$$

On a donc trouvé quatre solutions à valeurs complexes de (2.3)

$$e^{\pm i\omega_1 t} \vec{f}_1, \quad e^{\pm i\omega_2 t} \vec{f}_2,$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{\lambda_2}{m}} = \sqrt{\frac{k+2s}{m}}. \quad (2.5)$$

Puisque l'équation est linéaire, en prenant des combinaisons linéaires à coefficients complexes de ces solutions, on obtient encore des solutions. Tout comme dans le cas de l'oscillateur harmonique, on voit facilement que parmi ces combinaisons linéaires, les solutions à valeurs réelles sont données par

$$\vec{x}(t) = (a_1 \cos(\omega_1 t) + b_1 \sin(\omega_1 t)) \vec{f}_1 + (a_2 \cos(\omega_2 t) + b_2 \sin(\omega_2 t)) \vec{f}_2,$$

$$a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}, \text{ des constantes arbitraires.} \quad (2.6)$$

En fait, on a trouvé toutes les solutions, comme expliqué dans la proposition suivante.

Proposition 2.1.1. *Toutes les solutions à valeurs réelles de (2.3) sont données par (2.6).*

Démonstration. Puisque les vecteurs propres \vec{f}_1, \vec{f}_2 correspondant aux valeurs propres λ_1, λ_2 de A , données en (2.5), forment une base de \mathbb{R}^2 , on peut toujours chercher la solution sous la forme

$$\vec{x}(t) = y_1(t) \vec{f}_1 + y_2(t) \vec{f}_2.$$

En substituant dans (2.3), on trouve

$$(m\ddot{y}_1(t) + \lambda_1 y_1(t)) \vec{f}_1 + (m\ddot{y}_2(t) + \lambda_2 y_2(t)) \vec{f}_2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{y}_1(t) + \omega_1^2 y_1(t) = 0, \quad \ddot{y}_2(t) + \omega_2^2 y_2(t) = 0.$$

En vertu du Théorème 1.1.5, équation (1.16), la solution réelle générale de ces équations est donnée par

$$y_1(t) = a_1 \cos(\omega_1 t) + b_1 \sin(\omega_1 t),$$

$$y_2(t) = a_2 \cos(\omega_2 t) + b_2 \sin(\omega_2 t),$$

avec $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$, des constantes arbitraires, ce qui établit la proposition. \square

Théorème 2.1.2. *Il existe une unique solution du problème de Cauchy*

$$m\ddot{\vec{x}}(t) + A\vec{x}(t) = 0, \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0, \quad \dot{\vec{x}}(0) = \vec{v}_0,$$

donnée par (2.6) avec

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}(\vec{x}_0 | \vec{f}_1), & a_2 &= \frac{1}{2}(\vec{x}_0 | \vec{f}_2), \\ b_1 &= \frac{1}{2\omega_1}(\vec{v}_0 | \vec{f}_1), & b_2 &= \frac{1}{2\omega_2}(\vec{v}_0 | \vec{f}_2). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Démonstration. Cela résulte immédiatement de la proposition précédente et de l'orthogonalité des vecteurs propres (2.4), $(\vec{f}_1 | \vec{f}_2) = 0$, et du fait que $\|\vec{f}_1\|^2 = \|\vec{f}_2\|^2 = 2$. En effet, à partir de l'équation (2.6), on obtient

$$\begin{aligned} \vec{x}_0 &= a_1\vec{f}_1 + a_2\vec{f}_2, \\ \vec{v}_0 &= b_1\omega_1\vec{f}_1 + b_2\omega_2\vec{f}_2. \end{aligned}$$

En prenant le produit scalaire de ces deux équations avec \vec{f}_1 et \vec{f}_2 , on obtient le résultat annoncé en (2.7). \square

Quelques cas particuliers très intéressants

- $\vec{x}_0 = x_0\vec{f}_1, \vec{v}_0 = v_0\vec{f}_1$. Dans ce cas la solution est donnée par

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \left(x_0 \cos(\omega_1 t) + \frac{v_0}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right) \vec{f}_1 \\ &\quad \Updownarrow \\ \begin{cases} x_1(t) = x_0 \cos(\omega_1 t) + \frac{v_0}{\omega_1} \sin(\omega_1 t), \\ x_2(t) = x_0 \cos(\omega_1 t) + \frac{v_0}{\omega_1} \sin(\omega_1 t). \end{cases} \end{aligned}$$

Les graphes de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont représentés sur la Figure 2 ci-dessous, où l'on a pris $x_0 = 1, v_0 = 0$.

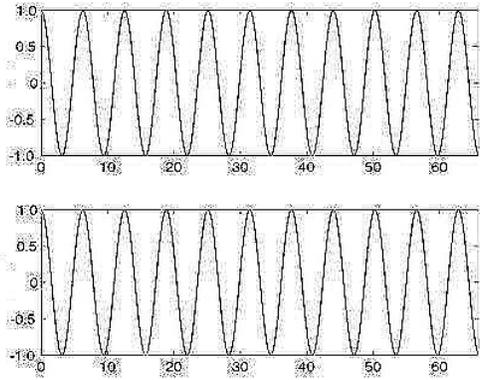


Figure 2.

Les deux masses ont à l'instant $t = 0$ la même élongation et la même vitesse. Elles oscillent en phase $x_1(t) = x_2(t)$ avec une période $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$. Cette solution s'appelle le mode normal symétrique.

- $\vec{x}_0 = x_0 \vec{f}_2, \vec{v}_0 = v_0 \vec{f}_2$. Dans ce cas la solution est donnée par

$$\vec{x}(t) = \left(x_0 \cos(\omega_2 t) + \frac{v_0}{\omega_2} \sin(\omega_2 t) \right) \vec{f}_2$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x_1(t) = x_0 \cos(\omega_2 t) + \frac{v_0}{\omega_2} \sin(\omega_2 t), \\ x_2(t) = -x_0 \cos(\omega_2 t) - \frac{v_0}{\omega_2} \sin(\omega_2 t). \end{cases}$$

Les graphes de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont représentés sur la Figure 3 ci-dessous

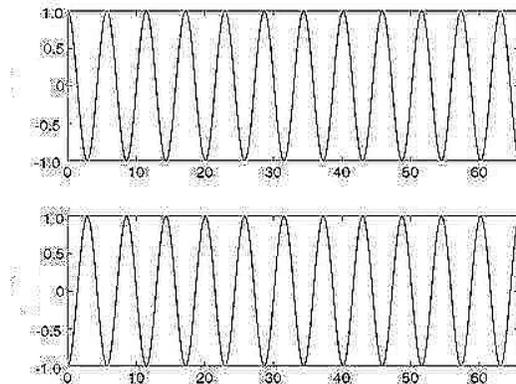


Figure 3.

où l'on a choisi $x_0 = 1, v_0 = 0$. Les deux masses à l'instant $t = 0$ ont des élongations et des vitesses opposées. Elles oscillent en opposition de phase $x_2(t) = -x_1(t)$ avec une période $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$, plus petite que T_1 , puisque $\omega_2 > \omega_1$. Cette solution s'appelle le mode normal antisymétrique.

- $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_0 = 0, s \ll k$. Dans ce cas

$$\vec{x}(t) = \frac{x_0}{2} (\cos(\omega_1 t) \vec{f}_1 + \cos(\omega_2 t) \vec{f}_2)$$

\Updownarrow

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{x_0}{2} (\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)), \\ x_2(t) = \frac{x_0}{2} (\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)). \end{cases}$$

En utilisant les formules de Simpson, on peut écrire la solution comme suit

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_0 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right), \\ x_2(t) &= x_0 \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right). \end{aligned}$$

Puisque l'on suppose $s \ll k$, en utilisant le développement de Taylor $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \dots$ au voisinage de $x = 0$, et la formule (2.5) pour les fréquences, on a

$$\begin{aligned} \Delta\omega \equiv \omega_2 - \omega_1 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \left(\sqrt{1 + \frac{2s}{k}} - 1 \right) \approx \sqrt{\frac{k}{m}} \left(1 + \frac{s}{k} - 1 \right) \\ &\approx \omega_1 \frac{s}{k} \ll \omega_1, \end{aligned}$$

et $\omega_1 + \omega_2 \approx 2\omega_1$.

On a le phénomène de battement comme sur la Figure 4 ci-dessous (on a choisi $x_0 = 1$). Les deux masses oscillent à la fréquence moyenne $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, mais échangent leur énergie à la fréquence $\frac{\Delta\omega}{2}$, qui est beaucoup plus petite. L'enveloppe des graphes de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ est représentée par les graphes des fonctions $\pm \cos \frac{\Delta\omega t}{2}$ et $\pm \sin \frac{\Delta\omega t}{2}$, dont la fréquence est petite par rapport à la fréquence d'oscillation des deux masses.

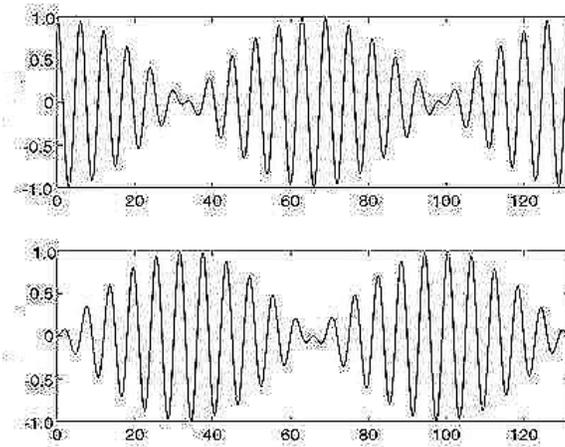


Figure 4.

2.2 La chaîne d'oscillateurs couplés et les modes normaux de vibration

Nous allons généraliser ce que nous avons fait pour deux oscillateurs à une chaîne d'oscillateurs. On considère N masses identiques de masse m . La première et la dernière sont attachées par un ressort de constante de raideur k à un support rigide et les masses sont connectées entre elles par des ressorts de même constante de raideur k , comme sur la Figure 5 ci-dessous.

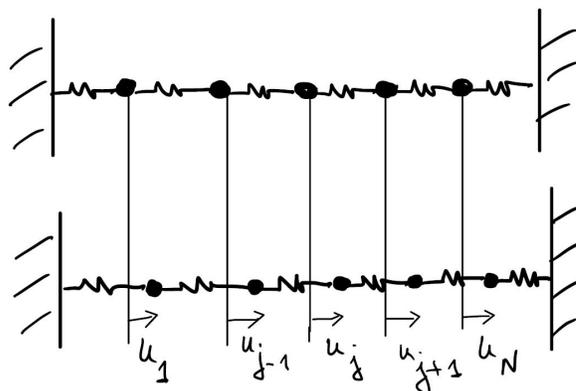


Figure 5.

La partie supérieure de la Figure 5 représente le système à l'équilibre, avec d la longueur naturelle des ressorts. Les déplacements des masses par rapport à leur position d'équilibre sont notés $u_j, j = 1, \dots, N$, comme sur la partie inférieure de la Figure 5. En supposant que les ressorts obéissent à la loi de Hooke, on obtient le système suivant d'équations linéaires et couplées décrivant le mouvement des masses :

$$m\ddot{u}_j(t) = k(u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)), \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.8)$$

où l'on a posé

$$u_0(t) = u_{N+1}(t) = 0, \quad \forall t. \quad (2.9)$$

On définit la matrice $N \times N$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

et le vecteur colonne

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}.$$

Alors (2.8) avec les conditions aux limites (2.9) peut s'écrire

$$\ddot{\vec{u}}(t) + \omega_0^2 A \vec{u}(t) = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (2.11)$$

On cherche des solutions sous la forme

$$\vec{u}(t) = e^{\pm i\omega t} \vec{f},$$

avec \vec{f} un vecteur colonne $N \times 1$ indépendant du temps. En substituant dans (2.11), on trouve

$$A \vec{f} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \vec{f}, \quad (2.12)$$

et le problème revient donc à déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A définie en (2.10). Comme la matrice A est symétrique, on sait par le théorème spectral que les valeurs propres sont réelles et qu'il existe une base de vecteurs propres orthogonaux entre eux. Chacune de ces valeurs propres donnera lieu à un mode normal de vibration comme dans le cas de deux oscillateurs couplés. Ce qui est surprenant dans le problème est que les valeurs propres et les vecteurs propres de A peuvent être obtenus explicitement. C'est l'objet des deux propositions suivantes.

Proposition 2.2.1. *Les valeurs propres de A sont données par*

$$\lambda_n = 2(1 - \cos \theta_n) = 4 \sin^2 \frac{\theta_n}{2}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (2.13)$$

avec

$$\theta_n = \frac{n\pi}{N+1}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (2.14)$$

Démonstration. On cherche les zéros du polynôme caractéristique de la matrice A

$$D_N(\lambda) = D_N = \det(A - \lambda I).$$

En développant le déterminant D_N par rapport à la dernière colonne, on voit qu'il est la somme de deux termes, chacun étant le déterminant d'une matrice $(N-1) \times (N-1)$. Un de ces déterminants est $(2-\lambda)D_{N-1}$ et l'autre est $-D_{N-2}$ comme on le voit en le développant à nouveau, cette fois-ci par rapport à la dernière ligne. De cette façon, on obtient

$$D_N = (2-\lambda)D_{N-1} - D_{N-2}, \quad N = 2, 3, \dots, \quad (2.15)$$

avec

$$D_0 = 1 \quad \text{et} \quad D_1 = 2 - \lambda. \quad (2.16)$$

Comme expliqué dans l'Appendice de ce chapitre, on résout cette équation aux différences en considérant son polynôme caractéristique

$$\mu^2 - (2-\lambda)\mu + 1 = 0.$$

Les deux racines sont données par

$$\mu_{1,2} = 1 - \frac{\lambda}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(2-\lambda)^2 - 4},$$

et la solution générale de (2.15) est

$$c_1\mu_1^N + c_2\mu_2^N,$$

avec c_1, c_2 des constantes complexes arbitraires. On cherche d'abord une solution quand le discriminant $(2 - \lambda)^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow 0 < \lambda < 4$. On pose alors

$$2 - \lambda = 2\cos\theta.$$

Dans ce cas, on a

$$\mu_{1,2} = \cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta},$$

et donc

$$D_N = c_1e^{iN\theta} + c_2e^{-iN\theta}.$$

En imposant les conditions initiales (2.16) on obtient

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1, \\ c_1e^{i\theta} + c_2e^{-i\theta} &= 2 - \lambda = 2\cos\theta, \end{aligned}$$

dont la solution en c_1, c_2 est

$$c_1 = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} \quad c_2 = -\frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}.$$

Donc,

$$D_N = \frac{1}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} \left(e^{i(N+1)\theta} - e^{-i(N+1)\theta} \right) = \frac{\sin((N+1)\theta)}{\sin\theta},$$

et

$$D_N = 0 \Leftrightarrow \sin((N+1)\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \theta_n := \frac{n\pi}{N+1}, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

On a donc montré que

$$\lambda_n = 2 - 2\cos\theta_n = 4\sin^2(\theta_n/2), \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

sont N valeurs propres distinctes de A . On a donc trouvé ainsi toutes les valeurs propres de A et il n'y a pas d'autres cas à considérer. \square

Sur la Figure 6 ci-dessous, les valeurs propres λ_n sont représentées pour $N = 50$ masses.

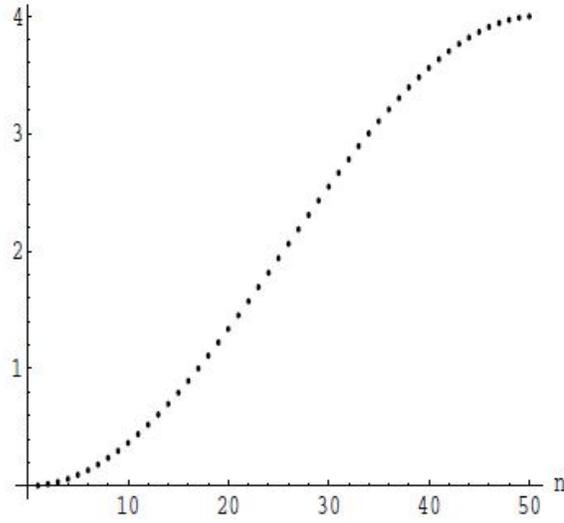


Figure 6.

La proposition suivante donne les vecteurs propres de A .

Proposition 2.2.2. *Les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres λ_n sont donnés par*

$$\vec{f}_n = \begin{pmatrix} \sin(\theta_n) \\ \sin(2\theta_n) \\ \vdots \\ \sin(N\theta_n) \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (2.17)$$

De plus

$$(\vec{f}_n | \vec{f}_m) = 0, \quad n \neq m \quad \text{et} \quad \|\vec{f}_n\|^2 = \frac{N+1}{2}. \quad (2.18)$$

Démonstration. Notons

$$\vec{f}_n = \begin{pmatrix} f_{n,1} \\ f_{n,2} \\ \vdots \\ f_{n,N} \end{pmatrix}$$

un vecteur propre de A de valeur propre λ_n . L'équation

$$A\vec{f}_n = \lambda_n\vec{f}_n,$$

s'écrit explicitement

$$-f_{n,j-1} + 2f_{n,j} - f_{n,j+1} = 2(1 - \cos\theta_n)f_{n,j},$$

avec

$$f_{n,0} = f_{n,N+1} = 0,$$

Ceci est une équation aux différences finies dont l'équation caractéristique est donnée par

$$\mu^2 - (2 \cos\theta_n)\mu + 1 = 0,$$

avec pour racines

$$\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_n}.$$

La solution générale est donc de la forme

$$c_1 e^{ij\theta_n} + c_2 e^{-ij\theta_n}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Les solutions réelles sont de la forme

$$f_{n,j} = c_1 \sin(j\theta_n) + c_2 \cos(j\theta_n), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

La condition $f_{n,0} = 0$ force $c_2 = 0$, la condition $f_{n,N+1} = 0$ est alors automatiquement satisfaite, puisque $(N+1)\theta_n = n\pi$, et l'on normalise la solution par $c_1 = 1$. On sait par le théorème spectral que

$$(\vec{f}_n | \vec{f}_m) = 0, \quad n \neq m.$$

Il reste à évaluer $\|\vec{f}_n\|$. On a, en utilisant la définition de l'exponentielle complexe (formule d'Euler),

$$\begin{aligned} \|\vec{f}_n\|^2 &= \sum_{j=1}^N \left(\frac{e^{ij\theta_n} - e^{-ij\theta_n}}{2i} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^N \left(e^{2ij\theta_n} + e^{-2ij\theta_n} - 2 \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left(\sum_{j=0}^N e^{2ij\theta_n} + \sum_{j=0}^N e^{-2ij\theta_n} \right) + \frac{N+1}{2}. \end{aligned}$$

Pour établir (2.18), il suffit donc d'établir que le premier terme de la somme ci-dessus est nul. En utilisant $\sum_{j=0}^N x^j = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$, $x \neq 1$, avec $x = e^{\pm 2i\theta_n}$, on obtient

$$\sum_{j=0}^N e^{2ij\theta_n} + \sum_{j=0}^N e^{-2ij\theta_n} = \frac{1 - e^{2i(N+1)\theta_n}}{1 - e^{2i\theta_n}} + \frac{1 - e^{-2i(N+1)\theta_n}}{1 - e^{-2i\theta_n}}.$$

En utilisant la formule de Euler et la formule de Simpson, en développant le numérateur, on obtient

$$\begin{aligned} 2 - 2\cos(2(N+1)\theta_n) + 2\cos(2N\theta_n) - 2\cos 2\theta_n = \\ 2 - 2\cos(2(N+1)\theta_n) + 4\sin((N+1)\theta_n)\sin((N-1)\theta_n) = 0, \end{aligned}$$

puisque $\theta_n = \frac{n\pi}{N+1}$. □

Le théorème final énonce que nous avons trouvé toutes les solutions du problème posé.

Théorème 2.2.3. *Il existe une unique solution du problème de Cauchy*

$$\ddot{\vec{u}}(t) + \omega_0^2 A\vec{u}(t) = 0, \quad \vec{u}(0) = \vec{u}_0, \quad \dot{\vec{u}}(0) = \vec{v}_0, \quad (2.19)$$

donnée par

$$\vec{u}(t) = \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \right) \vec{f}_n, \quad (2.20)$$

avec

$$\omega_n = 2\omega_0 \sin \frac{n\pi}{2(N+1)}, \quad (2.21)$$

et

$$a_n = \frac{2}{N+1} (\vec{u}_0 | \vec{f}_n), \quad b_n = \frac{2}{(N+1)\omega_n} (\vec{v}_0 | \vec{f}_n), \quad (2.22)$$

où \vec{f}_n est défini en (2.17).

Démonstration. On montre comme dans la Proposition 2.1.1, en cherchant la solution générale à valeurs réelles de (2.11) sous la forme

$$\vec{u}(t) = \sum_{n=1}^N y_n(t) \vec{f}_n,$$

qu'elle est donnée par (2.20), avec $\omega_n^2 = \omega_0^2 \lambda_n$ (voir (2.12)) et a_n, b_n des constantes arbitraires. En utilisant (2.13) et (2.14), on obtient (2.21). En imposant les conditions initiales, on obtient

$$\begin{aligned}\vec{u}_0 &= \sum_{n=1}^N a_n \vec{f}_n, \\ \vec{v}_0 &= \sum_{n=1}^N b_n \omega_n \vec{f}_n.\end{aligned}$$

En prenant le produit scalaire avec \vec{f}_n de ces deux équations, et en utilisant (2.18), on obtient le résultat annoncé en (2.22). L'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy (2.19) est donc établie. \square

Comme le montre la formule (2.20), la solution générale est une superposition de solutions périodiques de fréquences de plus en plus grandes. La solution obtenue en fixant les conditions initiales de la façon suivante

$$\vec{u}_0 = u_0 \vec{f}_n, \quad \vec{v}_0 = v_0 \vec{f}_n,$$

avec $1 \leq n \leq N$, est donnée par

$$\vec{u}(t) = \left(u_0 \cos(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right) \vec{f}_n. \quad (2.23)$$

La solution périodique (2.23) s'appelle le n-ième mode normal de vibration. En composantes, en utilisant (2.14) et (2.17), cette solution s'écrit

$$u_j(t) = \left(u_0 \cos(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{N+1}j\right), \quad 1 \leq j \leq N. \quad (2.24)$$

Sur les Figures 7 et 8 ci-dessous, on représente le graphe discret des oscillations $u_j(t)$, $1 \leq j \leq N$, pour une valeur fixée de t en fonction de j . Sur la Figure 7, les deux premiers modes normaux ($n = 1$ et $n = 2$) sont représentés, pour le cas des oscillations $u_j(t)$ de $N = 25$ masses, à différents instants t . Chaque colonne donne le même mode normal, mais à des instants t différents. De même, sur la Figure 8, on représente les modes normaux correspondant à $n = 5$ et $n = 10$ à différents instants t , de $N = 100$ masses.

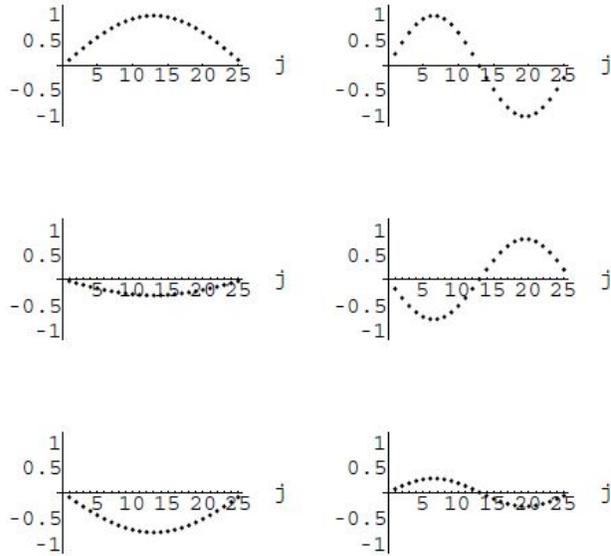


Figure 7.

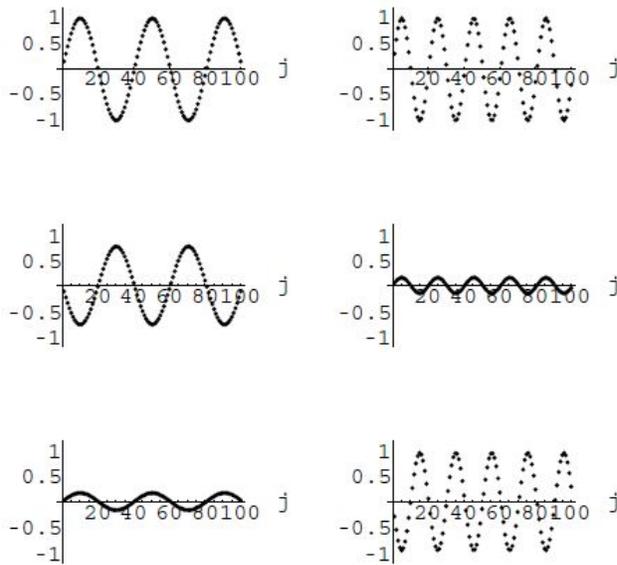


Figure 8.

2.3 Appendice : Equations aux différences

Soit une équation aux différences

$$ay_{n+2} + by_{n+1} + cy_n = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0. \quad (2.25)$$

On cherche des solutions sous la forme

$$y_n = \mu^n, \quad \mu \neq 0.$$

Par substitution, on trouve

$$\mu^n(a\mu^2 + b\mu + c) = 0.$$

En supposant que les deux racines μ_1 et μ_2 de l'équation caractéristique

$$a\mu^2 + b\mu + c = 0,$$

sont distinctes, on démontre comme pour les équations différentielles linéaires à coefficients constants que la solution générale de (2.25) est donnée par

$$y_n = c_1\mu_1^n + c_2\mu_2^n,$$

avec c_1, c_2 deux constantes complexes arbitraires.

Exemple. La suite de nombres

$$0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad 34 \quad 55 \quad 89 \quad 144 \quad 233 \quad \dots,$$

où chaque nombre est obtenu comme la somme des deux précédents en commençant avec 0 1, s'appelle la suite des nombres de Fibonacci. Cette suite est donc définie par la récurrence

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

avec

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1.$$

L'équation caractéristique donne

$$\mu^2 - \mu - 1 = 0 \Leftrightarrow \mu_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \mu_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

En posant

$$F_n = c_1 \mu_1^n + c_2 \mu_2^n,$$

on trouve pour $n = 0$ et $n = 1$

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 + c_2, \\ 1 &= c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2, \end{aligned}$$

dont la solution est

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

et donc

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

La limite

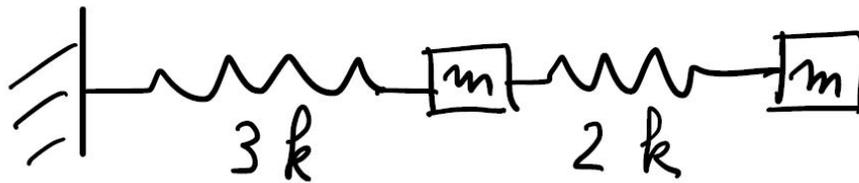
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

s'appelle le nombre d'or.

La suite doit son nom à *Leonardo Fibonacci* qui, dans un problème récréatif posé dans l'ouvrage *Liber abaci* publié en 1202, décrit la croissance d'une population de lapins. Quelqu'un a déposé un couple de lapins dans un certain lieu, clos de toutes parts. Il est dans leur nature de générer un autre couple en un seul mois, et qu'ils enfantent dans le second mois après leur naissance. Le problème de Fibonacci est à l'origine de la suite dont le n ième terme correspond au nombre de paires de lapins au n ième mois. Au début du premier mois, il y a juste une paire de lapereaux, les lapins ne peuvent procréer qu'après deux mois d'existence, chaque début de mois, toute paire susceptible de procréer engendre exactement une nouvelle paire de lapereaux, les lapins ne meurent jamais (donc la suite de Fibonacci est croissante). Notons F_n le nombre de couples de lapins au début du mois n . Jusqu'à la fin du deuxième mois, la population se limite à un couple (ce qu'on note $F_1 = F_2 = 1$). Dès le début du troisième mois, le couple de lapins a deux mois et il engendre un autre couple de lapins, on note alors $F_3 = 2$. Plaçons-nous maintenant au mois n et cherchons à exprimer ce qu'il en sera deux mois plus tard, soit au mois $n + 2$. F_{n+2} désigne la somme des couples de lapins au mois $n + 1$ et des couples nouvellement engendrés. Or, n'engendent au mois $n + 2$ que les couples pubères, c'est-à-dire ceux qui existent deux mois auparavant. On a donc $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \geq 0$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.

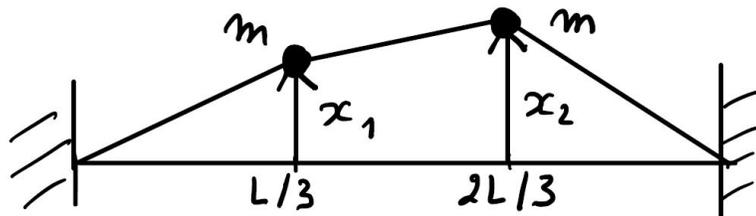
2.4 Exercices

1. Deux masses égales se meuvent en ligne droite sur une table horizontale sans frottement. La première masse est attachée à un point immobile par un ressort de constante $3k$, tandis que la seconde masse est attachée à la première par un ressort de constante $2k$.



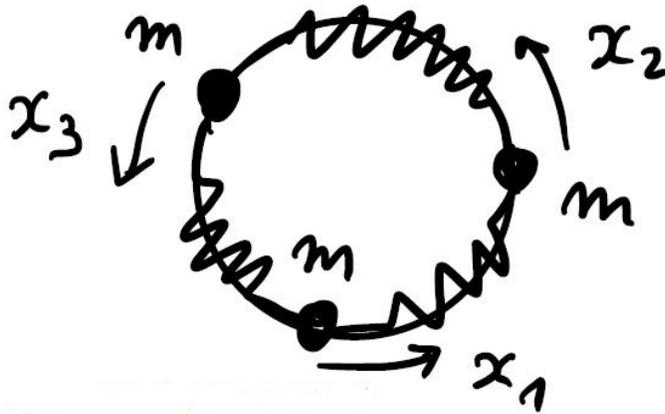
- Ecrire les équations du mouvement.
- Calculer les fréquences propres et les modes normaux de vibration.

2. Une corde de longueur L et de tension T est de masse négligeable. Elle porte deux masses égales au premier et au second tiers. On considère de petites oscillations transversales des masses, seule la force de tension est prise en compte et on néglige la gravité.



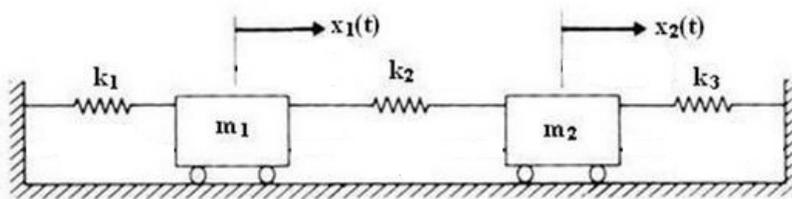
- Ecrire les équations du mouvement.
- Calculer les fréquences propres et les modes normaux de vibration.
- Ecrire les équations du mouvement forcé quand chaque masse est soumise à la force transversale $F \cos(\omega t)$, et déterminer la solution générale des équations du mouvement. Indication : revoir la méthode de variation des constantes au chapitre 1.

3. On considère le mouvement de trois masses identiques sur un cercle reliées deux à deux par des ressorts de constante de raideur k .



- Ecrire les équations du mouvement.
- Déterminer toutes les solutions.
- Déterminer les conditions initiales du mouvement qui conduisent à des mouvements périodiques du système. Interpréter physiquement le résultat.

4. On considère deux masses m_1 et m_2 liées par 3 ressorts et pouvant se déplacer horizontalement sans frottement. On appelle $x_1(t)$ et $x_2(t)$ les positions respectives des masses m_1 et m_2 par rapport à l'équilibre, comme indiqué sur la figure ci-dessous. On note $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.



- Déterminer la matrice A , 2×2 , telle que les équations du mouvement peuvent s'écrire

$$\ddot{\vec{x}} + A\vec{x} = 0. \quad (2.26)$$

- La matrice A est-elle symétrique? En recherchant les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A , montrer que A est diagonalisable. Déterminer le signe des valeurs propres λ_1 et λ_2 .

c) En déduire qu'il existe deux solutions de (2.26) de la forme

$$\vec{x}_k(t) = e^{i\omega_k t} \vec{f}_k, \quad k = 1, 2,$$

telles que $A\vec{f}_k = \omega_k^2 \vec{f}_k$. Les vecteurs propres \vec{f}_1, \vec{f}_2 de A sont-ils orthogonaux en général ?

d) Montrer que si les deux masses ont des vitesses initiales nulles au temps $t = 0$, les solutions de (2.26) sont de la forme

$$\vec{x}(t) = a_1 \cos \omega_1 t \vec{f}_1 + a_2 \cos \omega_2 t \vec{f}_2, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

e) Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de A si $k_1 = k_2 = k_3 = 1 \text{ N m}^{-1}$, et les masses $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$.

f) On se place dans le cas e), avec les vitesses initiales nulles en $t = 0$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.

f1) Déterminer la solution telle que $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$.

f2) Quelle est la fréquence d'oscillation du système si $x_1(0) = x_2(0) = 1$?

f3) Quelle est la fréquence d'oscillation du système si $x_1(0) = 1, x_2(0) = -1$?

Chapitre 3

Mécanique newtonienne

3.1 Lois de Newton et relativité galiléenne

En mécanique newtonienne, l'espace est modélisé par l'espace euclidien à trois dimensions \mathbb{R}^3 et le temps par la droite réelle \mathbb{R} .

On note $\vec{r} \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}$. Un mouvement est une application $\vec{r} : I = [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe \mathcal{C}^2 . On note

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}, \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}.$$

Nous rappelons les trois lois de Newton qui régissent le mouvement d'un système de points matériels.

NEWTON 1. Il existe des repères privilégiés (dits inertiels) où le mouvement d'un corps éloigné de tout autre vérifie $\ddot{\vec{r}}(t) = 0$.

NEWTON 2. P_1, \dots, P_N , N points matériels de coordonnées $\vec{r} = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{3N}$ ouvert. Dans un repère inercial, pour une situation physique donnée,

$$\exists \vec{F}_i : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

telles que le mouvement de chaque P_i vérifie

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i(t) = \vec{F}_i(t, \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)), \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.1)$$

Les \vec{F}_i s'appellent les forces et les m_i s'appellent les masses inertes.

Principe de déterminisme (Théorème d'analyse).

Si les \vec{F}_i sont de classe \mathcal{C}^1 , alors $\forall t_0 \in \mathbb{R}, \forall \vec{r}_0 \in \Omega$ et $\forall \vec{v}_0 \in \mathbb{R}^{3N}$, il existe une unique solution $\vec{r}(t)$ telle que $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ et $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0$, définie pour $|t - t_0|$ suffisamment petit.

NEWTON 3 (Principe d'action et réaction).

P_1, \dots, P_N soumis à $\left\{ \begin{array}{l} \text{des forces internes (dus aux seuls points du système),} \\ \text{des forces externes (dus à d'autres corps ou au milieu).} \end{array} \right.$

On décompose la force agissant sur P_i en une force externe \vec{F}_i^{ext} et une force interne \vec{F}_i^{int}

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int}. \quad (3.2)$$

Le principe d'action-réaction stipule que

$$\vec{F}_i^{int} = \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{F}_{ij}^{int}, \quad (3.3)$$

où \vec{F}_{ij}^{int} dénote la force interne exercée par P_j sur P_i , et

$$\vec{F}_{ij}^{int} = k_{ij}(\vec{r}_j - \vec{r}_i), \quad k_{ij} = k_{ji}, \quad (3.4)$$

de sorte que $\vec{F}_{ij}^{int} = -\vec{F}_{ji}^{int}$, où $k_{ij}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})$ sont des fonctions de $t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}$.

Définition 3.1.1. On dit que le système de points matériels P_1, \dots, P_N est fermé $\Leftrightarrow \vec{F}_i^{ext} = 0, \forall i = 1, \dots, N$.

Dans ce qui suit nous allons expliquer la signification mathématique du principe de relativité de Galilée.

PRINCIPE DE RELATIVITE DE GALILEE (PRG). Pour un système de points matériels fermé, les lois de la mécanique sont les mêmes dans tous les repères inertiels en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

Pour ce faire, considérons un repère inertiel $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ orthonormé direct et un autre repère orthonormé $(O', \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ de même orientation et dont l'origine O' est en mouvement rectiligne uniforme par rapport à O , c'est à dire $\vec{OO}' = \vec{b}t + \vec{c}$, comme sur la Figure 1 ci-dessous.

Soit $P(t)$ un point matériel mobile. Notons

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \end{pmatrix},$$

les coordonnées de $P(t)$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et

$$\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{pmatrix},$$

les coordonnées de $P(t)$ dans la base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$.

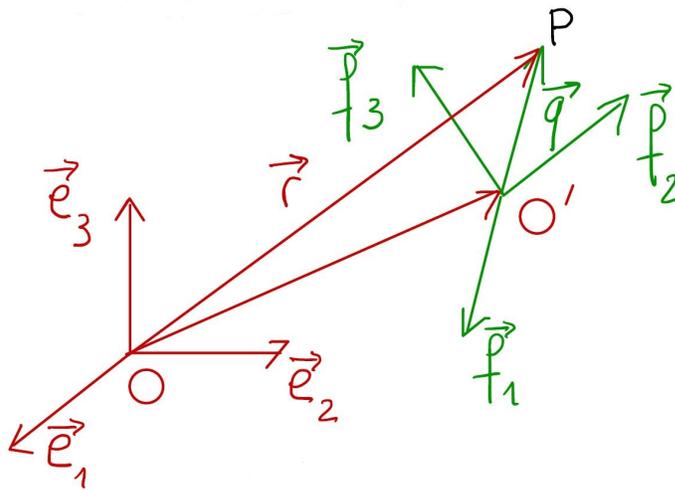


Figure 1.

Puisque

$$\vec{OP} = \vec{OO}' + \vec{O'P},$$

on a

$$\vec{r}(t) = t\vec{b} + \vec{c} + q_1(t)\vec{f}_1 + q_2(t)\vec{f}_2 + q_3(t)\vec{f}_3. \quad (3.5)$$

Comme le membre de gauche de l'équation (3.5) représente les coordonnées de $P(t)$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, pour que l'égalité ci-dessus fasse sens, il faut écrire les vecteurs $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ en termes de leurs coordonnées dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Nous noterons

$$\vec{f}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3,$$

les coordonnées du vecteur \vec{f}_i (translaté en O) dans la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Avec cette notation l'équation (3.5) s'écrit

$$\vec{r}(t) = t\vec{b} + \vec{c} + A\vec{q}(t), \quad (3.6)$$

où A dénote la matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que

$$(\vec{f}_i | \vec{f}_j) = \delta_{ij} \Leftrightarrow A^T A = I,$$

où A^T désigne la transposée de la matrice A et I la matrice identité 3×3 . Ceci signifie que A est une matrice orthogonale. Le déterminant de A est donc ± 1 . Comme la base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ a la même orientation que la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, nécessairement $\det(A) = +1$, ce qui veut dire que A représente la matrice d'une rotation.

Exercice. Pour toute matrice $A, 3 \times 3$, on a

$$\begin{aligned} (A\vec{x} | \vec{y}) &= (\vec{x} | A^T \vec{y}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3, \\ A^T A &= I \Leftrightarrow \|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\|, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Un changement de coordonnées défini comme en (3.6) s'appelle une transformation galiléenne. La transformation galiléenne la plus générale s'obtient en admettant un décalage horaire entre les deux repères

$$t = t' + \tau,$$

où t et t' dénotent le temps mesuré dans les repères $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, respectivement.

Définition 3.1.2. *On appelle transformation galiléenne un changement de coordonnées et de temps donné par*

$$\begin{aligned}\vec{r} &= t'\vec{b} + \vec{c} + A\vec{q}, \\ t &= t' + \tau,\end{aligned}\tag{3.8}$$

où $\vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$, A est une matrice de rotation et $\tau \in \mathbb{R}$.

La signification mathématique du principe de relativité de Galilée est que sous une transformation (3.8), pour un système fermé, les équations de Newton (3.1) doivent rester inchangées, c.à.d. que les équations dans les nouvelles coordonnées \vec{q}, t' sont obtenues en substituant \vec{r} par \vec{q} et t par t' :

$$m_i \frac{d^2 \vec{q}_i(t')}{dt'^2} = \vec{F}_i(t', \vec{q}(t'), \frac{d\vec{q}(t')}{dt'}), i = 1, \dots, N.$$

Il faut remarquer néanmoins que pour un mouvement donné dans le repère $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, déterminé par les conditions initiales $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0$, le mouvement observé dans le repère $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ n'est pas le même, car les conditions initiales du mouvement sont différentes et déterminées par la transformation (3.8).

Nous terminons par deux exemples. Dans le premier exemple le principe de relativité de Galilée sera satisfait (système fermé), dans le deuxième il ne le sera pas (système non fermé).

Exemple 1 : le problème des N corps. On considère N corps dans un repère inertiel $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, dont les coordonnées sont notées $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$, soumis à la loi de gravitation universelle

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i(t)}{dt^2} = \sum_{j=1, j \neq i}^N G m_i m_j \frac{\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)}{\|\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)\|^3}, i = 1, \dots, N,\tag{3.9}$$

où G désigne la constante de gravitation universelle. Dans ce cas les forces sont définies sur l'ouvert $\Omega = \{\vec{r} = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) | \vec{r}_i \neq \vec{r}_j, \forall i \neq j\} \subset \mathbb{R}^{3N}$:

$$\begin{aligned}\vec{F}_i &: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \vec{F}_i(\vec{r}) &= \sum_{j=1, j \neq i}^N G m_i m_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^3}.\end{aligned}$$

On a

$$\vec{F}_i(\vec{r}) = \sum_{j=1, j \neq i}^N F_{ij}^{int}(\vec{r}),$$

$$F_{ij}^{int}(\vec{r}) = Gm_i m_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^3},$$

et donc $\vec{F}_i^{ext} = 0$, c.à.d. que le système est fermé.

Le principe de relativité de Galilée énonce que **sans calculer**, sous une transformation du type (3.8), les équations dans les nouvelles coordonnées \vec{q}, t' deviennent

$$m_i \frac{d^2 \vec{q}_i(t')}{dt'^2} = \sum_{j=1, j \neq i}^N Gm_i m_j \frac{\vec{q}_j(t') - \vec{q}_i(t')}{\|\vec{q}_j(t') - \vec{q}_i(t')\|^3}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.10)$$

Comme on le montrera aux exercices, le principe de relativité de Galilée, pour être vérifié, implique des conditions sur les forces \vec{F}_i . Ici nous nous contenterons de **vérifier par calcul** que les équations (3.9) se réécrivent comme en (3.10) sous une transformation galiléenne (3.8).

Puisque

$$\vec{r}_i(t' + \tau) = t' \vec{b} + \vec{c} + A \vec{q}_i(t'), \quad (3.11)$$

on a

$$\frac{d}{dt'} \vec{r}_i(t' + \tau) = \frac{d \vec{r}_i}{dt}(t' + \tau) \frac{d}{dt'}(t' + \tau) = \frac{d \vec{r}_i}{dt}(t' + \tau),$$

et donc

$$\frac{d^2}{dt'^2} \vec{r}_i(t' + \tau) = \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}(t' + \tau) \frac{d}{dt'}(t' + \tau) = \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}(t' + \tau). \quad (3.12)$$

En différentiant (3.11) deux fois par rapport à t' , et en multipliant par m_i , en utilisant (3.12) on obtient

$$m_i A \frac{d^2}{dt'^2} \vec{q}_i(t') = m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}(t' + \tau). \quad (3.13)$$

En substituant $t' + \tau$ pour t dans (3.9) on obtient

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}(t' + \tau) = \sum_{j=1, j \neq i}^N Gm_i m_j \frac{\vec{r}_j(t' + \tau) - \vec{r}_i(t' + \tau)}{\|\vec{r}_j(t' + \tau) - \vec{r}_i(t' + \tau)\|^3}, \quad i = 1, \dots, N.$$

En utilisant (3.11), et en se rappelant que A est linéaire, on obtient

$$\vec{r}_j(t' + \tau) - \vec{r}_i(t' + \tau) = A\vec{q}_j(t') - A\vec{q}_i(t') = A(\vec{q}_j(t') - \vec{q}_i(t')).$$

Comme A est une rotation, elle est en particulier orthogonale, et en vertu de (3.7), on en déduit que

$$\|\vec{r}_j(t' + \tau) - \vec{r}_i(t' + \tau)\| = \|A(\vec{q}_j(t') - \vec{q}_i(t'))\| = \|\vec{q}_j(t') - \vec{q}_i(t')\|.$$

En substituant ces résultats dans (3.13) on obtient

$$m_i A \frac{d^2 \vec{q}_i}{dt'^2}(t') = \sum_{j=1, j \neq i}^N G m_i m_j \frac{A(\vec{q}_j(t') - \vec{q}_i(t'))}{\|\vec{q}_j(t') - \vec{q}_i(t')\|^3}, \quad i = 1, \dots, N.$$

En multipliant les deux membres de cette équation par A^T , puisque $A^T A = I$ et par linéarité, on obtient finalement l'équation (3.10) que nous voulions établir par calcul direct.

Exemple 2 : Chute verticale de la pomme de Newton ! On observe la chute verticale d'une pomme dans le repère $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et dans le repère $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ obtenu par une rotation d'angle θ autour de l'axe \vec{e}_2 , comme dans la Figure 2 ci-dessous. En supposant $\tau = 0$, comme en (3.6), puisque $\vec{b} = \vec{c} = 0$, la transformation galiléenne (3.8) s'écrit

$$\vec{r} = A\vec{q}, \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

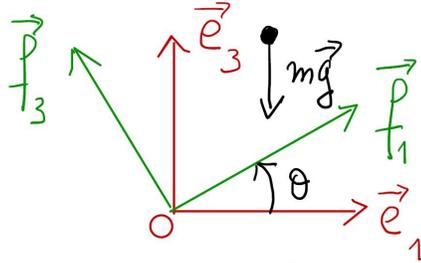


Figure 2.

Dans les coordonnées \vec{r} l'équation de la chute de la pomme s'écrit

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

où m est la masse de la pomme et g dénote la pesanteur. Dans les coordonnées \vec{q} , on obtient par un simple calcul l'équation

$$m\ddot{\vec{q}}(t) = A^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix},$$

c'est à dire

$$m\ddot{\vec{q}}(t) = \begin{pmatrix} -mg \sin \theta \\ 0 \\ -mg \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

On remarque que l'équation (3.15) n'est pas identique à l'équation (3.14). Le principe de relativité de Galilée n'est donc pas satisfait dans cet exemple. En fait le système n'est pas fermé. Pour avoir un système fermé il faudrait inclure la Terre dans le système. Remarquons néanmoins que le membre de droite dans l'équation (3.15) représente *géométriquement* le même vecteur que celui dans le membre de droite de l'équation (3.14), réexprimé dans les coordonnées de la base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$. Comme on le verra aux exercices ceci est toujours vrai. Une transformation galiléenne n'introduit jamais de nouvelles forces dans les équations de Newton.

3.2 Lois de conservation

3.2.1 Conservation de l'énergie

En faisant le produit scalaire de l'équation de Newton (3.1) par $\dot{\vec{r}}_i(t)$, on obtient

$$m_i \left(\ddot{\vec{r}}_i(t) | \dot{\vec{r}}_i(t) \right) = \left(\vec{F}_i(t, \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) | \dot{\vec{r}}_i(t) \right), \quad i = 1, \dots, N.$$

Puisque le membre de gauche peut s'écrire

$$m_i \left(\ddot{\vec{r}}_i(t) | \dot{\vec{r}}_i(t) \right) = \frac{m_i}{2} \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i(t) | \dot{\vec{r}}_i(t) \right) = \frac{m_i}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{\vec{r}}_i(t)\|^2,$$

en sommant de $i = 1$ à $i = N$, on obtient

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \|\dot{\vec{r}}_i(t)\|^2 = \sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i(t, \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) | \dot{\vec{r}}_i(t) \right). \quad (3.16)$$

On appelle

$$T(\dot{\vec{r}}) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \|\dot{\vec{r}}_i\|^2, \quad (3.17)$$

l'énergie cinétique du système. Quand la dépendance en t d'une quantité ainsi définie n'est pas écrite explicitement, cela signifie qu'elle n'est pas évaluée le long d'un mouvement $\vec{r}(t)$ du système, où la notation \vec{r} dénote le vecteur de \mathbb{R}^{3N}

$$\vec{r} = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N).$$

Considérons

$$\vec{r} : [t_1, t_2] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^{3N} \quad t \mapsto \vec{r}(t),$$

un mouvement de classe \mathcal{C}^2 du système. En intégrant (3.16) de t_1 à t_2 , on obtient

$$T(\dot{\vec{r}}(t_2)) - T(\dot{\vec{r}}(t_1)) = W(t_1, t_2),$$

où

$$W(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^N \int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{F}_i(t, \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) | \dot{\vec{r}}_i(t) \right) dt, \quad (3.18)$$

représente le travail fait par les forces pour amener le système de la position $\vec{r}(t_1)$ à la position $\vec{r}(t_2)$, le long du mouvement $\vec{r}(t)$.

Définition 3.2.1. *Le champ de forces*

$$\vec{F} = (\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_N), \quad (3.19)$$

est dit *conservatif* si et seulement si pour tout mouvement du système $\vec{r}(t) : [t_1, t_2] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^{3N}$, le travail $W(t_1, t_2)$ ne dépend que de la position initiale $\vec{r}(t_1)$ et de la position finale $\vec{r}(t_2)$ du système.

On montre en analyse qu'un champ de forces de classe \mathcal{C}^1 est conservatif si et seulement si il existe une fonction $V : \Omega \subset \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telle que

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r}), \quad (3.20)$$

où $\vec{\nabla}$ dénote l'opérateur gradient. On exprime ceci en disant que les forces dérivent d'un potentiel $V(\vec{r})$. Le potentiel est alors défini à une constante additive près. En particulier cela implique que les forces $\vec{F}_i, i = 1, \dots, N$, ne dépendent que des positions des points du système, et sont donc indépendantes du temps et des vitesses.

En général, le champ de forces se décompose en une partie conservative et une partie non conservative, ce que l'on note comme suit

$$\vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) + \vec{G}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}). \quad (3.21)$$

Le théorème général suivant donne la variation de l'énergie totale le long d'un mouvement arbitraire du système.

Théorème 3.2.2. *Le long d'un mouvement arbitraire d'un système soumis à un champ de forces (3.21), l'énergie totale du système*

$$E(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = T(\dot{\vec{r}}) + V(\vec{r}), \quad (3.22)$$

vérifie

$$\frac{d}{dt}E(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) = \left(\vec{G}(t, \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) \middle| \dot{\vec{r}}(t) \right). \quad (3.23)$$

En particulier, pour un système conservatif $\vec{G}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) = 0$, et donc l'énergie totale est constante le long de tout mouvement du système.

Démonstration. Soit $\vec{r}(t) : [t_1, t_2] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^{3N}$ un mouvement du système. Par dérivation des fonctions composées on a

$$\frac{d}{dt}V(\vec{r}(t)) = \left(\vec{\nabla}V(\vec{r}(t)) \middle| \dot{\vec{r}}(t) \right), \quad (3.24)$$

où $(\cdot | \cdot)$ dénote le produit scalaire dans \mathbb{R}^{3N} . L'équation (3.16) et la définition de l'énergie cinétique (3.17) donnent

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T(\dot{\vec{r}}(t)) &= \sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i(t, \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) \middle| \dot{\vec{r}}_i(t) \right), \\ &= \left(\vec{F}(t, \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) \middle| \dot{\vec{r}}(t) \right), \end{aligned} \quad (3.25)$$

où, dans la première égalité, $(\cdot|\cdot)$ dénote le produit scalaire dans \mathbb{R}^3 et dans la deuxième $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire dans \mathbb{R}^{3N} . En additionnant (3.24) et (3.25), on obtient

$$\frac{d}{dt}E(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) = \left(\vec{F}(t, \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) + \vec{\nabla}V(\vec{r}(t)) \middle| \dot{\vec{r}}(t) \right),$$

ce qui, en utilisant (3.21) donne le résultat (3.23) et termine la démonstration. \square

Corollaire 3.2.3. *Pour un champ de forces conservatif \vec{F} dérivant d'un potentiel V , le travail $W(t_1, t_2)$ fait par les forces pour amener le système d'un état $\vec{r}(t_1)$ à un état $\vec{r}(t_2)$ est donné par*

$$W(t_1, t_2) = V(\vec{r}(t_1)) - V(\vec{r}(t_2)). \quad (3.26)$$

Démonstration. Puisque le champ de forces \vec{F} (3.19) est conservatif (3.20), la définition du travail (3.18), combinée avec la formule (3.24), donne immédiatement en intégrant de t_1 à t_2

$$\begin{aligned} W(t_1, t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{F}(t, \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) \middle| \dot{\vec{r}}(t) \right), \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \left(\nabla V(\vec{r}(t)) \middle| \dot{\vec{r}}(t) \right), \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} V(\vec{r}(t)) dt = V(\vec{r}(t_1)) - V(\vec{r}(t_2)), \end{aligned}$$

ce qui établit le résultat. \square

Exemple 1 : potentiel du problème de N corps. On considère N corps dans un repère inertiel soumis à la gravitation universelle. Nous allons démontrer à partir de la définition du travail (3.18), que le système est conservatif et déterminer le potentiel.

Soit l'ouvert

$$\Omega = \{(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \in \mathbb{R}^{3N} : \vec{r}_i \neq \vec{r}_j, \forall i \neq j\} \subset \mathbb{R}^{3N}.$$

En vertu de la loi de gravitation universelle, la force exercée sur la $i^{\text{ème}}$ masse est

$$\vec{F}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N Gm_i m_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^3}.$$

Soit $\vec{r} : [t_1, t_2] \rightarrow \Omega$ un mouvement de classe \mathcal{C}^2 , $\vec{r}(t) = (\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t))$. Le travail effectué par les forces de gravitation pour amener le système de la position initiale $\vec{r}(t_1)$ à la position finale $\vec{r}(t_2)$ le long de ce mouvement est donné par

$$\begin{aligned} W(t_1, t_2) &= \sum_{i=1}^N \int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{F}_i(\vec{r}(t)) | \dot{\vec{r}}_i(t) \right) dt \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N Gm_i m_j \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)}{\|\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)\|^3} | \dot{\vec{r}}_i(t) \right) dt \\ &= - \sum_{1 \leq i < j \leq N} Gm_i m_j \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)}{\|\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)\|^3} | \dot{\vec{r}}_j(t) - \dot{\vec{r}}_i(t) \right) dt \\ &= - \sum_{1 \leq i < j \leq N} Gm_i m_j \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\|\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)\|^2} \frac{d}{dt} \|\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)\| dt. \end{aligned}$$

Pour obtenir la dernière égalité, on a utilisé l'identité

$$\frac{d}{dt} \|\vec{r}(t)\| = \frac{(\vec{r}(t) | \dot{\vec{r}}(t))}{\|\vec{r}(t)\|}.$$

En faisant le changement de variable $x = \|\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)\|$, on obtient

$$\begin{aligned} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\|\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)\|^2} \frac{d}{dt} \|\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)\| dt &= - \int_{\|\vec{r}_j(t_1) - \vec{r}_i(t_1)\|}^{\|\vec{r}_j(t_2) - \vec{r}_i(t_2)\|} \frac{dx}{x^2} \\ &= \frac{1}{\|\vec{r}_j(t_2) - \vec{r}_i(t_2)\|} - \frac{1}{\|\vec{r}_j(t_1) - \vec{r}_i(t_1)\|}, \end{aligned}$$

et donc

$$W(t_1, t_2) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} Gm_i m_j \left(\frac{1}{\|\vec{r}_j(t_2) - \vec{r}_i(t_2)\|} - \frac{1}{\|\vec{r}_j(t_1) - \vec{r}_i(t_1)\|} \right).$$

Le travail $W(t_1, t_2)$ ne dépend que de la position initiale $\vec{r}(t_1)$ et de la position finale $\vec{r}(t_2)$ du mouvement et donc le système est conservatif. En vertu de (3.26), le potentiel est donc donné à une constante additive près (que l'on peut choisir nulle) par

$$V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{Gm_i m_j}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|}.$$

Exemple 2 : le pendule simple et les forces de liaison. Le pendule simple est un point P de masse m qui se déplace dans un plan vertical sous l'action de la pesanteur et qui est relié à un point d'attache fixe O par une barre rigide de longueur l et de masse négligeable. Soit un système de coordonnées x, y dans le plan vertical considéré, tel que l'origine soit le point d'attache et la force de pesanteur soit dirigée selon l'axe Ox , comme sur la Figure 3 ci-dessous.

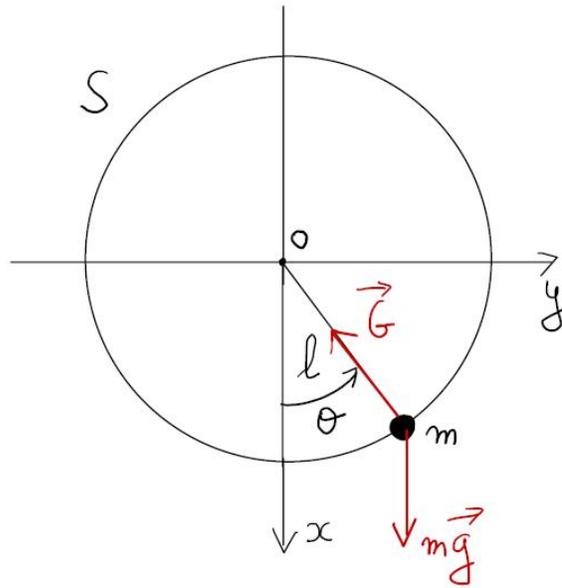


Figure 3.

Pour mettre en équation un tel système, on considère que l'action de la barre se réduit à exercer une force \vec{G} , dite de liaison. Puisque cette force modélise l'action de la barre, elle doit être telle que le point P se déplace le long du cercle de centre O et de rayon l :

$$S = \left\{ \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = l^2 \right\}.$$

On dira que la liaison est lisse, ou sans frottement, si et seulement si \vec{G} est perpendiculaire à S . L'énergie totale du système, définie en (3.22), est

$$\frac{m}{2} \|\dot{\vec{r}}\|^2 + V(\vec{r}), \quad (3.27)$$

avec

$$V(\vec{r}) = -mgx. \quad (3.28)$$

En effet

$$-\vec{\nabla}V(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial V}{\partial x}(x, y) \\ -\frac{\partial V}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les forces exercées sur P sont la force de gravité, qui dérive d'un potentiel, et la force de liaison $\vec{G} = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}$. Les équations de Newton du mouvement du pendule dans le repère inertiel (O, x, y) sont donc

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= -\frac{\partial V}{\partial x}(x(t), y(t)) + G_1 = mg + G_1, \\ m\ddot{y}(t) &= -\frac{\partial V}{\partial y}(x(t), y(t)) + G_2 = G_2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

En passant aux coordonnées polaires $x = l \cos \theta, y = l \sin \theta$, et en notant $G = \|\vec{G}\|$, on trouve

$$\begin{aligned} -ml \ddot{\theta} \sin \theta - ml \dot{\theta}^2 \cos \theta &= mg - G \cos \theta, \\ ml \ddot{\theta} \cos \theta - ml \dot{\theta}^2 \sin \theta &= -G \sin \theta. \end{aligned}$$

En multipliant la première équation par $-\sin \theta$ et la deuxième équation par $\cos \theta$ on obtient

$$ml \ddot{\theta} = -mg \sin \theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta, \quad (3.30)$$

qui est l'équation du mouvement du pendule. On peut trouver l'expression explicite de la force de liaison en multipliant la première équation par $\cos \theta$ et la deuxième équation par $\sin \theta$, ce qui donne

$$G(\theta, \dot{\theta}) = mg \cos \theta + ml \dot{\theta}^2.$$

Donc, dans ce cas, la force de liaison ne dépend que de la position et de la vitesse du pendule, et la force totale exercée sur le pendule peut s'écrire

$$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) + \vec{G}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}).$$

En appliquant (3.23), on trouve

$$\frac{d}{dt}E(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) = \left(\vec{G}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) | \dot{\vec{r}}(t) \right) = 0,$$

par la condition de liaison lisse, puisque $\dot{\vec{r}}(t)$ est tangente au cercle S et \vec{G} est perpendiculaire à S , et l'énergie totale du pendule est donc conservée. La condition de liaison lisse signifie que la force de liaison ne travaille pas le long de tout mouvement du pendule.

En coordonnées polaires l'énergie potentielle (3.28) du pendule est donnée par

$$V(\theta) = -mgl \cos \theta, \quad (3.31)$$

et l'énergie totale (3.27) est donnée par

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta. \quad (3.32)$$

Exemple 3 : le pendule simple forcé et les forces de liaison. On considère le mouvement d'un pendule plan soumis à la pesanteur et dont le point d'attache est soumis à une force d'excitation périodique verticale $A \sin \omega t$, comme sur la Figure 4 ci-dessous.

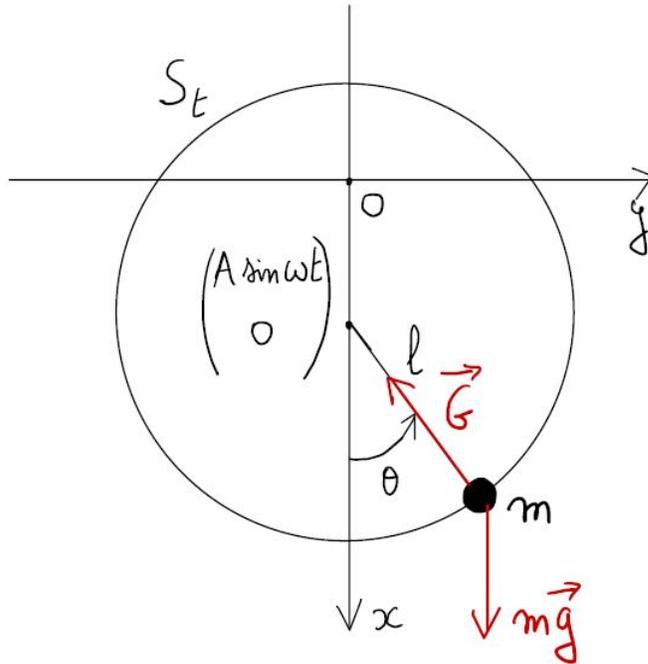


Figure 4.

L'ensemble des positions possibles du pendule au temps t , noté S_t , est un cercle de centre $\begin{pmatrix} A \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$ et de rayon l , où l est la longueur du pendule

$$S_t = \left\{ \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x - A \sin \omega t)^2 + y^2 = l^2 \right\}.$$

Ceci est un exemple d'une liaison dépendant du temps. La condition de liaison lisse, ou sans frottement, est que la force de liaison inconnue $\vec{G} = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}$ soit perpendiculaire à S_t . L'équation de Newton du mouvement est identique à celle obtenue en (3.29). On peut paramétrer S_t en terme de l'angle θ que le pendule fait avec la verticale descendante

$$x = A \sin \omega t + l \cos \theta, \quad y = l \sin \theta. \quad (3.33)$$

En notant $G = \|\vec{G}\|$ et en substituant (3.33) dans (3.29), on trouve

$$\begin{aligned} -ml \ddot{\theta} \sin \theta - ml \dot{\theta}^2 \cos \theta - mA\omega^2 \sin \omega t &= mg - G \cos \theta, \\ ml \ddot{\theta} \cos \theta - ml \dot{\theta}^2 \sin \theta &= -G \sin \theta. \end{aligned}$$

En multipliant la première équation par $-\sin \theta$ et la deuxième équation par $\cos \theta$ on obtient

$$\begin{aligned} ml \ddot{\theta} + mA\omega^2 \sin \omega t \sin \theta &= -mg \sin \theta \\ \Downarrow \\ \ddot{\theta} &= -\frac{1}{l} \left(g + A\omega^2 \sin \omega t \right) \sin \theta, \end{aligned}$$

qui est l'équation du mouvement du pendule forcé. Comme précédemment, on peut trouver l'expression explicite de la force de liaison en multipliant la première équation par $\cos \theta$ et la deuxième équation par $\sin \theta$, ce qui donne

$$G(t, \theta, \dot{\theta}) = mg \cos \theta + ml \dot{\theta}^2 + mA\omega^2 \sin \omega t \cos \theta. \quad (3.34)$$

Donc, dans ce cas, la force de liaison dépend explicitement du temps, de la position et de la vitesse du pendule, et la force totale exercée sur le pendule peut s'écrire

$$\vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) + \vec{G}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}).$$

Contrairement à l'exemple du pendule, dans le cas du pendule forcé, l'énergie totale n'est pas conservée car, le long d'un mouvement $\vec{r}(t)$,

$$(\vec{G}(t, \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) | \dot{\vec{r}}(t)) \neq 0,$$

puisque $\dot{\vec{r}}(t)$ n'est pas tangent à S_t . On calcule facilement, en appliquant (3.23), que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) &= \left(\vec{G}(t, \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) | \dot{\vec{r}}(t) \right), \\ &= -A\omega \cos \omega t \cos \theta(t) G(t, \theta(t), \dot{\theta}(t)), \end{aligned}$$

avec $\vec{G}(t, \theta, \dot{\theta})$ donné par (3.34). Le travail de la force de liaison, qui dans cet exemple dépend explicitement du temps, n'est donc pas nul le long d'un mouvement du système.

Après ces exemples nous donnons la définition générale de forces de liaison lisses.

Définition 3.2.4. Soit un système de N points matériels $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N \in \mathbb{R}^3$. Supposons le système soumis à des forces de liaison $\vec{G}_1, \dots, \vec{G}_N$, qui contraignent les positions possibles $\vec{r} = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ du système au temps t à un sous-ensemble $S_t \subset \mathbb{R}^{3N}$, dépendant éventuellement du temps, et pouvant à chaque instant t être paramétré par $n < N$ coordonnées q_1, \dots, q_n , c'est-à-dire

$$S_t = \{ \vec{r}(t, q_1, \dots, q_n) \} \subset \mathbb{R}^{3N}, \quad (3.35)$$

où $\vec{r}(t, q_1, \dots, q_n)$ est une fonction de classe \mathcal{C}^2 définie sur un ouvert de \mathbb{R}^{n+1} . On dira que ces forces de liaisons sont lisses, ou sans frottement, si et seulement si, le long de tout mouvement du système $\vec{r}(t)$, le vecteur $\vec{G} = (\vec{G}_1, \dots, \vec{G}_N)$ est perpendiculaire à S_t , c'est-à-dire

$$\left(\vec{G}(t, \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}(t, q_1(t), \dots, q_n(t)) \right. \right) = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq n. \quad (3.36)$$

On suppose dans cette condition que les n vecteurs $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}(t, q_1, \dots, q_n)$, $1 \leq i \leq n$, forment une base de l'espace tangent à S_t au point $\vec{r}(t, q_1, \dots, q_n)$. Le nombre n s'appelle le nombre de degrés de liberté du système.

3.2.2 Conservation de la quantité de mouvement

En sommant les équations de Newton (3.1) satisfaites par chaque point matériel du système et en utilisant (3.2), on obtient

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i(t) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{int}. \quad (3.37)$$

On appelle

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i, \text{ avec } \vec{p}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i, \quad (3.38)$$

la quantité de mouvement du système. En utilisant le principe d'action et réaction, (3.3) et (3.4), $\vec{F}_{ij}^{int} = -\vec{F}_{ji}^{int}$, on obtient

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{int} = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij}^{int} = \sum_{1 \leq i < j \leq N} (\vec{F}_{ij}^{int} + \vec{F}_{ji}^{int}) = 0,$$

et donc, par définition de \vec{P} (3.38), l'équation (3.37) s'écrit

$$\dot{\vec{P}}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext}. \quad (3.39)$$

Rappelons que par définition un système est fermé quand $\vec{F}_i^{ext} = 0, \forall i$. On en déduit le résultat suivant.

Théorème 3.2.5. *Dans un système fermé, la quantité de mouvement \vec{P} est constante le long de tout mouvement du système.*

Une formulation équivalente peut être définie en terme du centre de masse, aussi appelé centre d'inertie du système, défini par

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right), \text{ avec } M = \sum_{i=1}^N m_i. \quad (3.40)$$

L'équation (3.39) s'écrit

$$M \ddot{\vec{R}}(t) = \dot{\vec{P}}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext}. \quad (3.41)$$

L'équation (3.41) montre que le centre de masse du système se déplace comme un point matériel (fictif) de masse M mû par une force égale à la somme de toutes les forces externes. Le théorème de la conservation de la quantité de mouvement peut donc aussi s'énoncer comme suit :

Théorème 3.2.6. *Dans un système fermé, le centre de masse $\vec{R}(t)$ se meut selon un mouvement rectiligne uniforme*

$$\vec{R}(t) = \vec{b}t + \vec{c},$$

où \vec{b}, \vec{c} sont des vecteurs constants.

3.2.3 Conservation du moment cinétique

Commençons par rappeler la définition du produit vectoriel.

Définition 3.2.7. *Soient*

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

On définit le produit vectoriel de \vec{x} et \vec{y} par

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Exercice. 1) Montrer que $\vec{x} \wedge \vec{y} = 0$ si et seulement si \vec{x} et \vec{y} sont colinéaires. Si \vec{x} et \vec{y} ne sont pas colinéaires, montrer que $\vec{x} \wedge \vec{y}$ est l'unique vecteur perpendiculaire au plan engendré par \vec{x} et \vec{y} , tel que la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \wedge \vec{y})$ soit à orientation directe (règle de la vis ou du tire-bouchon) et

$$\|\vec{x} \wedge \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin \alpha, \quad (3.43)$$

où α est l'angle entre \vec{x} et \vec{y} , tel que $0 < \alpha < \pi$, c'est-à-dire dont la norme représente l'aire du parallélogramme engendré par \vec{x} et \vec{y} .

2) Montrer que pour une matrice $A, 3 \times 3$ telle que $\det A \neq 0$,

$$A\vec{x} \wedge A\vec{y} = A(\vec{x} \wedge \vec{y}), \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.44)$$

si et seulement si A est une matrice de rotation. Ceci signifie que le produit vectoriel est intrinsèquement bien défini (comme vecteur géométrique) modulo les changements de coordonnées donnés par les rotations.

En prenant le produit vectoriel de l'équation de Newton (3.1) avec le vecteur position $\vec{r}_i(t)$, et en sommant de $i = 1$ à $i = N$, on obtient

$$\sum_{i=1}^N \vec{r}_i(t) \wedge m_i \ddot{\vec{r}}_i(t) = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i(t) \wedge \vec{F}_i. \quad (3.45)$$

Le membre de gauche de cette équation peut s'écrire

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{r}_i(t) \wedge m_i \dot{\vec{r}}_i(t) = \frac{d}{dt} \vec{J}(t), \quad (3.46)$$

où

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i, \text{ avec } \vec{p}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i,$$

s'appelle le moment cinétique par rapport à l'origine, ou aussi le moment de la quantité de mouvement du système. Par le principe d'action et réaction, (3.3) et (3.4), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \vec{r}_i(t) \wedge \vec{F}_i^{int} &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_i(t) \wedge \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij}^{int} \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq N} \left(\vec{r}_i(t) \wedge \vec{F}_{ij}^{int} + \vec{r}_j \wedge \vec{F}_{ji}^{int} \right) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq N} \left(\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t) \right) \wedge \vec{F}_{ij}^{int}, \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq N} \left(\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t) \right) \wedge k_{ij} \left(\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t) \right) = 0, \end{aligned}$$

et donc en écrivant $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int}$, les équations (3.45) et (3.46) impliquent que

$$\dot{\vec{J}}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i(t) \wedge \vec{F}_i^{ext}. \quad (3.47)$$

Plus généralement, on peut définir $\forall \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ le moment cinétique par rapport à \vec{c}

$$\vec{J}_{\vec{c}} = \sum_{i=1}^N \left(\vec{r}_i - \vec{c} \right) \wedge \vec{p}_i, \text{ avec } \vec{p}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i. \quad (3.48)$$

Théorème 3.2.8. *Pour tout $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$, on a*

$$\dot{\vec{J}}_{\vec{c}}(t) = \sum_{i=1}^N \left(\vec{r}_i(t) - \vec{c} \right) \wedge \vec{F}_i^{ext}. \quad (3.49)$$

En particulier, dans un système fermé, le moment cinétique $\vec{J}_{\vec{c}}$ est constant le long de tout mouvement du système.

Démonstration. Par définition (3.48), on a

$$\vec{J}_{\vec{c}}(t) = \vec{J}(t) - \vec{c} \wedge \vec{P}(t),$$

d'où l'on déduit de (3.39) et (3.47) que

$$\begin{aligned} \dot{\vec{J}}_{\vec{c}}(t) &= \dot{\vec{J}}(t) - \vec{c} \wedge \dot{\vec{P}}(t) \\ &= \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i(t) \wedge \vec{F}_i^{ext} - \vec{c} \wedge \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\dot{\vec{r}}_i(t) - \vec{c} \right) \wedge \vec{F}_i^{ext}, \end{aligned}$$

ce qui établit (3.49). □

Un autre résultat concernant le moment cinétique est le suivant.

Théorème 3.2.9. *Soit \vec{R} le centre de masse du système. On note*

$$J_{\vec{R}} = \sum_{i=1}^N \left(\vec{r}_i - \vec{R} \right) \wedge \vec{p}_i, \text{ avec } \vec{p}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i, \quad (3.50)$$

le moment cinétique par rapport au centre de masse. Alors, pour tout mouvement du système, on a

$$\frac{d}{dt} J_{\vec{R}(t)}(t) = \sum_{i=1}^N \left(\dot{\vec{r}}_i(t) - \dot{\vec{R}}(t) \right) \wedge \vec{F}_i^{ext}. \quad (3.51)$$

Démonstration. Par définition (3.50), on a

$$\vec{J}_{\vec{R}(t)}(t) = \vec{J}(t) - \vec{R}(t) \wedge \vec{P}(t),$$

d'où l'on déduit de (3.38), (3.39), (3.40) et (3.47) que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{J}_{\vec{R}(t)}(t) &= \dot{\vec{J}}(t) - \vec{R}(t) \wedge \dot{\vec{P}}(t) - \dot{\vec{R}}(t) \wedge \vec{P}(t) \\ &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_i(t) \wedge \vec{F}_i^{ext} - \vec{R}(t) \wedge \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} \right) - \frac{1}{M} \vec{P}(t) \wedge \vec{P}(t) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\vec{r}_i(t) - \vec{R}(t) \right) \wedge \vec{F}_i^{ext}, \end{aligned}$$

ce qui établit (3.51). □

3.3 Exercices

3.3.1 Mécanique newtonienne et relativité galiléenne

1. Soit A une matrice 3×3 . Démontrer que

$$(A\vec{x}|\vec{y}) = (\vec{x}|A^T\vec{y}), \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3.$$

2. Soit A une matrice 3×3 . Démontrer que

$$A^T A = I \Leftrightarrow \|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\|, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3.$$

3. Soit A une matrice 3×3 de rotation.

a) Montrer que $A^T(A - I) = (I - A)^T$.

b) En déduire que $\det(A - I) = 0$.

c) Démontrer qu'il existe $\vec{x} \neq 0 \in \mathbb{R}^3$ telle que A est une rotation d'angle θ , $0 \leq \theta < 2\pi$, autour de l'axe \vec{x} .

4. Résoudre l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = x^2(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

et déterminer en fonction de la condition initiale, l'intervalle maximal de définition de la solution.

5. On considère un obus tiré par un canon situé en un point O de la surface de la Terre, avec une vitesse initiale de norme v_0 , faisant un angle α avec l'horizontale. On néglige les effets liés au frottement de l'air, ainsi qu'à la courbure et à la rotation de la Terre. On travaille dans le repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, O l'origine du tir, \vec{e}_1 dans la direction horizontale et \vec{e}_2 dans la direction verticale.

Déterminer :

- la fonction $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2$ qui donne la position de l'obus en fonction du temps t le séparant de l'instant du tir.
- l'équation cartésienne de la trajectoire de l'obus.
- le temps T mis par l'obus pour atteindre, lorsqu'il s'élève, la moitié de la hauteur du sommet de sa trajectoire.

6. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et soit

$$\vec{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

un mouvement de classe \mathcal{C}^2 . On suppose que la vitesse

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix},$$

ne s'annule pas, $\vec{v}(t) \neq 0, \forall t \in I$. On note $\vec{\tau}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{\|\vec{v}(t)\|}$, la tangente unitaire au mouvement, et $\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix}$ l'accélération du mouvement. Montrer que l'accélération tangentielle définie par

$$a_T(t) = (\vec{a}(t) | \vec{\tau}(t)),$$

où $(\cdot | \cdot)$ dénote le produit scalaire, est donnée par

$$a_T(t) = \frac{d}{dt} \|\vec{v}(t)\|.$$

7. Dans le champ de pesanteur, on considère le mouvement sans frottement d'une perle de masse m le long d'un fil rigide ayant la forme d'une cycloïde verticale décrite par l'équation

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} b(\theta + \sin \theta) \\ b(1 - \cos \theta) \end{pmatrix}, \quad b > 0, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi.$$

- a) Représenter la cycloïde dans le plan.
 b) En utilisant l'exercice 6, montrer que l'accélération tangentielle de la perle est donnée par

$$a_T(t) = 4b \frac{d^2}{dt^2} \sin \frac{\theta(t)}{2}.$$

- c) A partir de l'équation de Newton

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \vec{R},$$

où \vec{R} , la réaction du fil, satisfait $(\vec{R} | \vec{\tau}) = 0$ (mouvement sans frottement), montrer que

$$z(t) = \sin \frac{\theta(t)}{2},$$

satisfait l'équation d'un oscillateur harmonique.

- d) En déduire que si on lâche la perle en un point de la cycloïde (autre que $(0,0)$), la perle arrive en bas de celle-ci en un temps indépendant du point de départ et calculer ce temps.

8. a) Considérons un point de masse m qui se déplace sur une droite sous l'action d'un ressort décrit par la loi de Hooke $m\ddot{x} = -kx, k > 0, x \in \mathbb{R}$. Montrer que cette équation ne vérifie pas le principe de relativité de Galilée.

- b) Que suggérez-vous de faire pour obtenir une équation qui vérifie le principe de relativité de Galilée ?

9. a) Vérifier que la transformation de Galilée la plus générale peut s'écrire en termes d'une matrice 5×5 :

$$\begin{pmatrix} \vec{r} \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \vec{b} & \vec{c} \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{q} \\ t' \\ 1 \end{pmatrix},$$

A une matrice de rotation, $\vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3, \tau \in \mathbb{R}$.

- b) En déduire que l'ensemble des transformations galiléennes G forment un groupe, c.à.d.

- 1) $\forall f, g \in G, f \circ g \in G$, (loi de composition interne),
- 2) $\forall f, g, h \in G, (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, (loi de composition associative),
- 3) $\exists e \in G$ tel que $\forall f \in G, e \circ f = f \circ e = f$, (existence du neutre),
- 4) $\forall f \in G, \exists g \in G$ tel que $f \circ g = g \circ f = e$, (existence d'un inverse).

10. Démontrer que les équations de Newton $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i, i = 1, \dots, N$, vérifient le principe de relativité de Galilée, si et seulement si les forces \vec{F}_i ne dépendent pas explicitement du temps (il n'y a pas d'instant privilégié dans l'univers) et de plus

a) les \vec{F}_i peuvent s'écrire comme des fonctions qui ne dépendent que des différences des coordonnées et des vitesses, c.à.d. $\vec{F}_i(\vec{r}_j - \vec{r}_k, \dot{\vec{r}}_j - \dot{\vec{r}}_k)$ (il n'y a pas d'origine privilégiée dans l'univers) et

b) $\vec{F}_i(A(\vec{r}_j - \vec{r}_k), A(\dot{\vec{r}}_j - \dot{\vec{r}}_k)) = A\vec{F}_i(\vec{r}_j - \vec{r}_k, \dot{\vec{r}}_j - \dot{\vec{r}}_k), \forall$ rotation A (il n'y a pas de direction privilégiée dans l'univers).

3.3.2 Lois de conservation

1. Soient $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

a) Est-il vrai que $\vec{x} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{z}) = (\vec{x} \wedge \vec{y}) \wedge \vec{z}$?

b) Démontrer que

$$(\vec{x} | \vec{y} \wedge \vec{z}) = (\vec{y} | \vec{z} \wedge \vec{x}) = (\vec{z} | \vec{x} \wedge \vec{y}) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

2. a) Montrer que \vec{x} et $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{x} \wedge \vec{y} = 0$.

b) Soient $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$. Montrer que si \vec{x} et \vec{y} ne sont pas colinéaires, le produit vectoriel de $\vec{x} \wedge \vec{y}$ est l'unique vecteur de \mathbb{R}^3 tel que

$$\vec{x} \wedge \vec{y} \perp \text{ au plan engendré par } \vec{x} \text{ et } \vec{y},$$

$$\text{la base } (\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \wedge \vec{y}) \text{ est à orientation directe,}$$

la norme de $\vec{x} \wedge \vec{y}$ est l'aire du parallélogramme engendré par \vec{x} et \vec{y} .

3. Soit A une matrice 3×3 , telle que $\det A \neq 0$. Démontrer que

$$A(\vec{x} \wedge \vec{y}) = (A\vec{x}) \wedge (A\vec{y}), \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow A \text{ est une matrice de rotation.}$$

4. Soit $\Phi : \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

a) Démontrer que le travail effectué par le champ de forces

$$\vec{F} : \Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3 : \vec{r} \mapsto \vec{F}(\vec{r}) = \Phi(\|\vec{r}\|) \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|},$$

en déplaçant un point matériel le long d'un mouvement $\vec{r} : [t_1, t_2] \rightarrow \Omega$ de classe \mathcal{C}^2 , ne dépend que du point initial $\vec{r}(t_1)$ et du point final $\vec{r}(t_2)$.

b) En déduire le potentiel $V(\vec{r})$ dont dérive $\vec{F}(\vec{r})$.

5. Soit $\Phi : \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 et soit $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ le champ de forces

$$\vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \begin{pmatrix} \Phi(\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|) \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|} \\ \Phi(\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|) \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|} \end{pmatrix},$$

où

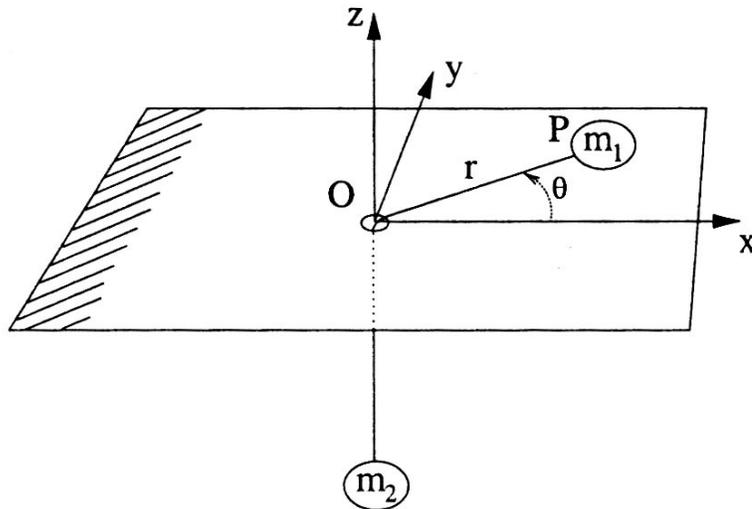
$$\Omega = \{(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \in \mathbb{R}^6 \mid \vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathbb{R}^3, \vec{r}_1 \neq \vec{r}_2\}.$$

a) Montrer que \vec{F} est conservatif.

b) En déduire un potentiel dont dérive \vec{F} .

c) Calculer explicitement ce potentiel quand $\Phi(x) = \frac{Gm_1m_2}{x^2}$.

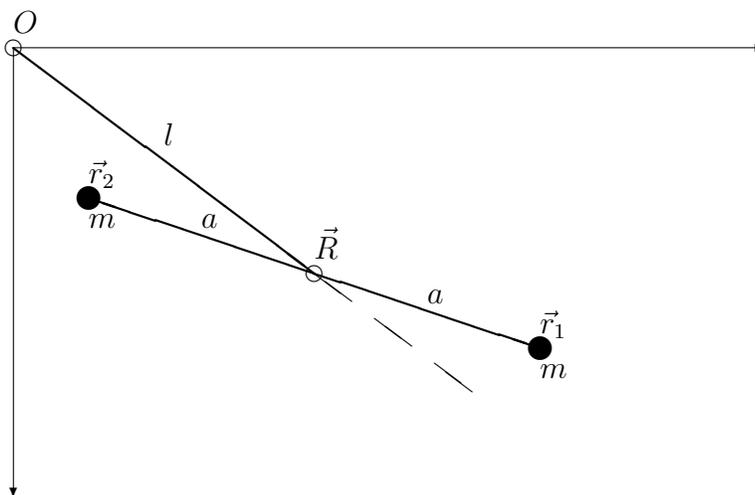
6. Un disque, assimilé à un point matériel P de masse m_1 , glisse sans frottement sur un plan horizontal. Ce disque est relié à une masse m_2 par l'intermédiaire d'un fil de longueur l et de masse négligeable passant sans frottement par un petit trou O . La masse m_2 se déplace suivant la verticale. On admettra que, dans ces conditions, la tension se conserve le long du fil.



Le point P est repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) et la masse m_2 par sa coordonnée verticale z .

- Indiquer sur la figure toutes les forces impliquées.
- Etablir que le moment cinétique du point P par rapport à l'origine O est constant le long de tout mouvement. Donner l'expression explicite de cette constante du mouvement en fonction de $(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta})$.
- En notant que $r - z = l$ (avec z la coordonnée de m_2), donner une formule explicite pour l'énergie totale du système en fonction de $(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta})$. Etablir que l'énergie totale est constante le long de tout mouvement.

7. On considère le mouvement dans un plan vertical, sous l'influence de la gravité, d'un pendule en forme d'haltère, dont le centre de masse \vec{R} est attaché à l'extrémité d'une tige rigide de masse négligeable et de longueur l , suspendue à un point d'attache O . La tige tourne librement autour de son point d'attache O . Le pendule est constitué de deux points matériels de même masse m reliés par une tige rigide de masse négligeable et de longueur $2a$, et tourne librement autour de son centre de masse \vec{R} . On suppose que les liaisons sont lisses. On note θ l'angle que fait \vec{R} avec la verticale descendante, et φ l'angle que fait $\vec{r}_1 - \vec{R}$ avec la verticale descendante.



1) Paramétrer la surface de liaison $S \subset \mathbb{R}^4$ (indépendante du temps), comme expliqué en (3.35), en terme des deux angles θ, φ :

$$(\theta, \varphi) \mapsto \vec{r}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \vec{r}_1(\theta, \varphi) \\ \vec{r}_2(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \in S \subset \mathbb{R}^4.$$

2) On note $\vec{F}_1 = m\vec{g} + \vec{G}_1$ et $\vec{F}_2 = m\vec{g} + \vec{G}_2$ les forces exercées sur les masses en \vec{r}_1 et \vec{r}_2 respectivement, où $m\vec{g}$ est la force de pesanteur et \vec{G}_1, \vec{G}_2 dénotent les forces de liaison. Déterminer le potentiel $V(\vec{r})$ tel que le champ de forces $\vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{F}_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ s'écrive sous la forme

$$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) + \vec{G}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}), \text{ avec } \vec{G}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \begin{pmatrix} \vec{G}_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) \\ \vec{G}_2(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) \end{pmatrix}.$$

3) Montrer que les deux conditions de liaisons lisses, comme défini en (3.36), signifient respectivement que

$$\vec{G}_1 + \vec{G}_2 \parallel \vec{R} \quad \text{et} \quad \vec{G}_1 - \vec{G}_2 \parallel \vec{r}_1 - \vec{R},$$

où le symbole \parallel signifie que les vecteurs sont parallèles.

4) Calculer l'énergie totale du système en terme de $\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ et montrer qu'elle est constante le long de tout mouvement.

5) Etablir que le moment cinétique $\vec{J}_{\vec{R}}$ du système par rapport au centre de masse \vec{R} est constant le long de tout mouvement.

6) Calculer $\vec{J}_{\vec{R}}$ comme vecteur de \mathbb{R}^3 , en ajoutant une troisième coordonnée perpendiculaire au plan du mouvement, en terme de $\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$.

7) Dédire de 4), 5) et 6) que le centre de masse \vec{R} satisfait les équations du mouvement d'un pendule simple

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin\theta.$$

8) Le moment cinétique du système par rapport à l'origine est-il une constante du mouvement ? Justifier votre réponse.

Chapitre 4

Repères cartésiens non inertiels

4.1 Forces fictives

Dans ce chapitre nous utiliserons constamment que le produit vectoriel défini en (3.42) de deux vecteurs

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

donné par

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{q} = \begin{pmatrix} \Omega_2 q_3 - \Omega_3 q_2 \\ \Omega_3 q_1 - \Omega_1 q_3 \\ \Omega_1 q_2 - \Omega_2 q_1 \end{pmatrix},$$

peut s'écrire sous forme d'un produit matriciel

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{q} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Nous noterons Ω (sans flèche) la matrice antisymétrique associée au vecteur $\vec{\Omega}$ (avec flèche) :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Considérons un repère inertiel $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ orthonormé direct et un autre repère orthonormé $(\vec{p}(t), \vec{f}_1(t), \vec{f}_2(t), \vec{f}_3(t))$ de même orientation, dont l'origine et les directions varient au cours du temps, où $\vec{p}(t)$ et $\vec{f}_i(t), 1 \leq i \leq 3$, sont des fonctions de classe \mathcal{C}^2 , comme sur la Figure 1 ci-dessous.

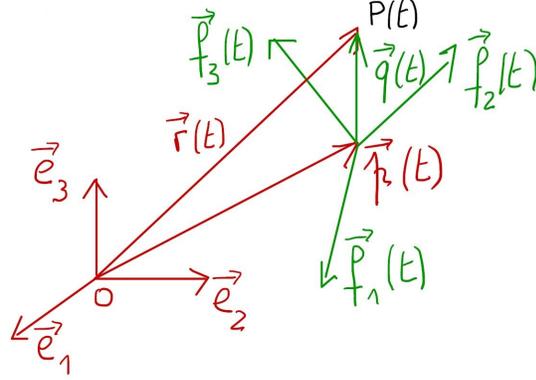


Figure 1.

Soit $P(t)$ un point matériel mobile. Si l'on note $\vec{r}(t)$ les coordonnées de $P(t)$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $\vec{q}(t)$, les coordonnées de $P(t)$ dans la base $(\vec{f}_1(t), \vec{f}_2(t), \vec{f}_3(t))$, on a

$$\vec{r}(t) = \vec{p}(t) + A(t)\vec{q}(t), \quad (4.2)$$

avec $A(t)$ une matrice de rotation

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $\vec{f}_i(t), 1 \leq i \leq 3$, (translatés en O) dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$,

$$\vec{f}_i(t) = \begin{pmatrix} a_{1i}(t) \\ a_{2i}(t) \\ a_{3i}(t) \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Puisque $A(t)$ est une rotation

$$A^T(t)A(t) = I, \forall t \Rightarrow A^T(t)\dot{A}(t) + \dot{A}(t)^T A(t) = 0, \forall t. \quad (4.4)$$

L'équation (4.4) signifie que la matrice $A^T(t)\dot{A}(t)$ est antisymétrique. On peut donc l'écrire sous la forme

$$\Omega(t) \equiv A^T(t)\dot{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3(t) & \Omega_2(t) \\ \Omega_3(t) & 0 & -\Omega_1(t) \\ -\Omega_2(t) & \Omega_1(t) & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Lemme 4.1.1. *Si l'on note $\Omega_{ij}(t)$, $1 \leq i, j \leq 3$, les entrées de la matrice antisymétrique $\Omega(t)$ définie en (4.5), alors*

$$\frac{d}{dt} \vec{f}_i(t) = \Omega_{1i}(t) \vec{f}_1(t) + \Omega_{2i}(t) \vec{f}_2(t) + \Omega_{3i}(t) \vec{f}_3(t). \quad (4.6)$$

Démonstration. Cela résulte immédiatement de l'équation

$$\dot{A}(t) = A(t) \left(A^T(t) \dot{A}(t) \right),$$

qui en vertu de la définition (4.5) s'écrit

$$\dot{A}(t) = A(t) \Omega(t),$$

ce qui, en écrivant l'équation colonne par colonne, donne (4.6). \square

Puisque

$$\vec{f}_i(t) \wedge \vec{f}_j(t) = \vec{f}_k(t),$$

pour toute permutation cyclique (i, j, k) de $(1, 2, 3)$, on vérifie facilement que (4.6) peut s'écrire comme suit

$$\dot{\vec{f}}_i(t) = \left(\Omega_1(t) \vec{f}_1(t) + \Omega_2(t) \vec{f}_2(t) + \Omega_3(t) \vec{f}_3(t) \right) \wedge \vec{f}_i(t), \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Pour cette raison on introduit la définition suivante.

Définition 4.1.2. *Le vecteur*

$$\vec{\Omega}(t) = \begin{pmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ \Omega_3(t) \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

associé à la matrice (4.5) est appelé vecteur de rotation instantanée, exprimé dans les coordonnées de la base $(\vec{f}_1(t), \vec{f}_2(t), \vec{f}_3(t))$.

De même

$$A(t)A^T(t) = I, \forall t \Rightarrow A(t)\dot{A}^T(t) + \dot{A}(t)A^T(t) = 0, \forall t,$$

et donc la matrice $\dot{A}(t)A^T(t)$ est aussi antisymétrique. On pose

$$\omega(t) \equiv \dot{A}(t)A^T(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Définition 4.1.3. *Le vecteur*

$$\vec{\omega}(t) = \begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \omega_3(t) \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

s'appelle le vecteur de rotation instantanée, exprimé dans les coordonnées de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

La terminologie "exprimé dans les coordonnées de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ " est justifiée par le lemme suivant.

Lemme 4.1.4. *On a*

$$\vec{\omega}(t) = A(t)\vec{\Omega}(t), \quad (4.10)$$

où $A(t)$ est défini en (4.3) et $\vec{\Omega}(t)$ en (4.7).

Démonstration. En omettant d'écrire explicitement la dépendance en t , on a

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \omega \vec{r} = \dot{A}A^T \vec{r},$$

et donc en appliquant A^T aux deux membres de cette équation

$$A^T(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = A^T \dot{A}A^T \vec{r} = \Omega A^T \vec{r} = \vec{\Omega} \wedge A^T \vec{r}.$$

En appliquant cette fois A aux deux membres de cette équation, en utilisant (3.44), on obtient

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r} = A(\vec{\Omega} \wedge A^T \vec{r}) = A\vec{\Omega} \wedge AA^T \vec{r} = A\vec{\Omega} \wedge \vec{r},$$

et donc

$$(\vec{\omega} - A\vec{\Omega}) \wedge \vec{r} = 0, \forall \vec{r} \Leftrightarrow \vec{\omega} - A\vec{\Omega} = 0.$$

□

Exemple. On considère une sphère (la Terre par exemple) tournant à vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$ autour d'un axe vertical. On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un repère orthonormé dont l'origine O est au centre de la Terre, et ne tournant pas avec celle-ci. Soit $(\vec{f}_1(t), \vec{f}_2(t), \vec{f}_3(t))$ un repère orthonormé attaché en un point $\vec{p}(t)$ à la surface de la Terre situé à la latitude λ , avec $\vec{f}_1(t)$ tangent au méridien passant par $\vec{p}(t)$ dans la direction du Sud, $\vec{f}_2(t)$ tangent au parallèle passant par $\vec{p}(t)$ dans la direction de l'Est, et $\vec{f}_3(t)$ perpendiculaire à la sphère, comme sur la Figure 2, ci-dessous. Pour déterminer $A(t)$ on introduit le repère orthonormé intermédiaire $(\vec{g}_1(t), \vec{g}_2(t), \vec{g}_3)$ obtenu par une rotation du repère $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ d'angle $\theta(t)$ autour de la verticale. On a

$$\begin{aligned} A(t) &= (\vec{f}_1(t), \vec{f}_2(t), \vec{f}_3(t)) \\ &= (\vec{g}_1(t), \vec{g}_2(t), \vec{g}_3) \begin{pmatrix} \sin \lambda & 0 & \cos \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \lambda & 0 & \sin \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) & 0 \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \lambda & 0 & \cos \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \lambda & 0 & \sin \lambda \end{pmatrix} \\ &\equiv A_1(t)A_2. \end{aligned}$$

Un simple calcul fournit

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \dot{A}(t)A^T(t) \\ &= \dot{A}_1(t)A_2A_2^T A_1^T \\ &= \dot{A}_1(t)A_1^T \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta}(t) & 0 \\ \dot{\theta}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et donc, en vertu de (4.8) et (4.9), on a

$$\vec{\omega}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix}.$$

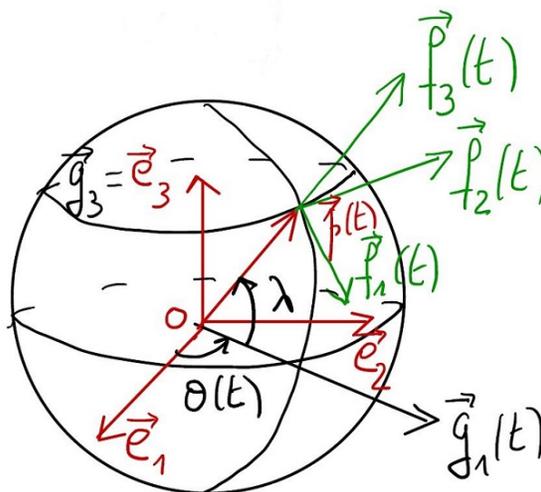


Figure 2.

Notons que dans cet exemple la rotation de la base $(\vec{f}_1(t), \vec{f}_2(t), \vec{f}_3(t))$ se fait (constamment) autour de l'axe vertical \vec{e}_3 , à la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$ et que $\vec{\omega}(t) = \dot{\theta}(t)\vec{e}_3$. Le même vecteur, réexprimé dans la base $(\vec{f}_1(t), \vec{f}_2(t), \vec{f}_3(t))$ a donc, conformément à (4.10), pour coordonnées

$$\vec{\Omega}(t) = A^T(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}(t) \cos \lambda \\ 0 \\ \dot{\theta}(t) \sin \lambda \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Nous allons voir que cet exemple illustre un résultat général sauf que, dans le cas général, la direction de ce vecteur n'est plus constante, d'où la terminologie "vecteur de rotation instantanée".

L'équation (4.8) permet de comprendre la signification du vecteur de rotation instantanée $\vec{\omega}(t)$.

Proposition 4.1.5. *A chaque instant t , $\vec{\omega}(t)$ est un vecteur, exprimé dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, tel que le mouvement infinitésimal (pendant un temps très court Δt) de chaque $\vec{f}_i(t)$, $1 \leq i \leq 3$, est une rotation en sens direct autour de $\vec{\omega}(t)$ d'un angle $\|\vec{\omega}(t)\|\Delta t$.*

Démonstration. En se rappelant que les colonnes de la matrice $A(t)$ sont les coordonnées des vecteurs $\vec{f}_i(t)$, $1 \leq i \leq 3$, dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, l'équation

(4.8) est équivalente à

$$\begin{aligned} \dot{A}(t) &= \omega(t)A(t) \\ \Leftrightarrow \dot{\vec{f}}_i(t) &= \omega(t)\vec{f}_i(t), 1 \leq i \leq 3, \\ \Leftrightarrow \dot{\vec{f}}_i(t) &= \vec{\omega}(t) \wedge \vec{f}_i(t), 1 \leq i \leq 3, \end{aligned} \quad (4.12)$$

où, dans la dernière équation, on a utilisé (4.1).

Dire que le mouvement instantané de $\vec{f}_i(t)$ est une rotation en sens direct autour de $\vec{\omega}(t)$ signifie que

$$\dot{\vec{f}}_i(t) = \|\dot{\vec{f}}_i(t)\| \frac{\vec{\omega}(t) \wedge \vec{f}_i(t)}{\|\vec{\omega}(t) \wedge \vec{f}_i(t)\|}. \quad (4.13)$$

Sur la Figure 3, on voit que la distance de $\vec{f}_i(t)$ à l'axe de rotation $\vec{\omega}(t)$ est $\|\vec{f}_i(t)\| \sin \alpha$ avec $0 < \alpha < \pi$, l'angle entre $\vec{\omega}(t)$ et $\vec{f}_i(t)$. Dire que la vitesse angulaire de la rotation autour de $\vec{\omega}(t)$ est $\|\vec{\omega}(t)\|$ signifie donc que

$$\|\dot{\vec{f}}_i(t)\| = \|\vec{f}_i(t)\| \sin \alpha \|\vec{\omega}(t)\| = \sin \alpha \|\vec{\omega}(t)\|,$$

puisque $\|\vec{f}_i(t)\| = 1$. En substituant dans (4.13), on obtient

$$\dot{\vec{f}}_i(t) = \sin \alpha \|\vec{\omega}(t)\| \frac{\vec{\omega}(t) \wedge \vec{f}_i(t)}{\|\vec{\omega}(t)\| \|\vec{f}_i(t)\| \sin \alpha} = \vec{\omega}(t) \wedge \vec{f}_i(t),$$

ce qui est précisément l'équation (4.12) et établit donc le résultat.

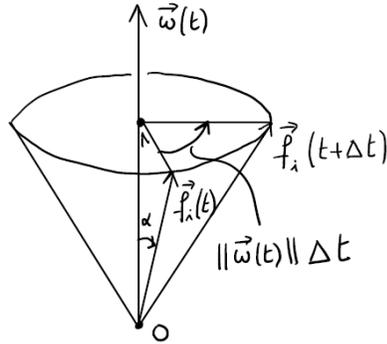


Figure 3.

□

Dans les calculs qui suivent on ne note pas la dépendance explicite en t de $\vec{r}(t)$, $\vec{q}(t)$, $A(t)$, $\Omega(t)$, $\vec{\Omega}(t)$. En dérivant (4.2), et en utilisant (4.1) et (4.5), on obtient la

Loi de composition des vitesses :

$$\begin{aligned}
 \dot{\vec{r}} &= \dot{\vec{p}} + \dot{A}\vec{q} + A\dot{\vec{q}}, \\
 &= \dot{\vec{p}} + AA^T \dot{A}\vec{q} + A\dot{\vec{q}}, \\
 &= \dot{\vec{p}} + A\Omega\vec{q} + A\dot{\vec{q}}, \\
 &= \dot{\vec{p}} + A(\vec{\Omega} \wedge \vec{q}) + A\dot{\vec{q}},
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

que l'on écrit

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}_{ent} + \vec{v}_{rel},$$

avec

$$\begin{aligned}
 \vec{v}_{ent} &= \dot{\vec{p}} + A(\vec{\Omega} \wedge \vec{q}) \quad (\text{vitesse d'entraînement}), \\
 \vec{v}_{rel} &= A\dot{\vec{q}} \quad (\text{vitesse relative}).
 \end{aligned}$$

En dérivant (4.14), on obtient la

Loi de composition des accélérations :

$$\begin{aligned}
 \ddot{\vec{r}} &= \ddot{\vec{p}} + \dot{A}(\vec{\Omega} \wedge \vec{q}) + A(\dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{q} + \vec{\Omega} \wedge \dot{\vec{q}}) + \dot{A}\dot{\vec{q}} + A\ddot{\vec{q}}, \\
 &= \ddot{\vec{p}} + AA^T \dot{A}(\vec{\Omega} \wedge \vec{q}) + A(\dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{q} + \vec{\Omega} \wedge \dot{\vec{q}}) + AA^T \dot{A}\dot{\vec{q}} + A\ddot{\vec{q}}, \\
 &= \ddot{\vec{p}} + A\Omega(\vec{\Omega} \wedge \vec{q}) + A(\dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{q}) + A(\vec{\Omega} \wedge \dot{\vec{q}}) + A\Omega\dot{\vec{q}} + A\ddot{\vec{q}}, \\
 &= \ddot{\vec{p}} + A(\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{q})) + A(\dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{q}) + 2A(\vec{\Omega} \wedge \dot{\vec{q}}) + A\ddot{\vec{q}},
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

que l'on écrit

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a}_{ent} + \vec{a}_{cor} + \vec{a}_{rel},$$

avec

$$\begin{aligned}
 \vec{a}_{ent} &= \ddot{\vec{p}} + A(\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{q}) + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{q}) \quad (\text{accélération d'entraînement}), \\
 \vec{a}_{cor} &= 2A(\vec{\Omega} \wedge \dot{\vec{q}}) \quad (\text{accélération de Coriolis}), \\
 \vec{a}_{rel} &= A\ddot{\vec{q}} \quad (\text{accélération relative}).
 \end{aligned}$$

Supposons que le point matériel $P(t)$ de coordonnées $\vec{r}(t)$ dans le repère inertiel $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ satisfait l'équation de Newton

$$m \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(t, \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)). \quad (4.16)$$

En substituant (4.15) dans (4.16) on obtient

$$m \ddot{\vec{p}} + A(m \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{q}) + m \dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{q} + 2m \vec{\Omega} \wedge \dot{\vec{q}} + m \ddot{\vec{q}}) = \vec{F}.$$

En multipliant les deux membres de cette équation par A^T , puisque $A^T A = I$, en isolant le terme en $\ddot{\vec{q}}$ dans le membre de gauche, on trouve

$$\begin{aligned} m \ddot{\vec{q}} &= A^T \vec{F} \quad (\text{force réelle}) \\ &- m A^T \ddot{\vec{p}} \quad (\text{force fictive due à l'accélération de l'origine}) \\ &- m \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{q}) \quad (\text{force centrifuge}) \\ &- m \dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{q} \quad (\text{force fictive due à l'accélération de la rotation}) \\ &- 2 m \vec{\Omega} \wedge \dot{\vec{q}} \quad (\text{force de Coriolis}). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Tout se passe donc comme si on pouvait écrire une équation de Newton dans le système de coordonnées cartésiennes non inertiel, en ajoutant des forces à la force réelle $A^T \vec{F}$, qui est un vecteur géométriquement identique à \vec{F} , mais réexprimé dans la base mobile $(\vec{f}_1(t), \vec{f}_2(t), \vec{f}_3(t))$. Les forces que l'ont doit ajouter s'appellent des forces fictives, on les appelle parfois aussi des forces d'inertie. Certaines ont un nom précis, comme la force centrifuge et la force de Coriolis. La terminologie "forces fictives" est plus adéquate que "forces d'inertie", car elle rappelle que les forces fictives disparaissent dans un système de coordonnées inertiel, tandis que les forces réelles (physiques) ne disparaissent jamais par un changement de coordonnées.

Dans le cas où la transformation (4.2) est galiléenne, on a

$$\begin{aligned} \vec{p}(t) = \vec{b}t + \vec{c} &\Leftrightarrow \ddot{\vec{p}}(t) = 0, \\ \dot{A}(t) = 0 &\Leftrightarrow \Omega(t) = A^T(t)\dot{A}(t) = 0 \Leftrightarrow \vec{\Omega}(t) = 0. \end{aligned}$$

L'équation (4.17) se réduit dans ce cas à

$$m \ddot{\vec{q}} = A^T \vec{F},$$

ce qui signifie que sous une transformation galiléenne, on ajoute pas de forces, les forces sont seulement réexprimées dans les nouvelles coordonnées. On montrera aux exercices que cette propriété caractérise les transformations galiléennes.

4.2 Influence de la rotation diurne de la Terre

On sait qu'un système d'axes centré sur le Soleil et passant par certaines étoiles est un très bon système galiléen (le principe d'inertie, 1^{ère} loi de Newton, y est très bien vérifié). Mais *quid* d'un repère fixé à la Terre? La Terre n'est pas animée d'un mouvement de translation uniforme par rapport au repère galiléen centré au Soleil, mais d'un mouvement de révolution autour du Soleil et d'un mouvement de rotation sur elle-même. Si le repère attaché à la Terre tourne avec celle-ci seulement dans son mouvement autour du Soleil (on dit alors que c'est un repère géocentrique), mais sans être solidaire de son mouvement de rotation diurne, ce repère est encore "assez" galiléen (on assimile l'orbite elliptique de la Terre à une droite parcourue à une vitesse uniforme). Il l'est nettement moins s'il tourne en plus avec la Terre autour de son axe. En toute rigueur donc, le principe d'inertie ne s'applique pas à un mouvement repéré par rapport à des axes fixés sur la Terre et qui tournent avec elle. En conséquence, un corps en chute libre (sans force, autre que la pesanteur, exercée sur lui) ne décrit pas exactement une ligne droite dans un repère solidaire de la Terre. En fait la déviation est minuscule pour de petits trajets. Il faut une chute assez longue, *expérience de Reich 1831* sur la chute libre dans un puits de 158.5 m, ou la répétition de petits mouvements, *expérience du pendule de Foucault en 1851*, pour mettre cette déviation en évidence. Dans ce chapitre, nous allons examiner ces deux expériences, qui mettent en évidence le mouvement diurne de rotation de la Terre.

4.2.1 Expérience de Reich

Cette expérience délicate a été faite en 1831 dans un puits de mine profond à Fribourg en Saxe. On laisse tomber une pierre dans un puits (profond!) de 158.5 m de profondeur. Reich a mesuré une déviation vers l'Est par rapport à la verticale de 2.83 cm. Le calcul simplifié que nous allons faire d'une masse m lâchée sans vitesse initiale donne une déviation vers l'Est de 2.75 cm.

Nous choisissons un repère cartésien non inertiel tournant avec la Terre,

$(\vec{p}(t), \vec{f}_1(t), \vec{f}_2(t), \vec{f}_3(t))$, comme dans la Section 4.1, Figure 2. Le point $\vec{p}(t)$ est situé à la surface de la Terre à la latitude λ , et tourne d'Ouest en Est avec elle à une vitesse angulaire

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600} \text{ rad/sec} = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ rad/sec.} \quad (4.18)$$

$\vec{f}_1(t)$ est tangent au méridien passant par $\vec{p}(t)$ et pointe dans la direction du Sud, $\vec{f}_2(t)$ est tangent au parallèle passant par $\vec{p}(t)$ et pointe dans la direction de l'Est, $\vec{f}_3(t)$ est orienté selon la verticale passant par $\vec{p}(t)$ comme sur la Figure 4 ci-dessous (vue en coupe du plan méridien).

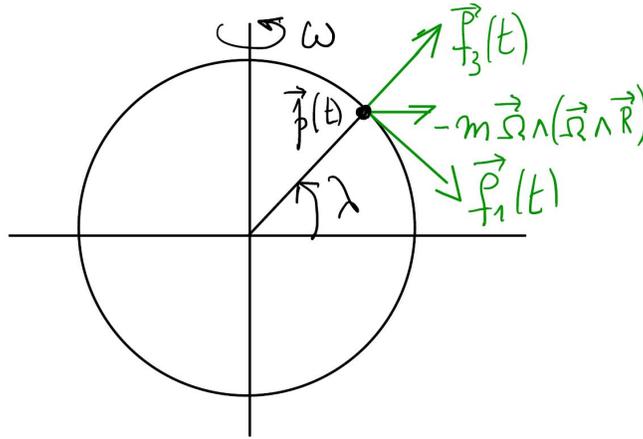


Figure 4.

L'équation du mouvement d'une masse m au voisinage de la Terre de coordonnées $\vec{q}(t)$, soumise uniquement à la gravitation, dans ce repère est donnée par

$$m\ddot{\vec{q}} = A^T \vec{F} - mA^T \ddot{\vec{p}} - m\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{q}) - 2m\vec{\Omega} \wedge \dot{\vec{q}}, \quad (4.19)$$

où $\vec{\Omega}$, le vecteur de rotation instantanée, calculé en (4.11) avec $\dot{\theta}(t) = \omega$, est donné par

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} -\omega \cos \lambda \\ 0 \\ \omega \sin \lambda \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Notons que $\vec{\Omega}$ donné en (4.20) est indépendant du temps (puisque la vitesse de rotation angulaire de la Terre est constante), ce qui explique l'absence du terme $-m\dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{q}$ dans l'équation (4.19). On pose

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix},$$

où $R = 6.4 \cdot 10^6 \text{ m}$ dénote le rayon de la Terre. Puisque

$$\vec{p} = R\vec{f}_3 = RA\vec{e}_3 = A(R\vec{e}_3) = A\vec{R}, \quad (4.21)$$

on a

$$\vec{r} = \vec{p} + A\vec{q} = A(\vec{R} + \vec{q}),$$

où \vec{r} dénote les coordonnées de la pierre dans un repère inertiel, avec pour origine le centre de la Terre et ne tournant pas avec celle-ci. De là

$$\vec{F} = -\frac{GmM\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} \Rightarrow A^T\vec{F} = -\frac{GmM(\vec{R} + \vec{q})}{\|A(\vec{R} + \vec{q})\|^3} = -\frac{GmM(\vec{R} + \vec{q})}{\|\vec{R} + \vec{q}\|^3}.$$

En dérivant deux fois (4.21), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}} &= \dot{A}\vec{R} = AA^T\dot{A}\vec{R} = A\Omega\vec{R} = A(\vec{\Omega} \wedge \vec{R}), \\ \ddot{\vec{p}} &= \dot{A}(\vec{\Omega} \wedge \vec{R}) = AA^T\dot{A}(\vec{\Omega} \wedge \vec{R}) = A\Omega(\vec{\Omega} \wedge \vec{R}) = A(\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{R})), \end{aligned}$$

et donc

$$-mA^T\ddot{\vec{p}} = -m\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{R}).$$

On définit la pesanteur apparente par

$$\vec{g} = -\frac{GM(\vec{R} + \vec{q})}{\|\vec{R} + \vec{q}\|^3} - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge (\vec{R} + \vec{q})). \quad (4.22)$$

L'équation du mouvement (4.19) dans le repère lié à la Terre s'écrit donc

$$m\ddot{\vec{q}} = m\vec{g} - 2m\vec{\Omega} \wedge \dot{\vec{q}}. \quad (4.23)$$

La pesanteur apparente (4.22) se compose de deux termes, le premier représente la force réelle de pesanteur, et le deuxième est un terme centrifuge qui modifie la pesanteur du fait qu'elle est mesurée dans un repère non

inertiel. Comme \vec{q} est très petit par rapport à \vec{R} dans le repère de la Terre (mouvement au voisinage de la surface de la Terre), on peut le négliger, de sorte que \vec{q} peut être considéré constant en première approximation. En notant $g_0 = \frac{GM}{R^2} = 9.81 \text{ m/sec}^2$, la pesanteur Terrestre, on obtient

$$\begin{aligned}\vec{g} &= -\frac{GM\vec{R}}{\|\vec{R}\|^3} - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{R}), \\ &= -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g_0 \end{pmatrix} - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{R}), \\ &= \begin{pmatrix} \omega^2 R \sin\lambda \cos\lambda \\ 0 \\ -g_0 + \omega^2 R \cos^2\lambda \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (4.24)$$

La norme du terme centrifuge vaut

$$\|\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{R})\| = \|\vec{\Omega}\| \|\vec{\Omega} \wedge \vec{R}\| = \omega^2 R \cos\lambda,$$

elle est maximale à l'équateur (quand $\lambda = 0$), c'est à l'équateur que l'on est le moins lourd sur la balance !

Dans le cas de la chute d'une pierre dans un puits, on voit facilement géométriquement que *la force de Coriolis* $-2m\vec{\Omega} \wedge \dot{\vec{q}}$ dans l'équation (4.23) est dirigée dans la direction de $\vec{f}_2(t)$. C'est ce terme qui est responsable de la déviation de la pierre vers l'Est, lors de sa chute.

Pour calculer précisément cette déviation, il faut résoudre l'équation différentielle (4.23) avec les conditions initiales au temps $t = 0$:

$$\vec{q}(0) = 0, \quad \dot{\vec{q}}(0) = 0, \quad (4.25)$$

puisque, à l'instant initial $t = 0$, la pierre est en $\vec{p}(t)$ (sommet du puits, $\vec{q}(0) = 0$), avec une vitesse initiale nulle par rapport au repère $(\vec{f}_1(t), \vec{f}_2(t), \vec{f}_3(t))$, c'est-à-dire $\dot{\vec{q}}(0) = 0$. Comme $\vec{\Omega}$ défini en (4.20) est indépendant du temps, on peut écrire (4.23) comme suit :

$$\ddot{\vec{q}}(t) = \vec{g} - 2\frac{d}{dt}(\vec{\Omega} \wedge \vec{q}(t)).$$

En intégrant cette équation de 0 à t , comme en vertu de (4.24) \vec{g} est un vecteur constant, en tenant compte des conditions initiales (4.25), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\vec{q}}(t) &= \vec{g}t - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{q}(t), \quad \vec{q}(0) = 0 \\ &\Downarrow \\ \vec{q}(t) &= \frac{\vec{g}t^2}{2} - 2 \int_0^t \vec{\Omega} \wedge \vec{q}(s) ds. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Nous allons approcher la solution de cette équation par la méthode dite des approximations successives, qui est vue dans le cours d'équations différentielles ordinaires, en nous limitant à une itération. Il est naturel, en négligeant le terme de Coriolis, de prendre pour première approximation

$$\vec{q}_1(t) = \frac{\vec{g}t^2}{2}.$$

La deuxième approximation est obtenue en substituant la première approximation $\vec{q}_1(s)$ pour $\vec{q}(s)$ dans le membre de droite de (4.26), soit

$$\vec{q}_2(t) = \frac{t^2}{2}\vec{g} - \int_0^t \vec{\Omega} \wedge \vec{g}s^2 ds = \frac{t^2}{2}\vec{g} - \frac{t^3}{3}\vec{\Omega} \wedge \vec{g},$$

et ainsi de suite. On démontre que le processus d'itération est convergent. En deuxième approximation la solution est donc donnée par

$$\vec{q}(t) = \frac{t^2}{2}\vec{g} + \frac{t^3}{3}\vec{g} \wedge \vec{\Omega}. \quad (4.27)$$

En utilisant (4.20) et (4.24), on calcule explicitement la solution trouvée en (4.27). En notant $\vec{q}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$, on obtient

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} \omega^2 R \sin\lambda \cos\lambda \\ 0 \\ -g_0 + \omega^2 R \cos^2\lambda \end{pmatrix} + \frac{t^3}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ g_0 \omega \cos\lambda - \omega^3 R \cos\lambda \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \omega^2 R \cos^2\lambda &\leq \omega^2 R = g_0 \frac{\omega^2 R}{g_0} = g_0 \frac{(7.3 \cdot 10^{-5})^2 (6.4 \cdot 10^6)}{9.81} = 0.003 g_0, \\ \omega^3 R \cos\lambda &= g_0 \omega \cos\lambda \frac{\omega^2 R}{g_0} = 0.003 g_0 \omega \cos\lambda, \end{aligned}$$

et que ces termes sont donc négligeables dans (4.28). On trouve donc

$$y(t) = \frac{t^3}{3} g_0 \omega \cos\lambda, \quad z(t) = -\frac{g_0 t^2}{2}.$$

Si l'on note T le temps de chute dans un puits de profondeur h on obtient donc

$$-g_0 \frac{T^2}{2} = -h \Rightarrow T = \sqrt{\frac{2h}{g_0}},$$

ce qui conduit à la formule explicite pour déviation vers l'Est

$$y(T) = \frac{T^3}{3} g_0 \omega \cos\lambda = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{g_0}} h^{3/2} \omega \cos\lambda.$$

Numériquement, en prenant $h = 158,5 \text{ m}$, $\lambda = 51$ et $g_0 = 9.81 \text{ m/s}^2$, on trouve $y(T) = 2,75 \text{ cm}$.

4.2.2 Le pendule de Foucault

Cette expérience historique fut réalisée en 1851 au Panthéon (à Paris) avec un pendule de longueur $l = 67 \text{ m}$ et de période 16 sec environ. On constate que le plan d'oscillation du pendule tourne autour d'un axe vertical avec une période T . Il est plus difficile de rendre intuitif l'effet de la force de Coriolis dans cette expérience. Le principe d'inertie stipule que, par rapport à un repère géocentrique (donc quasi galiléen), le plan des oscillations est fixe. Plaçons, pour simplifier, le Panthéon au pôle Nord. Le repère attaché à la Terre en rotation et *par rapport auquel on fait les observations* tourne, lui, d'un tour en 24 heures. On croira donc que c'est le plan des oscillations qui tourne : en fait on le visualise dans un repère tournant et qui nous semble fixe puisque nous y sommes attachés. On comprend donc qu'au pôle Nord le plan d'oscillation du pendule de Foucault fait un tour complet, dans le sens horloger (puisque la Terre tourne d'Ouest en Est), en 24 heures. Nous allons faire le calcul dans le cas général.

On considère un repère mobile $(\vec{f}_1(t), \vec{f}_2(t), \vec{f}_3(t))$ avec origine $\vec{p}(t)$, le point de suspension du pendule au toit du Panthéon à Paris. Le vecteur $\vec{f}_3(t)$ est choisi dans la direction de la pesanteur apparente, c'est-à-dire $\vec{f}_3(t) = -\vec{g}/\|\vec{g}\|$, avec \vec{g} la pesanteur apparente définie comme en (4.24). Le vecteur $\vec{f}_2(t)$ est orienté vers l'Est suivant la tangente au parallèle passant par le

point $\vec{p}(t)$, et le vecteur $\vec{f}_1(t)$ est orthogonal aux deux précédents et pointe dans la direction du Sud. Notons l la longueur du pendule de Foucault, ω la vitesse angulaire de rotation de la Terre, φ la latitude céleste du point $\vec{p}(t)$ (pratiquement égale à la latitude géocentrique λ), voir la Figure 5 ci-dessous (l'écart entre la direction de la verticale géométrique est très exagéré par rapport à la direction de la pesanteur apparente). L'équation du mouvement est obtenue exactement comme dans le cas de la chute d'une pierre dans un puits (4.23), sauf qu'il faut rajouter à la force réelle $A^T \vec{F}$, la force de tension dans le câble de suspension du pendule. Cette force s'exprime comme suit dans les coordonnées de la base mobile

$$-T \frac{\vec{q}(t)}{\|\vec{q}(t)\|} = -T \frac{\vec{q}(t)}{l},$$

où $\vec{q}(t)$ dénote les coordonnées du pendule, et T la tension. On obtient donc l'équation suivante pour le mouvement du pendule

$$m\ddot{\vec{q}} = -T \frac{\vec{q}}{l} + m\vec{g} - 2m\vec{\Omega} \wedge \dot{\vec{q}}. \quad (4.29)$$

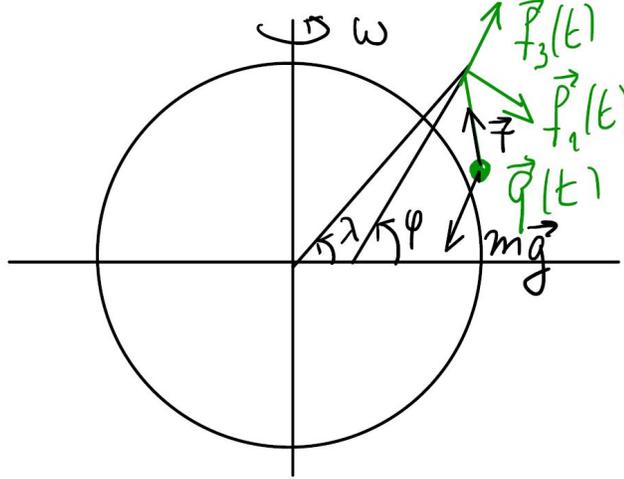


Figure 5.

En notant $\vec{q}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ et $\vec{g} = (0, 0, -g)^T$, avec $g = \|\vec{g}\|$, la norme de la pesanteur apparente, l'équation (4.29) s'écrit

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = -\frac{T}{l} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} - 2m \begin{pmatrix} -\omega \cos\varphi \\ 0 \\ \omega \sin\varphi \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}.$$

En évaluant le produit vectoriel, et en divisant les deux membres de l'équation par m , on trouve

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= -\frac{T}{ml} x(t) + 2 \dot{y}(t) \omega \sin\varphi, \\ \ddot{y}(t) &= -\frac{T}{ml} y(t) - 2 \dot{x}(t) \omega \sin\varphi - 2 \dot{z}(t) \omega \cos\varphi, \\ \ddot{z}(t) &= -\frac{T}{ml} z(t) - g + 2 \dot{y}(t) \omega \cos\varphi.\end{aligned}$$

Si on considère des oscillations "infinitement petites", on peut poser $z(t) = l, \forall t$. Dans cette approximation, les deux premières équations s'écrivent

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= -\frac{T}{ml} x(t) + 2 \dot{y}(t) \omega \sin\varphi, \\ \ddot{y}(t) &= -\frac{T}{ml} y(t) - 2 \dot{x}(t) \omega \sin\varphi.\end{aligned}$$

En multipliant la première équation par $y(t)$ et la seconde par $-x(t)$ et en additionnant, on obtient

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t)y(t) - \ddot{y}(t)x(t) &= 2\omega \sin\varphi (\dot{y}(t)y(t) + \dot{x}(t)x(t)) \\ &\Downarrow \\ \frac{d}{dt} (\dot{x}(t)y(t) - \dot{y}(t)x(t)) &= \omega \sin\varphi \frac{d}{dt} (x^2(t) + y^2(t)).\end{aligned}\quad (4.30)$$

L'équation (4.30) est équivalente à

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (\dot{x}(t)y(t) - \dot{y}(t)x(t) - \omega \sin\varphi (x^2(t) + y^2(t))) &= 0 \\ &\Downarrow \\ \dot{x}(t)y(t) - \dot{y}(t)x(t) - \omega \sin\varphi (x^2(t) + y^2(t)) &= C,\end{aligned}\quad (4.31)$$

où C est une constante indépendante du temps. En introduisant des coordonnées polaires dans le plan horizontal

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta,$$

un simple calcul donne que (4.31) s'écrit

$$-\rho^2(t) \dot{\theta}(t) - \omega \rho^2(t) \sin\varphi = C.$$

On peut supposer sans perte de généralité que $\rho(0) = 0$ et donc $C = 0$, d'où

$$\dot{\theta}(t) = -\omega \sin\varphi \Rightarrow \theta(t) = -\omega t \sin\varphi + \theta(0).$$

Notons T le temps que met le plan d'oscillation du pendule de Foucault à faire un tour complet. Dans l'hémisphère Nord, $\sin\varphi > 0$. Le plan d'oscillation tourne donc dans le sens horloger et l'on a

$$\theta(T) - \theta(0) = -2\pi \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega \sin\varphi}.$$

Par contre dans l'hémisphère Sud, $\sin\varphi < 0$, le plan d'oscillation du pendule de Foucault tourne donc dans le sens anti-horloger et l'on a

$$\theta(T) - \theta(0) = 2\pi \Leftrightarrow T = -\frac{2\pi}{\omega \sin\varphi}.$$

Puisque $\frac{2\pi}{\omega} = 24$ heures, on trouve dans tous les cas

$$T = \frac{24}{|\sin\varphi|} \text{ heures.}$$

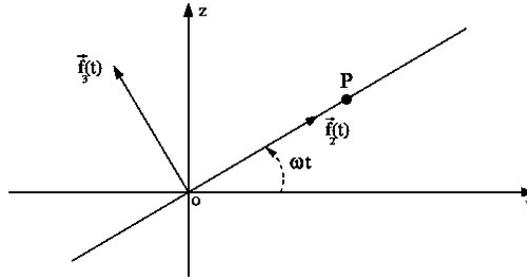
Aux pôles $|\sin\varphi| = 1$ et le plan d'oscillation du pendule de Foucault fait une tour complet en 24 heures, comme on pouvait s'y attendre intuitivement. A l'équateur $\sin\varphi = 0$ et le plan d'oscillation ne tourne pas. A Paris, $\varphi = 4851'$, le plan d'oscillation du pendule de Foucault fait une rotation complète en 32 heures.

4.3 Exercices

1. Un pendule simple est attaché au toit d'une voiture qui suit une route rectiligne avec une accélération $\|\vec{a}\| = a_0$. Le pendule peut osciller dans le plan vertical passant par la route. Donner l'équation du mouvement du pendule et montrer qu'il peut rester en équilibre dans la voiture en faisant un angle $\alpha = \arctg(-a_0/g)$ avec la verticale descendante.

2. Dans le champ de pesanteur, une tige infinie tourne dans un plan vertical Oyz autour d'un axe horizontal passant par O perpendiculaire à ce plan (axe Ox), avec une vitesse angulaire constante ω . Une perle P de masse m , assimilée à un point matériel, enfilée sur la tige se déplace sans frottement

sur celle-ci. On note $\vec{q}(t) = (0, r(t), 0)$ les coordonnées de la perle dans un repère mobile orthonormé $\vec{f}_1, \vec{f}_2(t), \vec{f}_3(t)$ d'origine O lié à la tige, avec \vec{f}_1 dans la direction de l'axe Ox et $\vec{f}_2(t)$ dans la direction de la tige.



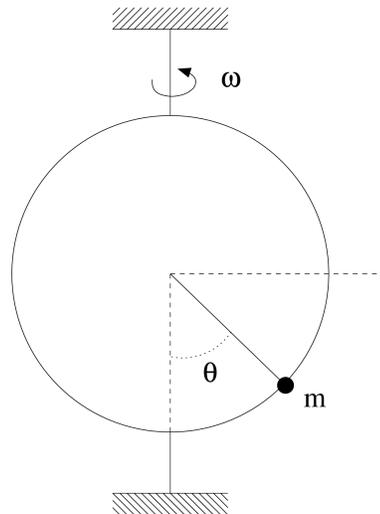
a) Ecrire la loi fondamentale de la dynamique dans les coordonnées \vec{q} . Nommer toutes les forces qui interviennent, en indiquant s'il s'agit de forces réelles ou de forces fictives.

b) En déduire la réaction de la tige dans les coordonnées \vec{q} .

c) Donner la solution générale $r(t)$ de l'équation différentielle du mouvement de la perle, en fonction des conditions initiales du mouvement.

d) Le mouvement peut-il être périodique ? asymptotiquement périodique (c'est-à-dire quand $t \rightarrow \infty$) ? Justifier.

3. Dans le champ de pesanteur, on considère une perle de masse m enfilée sur un anneau circulaire mince de rayon a . L'anneau tourne autour d'un diamètre vertical, avec une vitesse angulaire constante ω , et le mouvement est sans frottement.



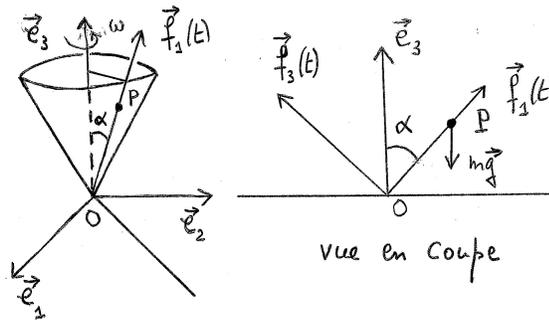
a) Choisir un repère mobile $(O, \vec{f}_1(t), \vec{f}_2(t), \vec{f}_3)$ lié à l'anneau, ayant pour origine O son centre. Donner les coordonnées de la perle dans ce repère en fonction de (a, θ) .

b) Ecrire la loi de la dynamique régissant le mouvement de la perle dans les coordonnées \vec{q} du repère mobile. Nommer toutes les forces qui interviennent et donner leur nom.

c) En déduire l'équation différentielle du mouvement de la perle en θ et la force de réaction de l'anneau exprimée dans la base mobile.

d) La perle peut-elle rester au repos sur l'anneau ?

4. Dans le champ de pesanteur, une centrifugeuse est un système qui se compose d'un tube fixé à un point O , tournant à vitesse angulaire ω constante, en sens direct, autour d'un axe vertical Oz avec lequel il fait un angle α constant. On considère l'évolution d'un point matériel P de masse m se déplaçant sans frottement à l'intérieur de ce tube.



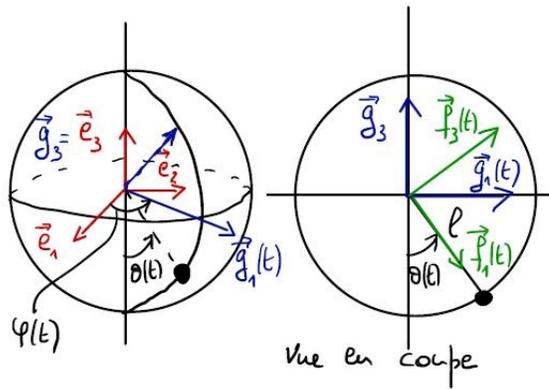
a) Soit $(O, \vec{f}_1(t), \vec{f}_2(t), \vec{f}_3(t))$ un repère mobile orthonormé direct lié au tube de même origine que le repère du laboratoire $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ supposé inertiel, avec $\vec{f}_1(t)$ dans la direction du tube. Donner les coordonnées $\vec{\Omega}$ du vecteur de rotation instantanée dans le repère mobile.

b) Notons $\vec{q}(t) = (r(t), 0, 0)^T$ les coordonnées du point P dans le repère mobile. Ecrire la loi fondamentale de la dynamique dans les coordonnées \vec{q} . Calculer explicitement les forces qui interviennent et donner leurs noms.

c) En déduire la réaction du tube dans les coordonnées \vec{q} .

d) Trouver la solution générale $r(t)$ de l'équation du mouvement du point P dans le tube. Le point P peut-il rester fixe dans le tube ? Justifier votre réponse.

5. Un pendule sphérique est le mouvement sans frottement d'un point matériel de masse m sur une sphère de rayon l centrée au point d'attache O du pendule, sous l'influence de la force de gravité. On repère le pendule par ses coordonnées sphériques $\theta(t)$ et $\varphi(t)$, où $\theta(t)$ dénote l'angle que fait le pendule avec la verticale descendante et $\varphi(t)$ l'angle qui détermine le plan méridien dans lequel le pendule se trouve au temps t . Soit $\vec{f}_1(t), \vec{f}_2(t), \vec{f}_3(t)$ un repère mobile orthonormé d'orientation directe et d'origine O avec $\vec{f}_1(t)$ dans la direction du pendule, $\vec{f}_3(t)$ dans le plan méridien du pendule au temps t , et $\vec{f}_2(t)$ dans le plan perpendiculaire au plan méridien.



a) Démontrer que les coordonnées $\vec{\Omega}(t)$ du vecteur de rotation instantanée dans la base mobile sont données par

$$\vec{\Omega}(t) = \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}(t) \cos \theta(t) \\ -\dot{\theta}(t) \\ \dot{\varphi}(t) \sin \theta(t) \end{pmatrix}.$$

b) Ecrire la loi de la dynamique régissant le mouvement du pendule sphérique dans les coordonnées \vec{q} du repère mobile. Calculer explicitement les forces qui interviennent et donner leur nom.

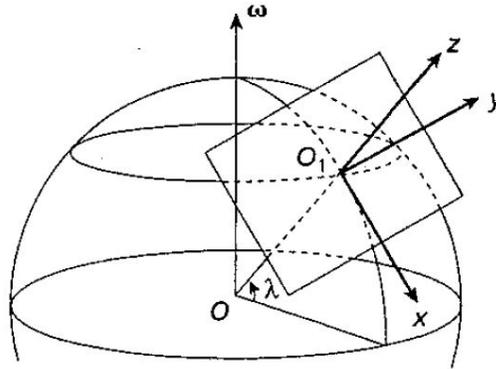
c) En déduire :

- les deux équations différentielles qui décrivent le mouvement du pendule sphérique dans les coordonnées $\theta(t), \varphi(t)$.

- la force de liaison qui maintient le pendule à son point d'attache, exprimée dans les coordonnées du repère mobile.

6. Calcul de la déviation vers l'Est dans un référentiel galiléen.

On assimile la Terre à une sphère de rayon R tournant autour de la ligne des pôles à la vitesse angulaire ω . Un point matériel M est abandonné sans vitesse initiale (pour un observateur lié à la Terre) en un point de latitude λ , depuis une hauteur h au-dessus du sol. Le mouvement est sans frottement.



On suppose que les directions Oz , O_1x et O_1y sont fixes dans l'espace, de sorte que la Terre "défile" sous le plan fixe P défini par (O_1x, O_1y) .

1) Justifier que les équations du mouvement dans le système de coordonnées O_1xyz (supposé inertiel) sont données avec une bonne approximation par

$$\ddot{x} = -g \frac{x}{R}, \quad \ddot{y} = -g \frac{y}{R}, \quad \ddot{z} = -g,$$

où R dénote le rayon de la Terre et g l'accélération de la pesanteur terrestre.

2) Quelles sont, dans le repère fixe lié à O_1xyz , les conditions initiales du mouvement ?

3) Déterminer la solution $x(t), y(t), z(t)$ des équations du mouvement correspondant à ces conditions initiales. En déduire le temps de chute T , puis $y(T)$.

4) Quelle est la distance $y_0(T)$ parcourue dans le plan P par le point de la Terre qui se trouvait initialement à la verticale de M ?

5) Calculer $\Delta y = y(T) - y_0(T)$. En utilisant le développement de Taylor de la fonction sinus autour de l'origine jusqu'à l'ordre 3, retrouver le résultat établi pour la déviation vers l'Est $\Delta y \simeq \frac{2}{3}h\sqrt{\frac{2h}{g}}\omega \cos \lambda$.

Chapitre 5

Systèmes à un degré de liberté

5.1 Solution analytique

Dans ce chapitre nous étudions les équations de la forme

$$m\ddot{x}(t) = F(x(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}, \quad (5.1)$$

où $F(x)$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 définie sur un intervalle ouvert de la droite réelle. Un tel système est toujours conservatif. En effet, on peut introduire un *potentiel*, défini à une constante additive près, comme une primitive de la force

$$V(x) = - \int_a^x F(s) ds,$$

et l'équation (5.1) peut s'écrire

$$m\ddot{x}(t) = -V'(x(t)), \quad (5.2)$$

où $V(x)$ le potentiel, est une fonction de classe \mathcal{C}^2 . L'énergie cinétique est définie par

$$T(\dot{x}) = \frac{m \dot{x}^2}{2},$$

et l'énergie totale par

$$E(x, \dot{x}) = \frac{m \dot{x}^2}{2} + V(x).$$

Le Théorème 3.2.2 du Chapitre 3 fournit le résultat suivant, qui est la clef pour l'analyse de l'équation (5.2).

Théorème 5.1.1. *L'énergie totale est constante quand elle est évaluée sur une solution du système (5.2)*

$$\frac{m}{2} \dot{x}(t)^2 + V(x(t)) = E. \quad (5.3)$$

D'un point de vue mathématique, la conservation de l'énergie ramène la solution d'une équation différentielle du deuxième ordre (5.2) à celle d'une équation du premier ordre (5.3). On peut donc résoudre le problème de Cauchy $x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = v_0$ par simple intégration. En effet,

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0 \Rightarrow E = \frac{mv_0^2}{2} + V(x_0).$$

- Supposons, pour commencer, $v_0 > 0$. Par continuité de $\dot{x}(t)$, $\dot{x}(t) > 0$ pour t proche de t_0 . Tant que $\dot{x}(t) > 0$, on peut réécrire (5.3) comme suit

$$\frac{m}{2} \frac{\dot{x}^2(t)}{E - V(x(t))} = 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{E - V(x(t))}} = 1.$$

En intégrant cette équation de t_0 à t on trouve

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{t_0}^t \frac{\dot{x}(s)}{\sqrt{E - V(x(s))}} ds = t - t_0,$$

ce qui, en faisant le changement de variable $s \mapsto x = x(s)$, donne

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = t - t_0. \quad (5.4)$$

La solution $x(t)$ est univoquement définie par cette équation tant que $\dot{x}(t) > 0$, une formule explicite pour $x(t)$ peut être obtenue, pour autant que l'on puisse déterminer une primitive de $\frac{1}{\sqrt{E - V(x)}}$.

- Si $v_0 < 0$, tant que $\dot{x}(t) < 0$, on obtient

$$\frac{m}{2} \frac{\dot{x}^2(t)}{E - V(x(t))} = 1 \Rightarrow -\sqrt{\frac{m}{2}} \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{E - V(x(t))}} = 1,$$

ce qui, par un raisonnement semblable au précédent, conduit à

$$-\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = t - t_0. \quad (5.5)$$

- Si $v_0 = 0$, deux cas sont possibles.

1er cas : un équilibre. C'est le cas où $V'(x_0) = 0$. Dans ce cas, la solution identiquement constante $x(t) = x_0$ est solution de l'équation (5.2). Puisqu'elle satisfait évidemment les conditions initiales $x(t_0) = x_0$ et $\dot{x}(t_0) = 0$, par unicité de la solution du problème de Cauchy, c'est la solution.

2ème cas : un point de réflexion. C'est le cas où $V'(x_0) \neq 0$. Supposons $V'(x_0) > 0$. Dans ce cas par continuité de $V'(x)$, $V'(x) > 0$ au voisinage de x_0 . Comme $V(x_0) = E$ et que $V(x(t)) \leq E$, on en déduit que $x(t) \leq x_0$. Puisque $\frac{d}{dt}\dot{x}(t) = -V'(x(t)) < 0$, $\dot{x}(t)$ est décroissante au voisinage de t_0 , c'est-à-dire $\dot{x}(t) < 0$ pour $t > t_0$ et $\dot{x}(t) > 0$ pour $t < t_0$.

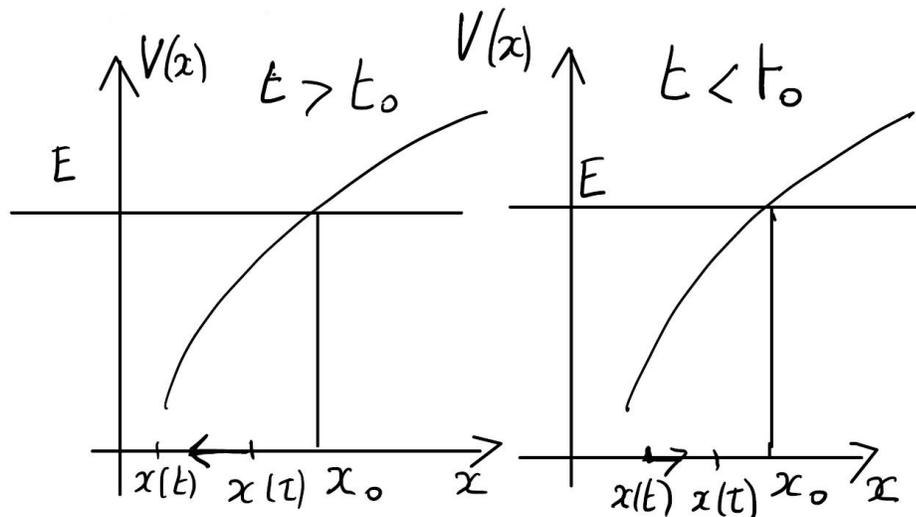


Figure 1.

Supposons $t > t_0$ (voir Figure 1, ci-dessus) alors $\dot{x}(t) < 0$, tant que $V(x(t)) < E$ et pour $t > \tau > t_0$, en vertu de (5.5), on a

$$-\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x(\tau)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = t - \tau.$$

En passant à la limite pour $\tau \rightarrow t_0$, on trouve

$$-\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = t - t_0, \quad \text{pour } t > t_0. \quad (5.6)$$

Si $t < t_0$ (voir aussi Figure 1), alors $\dot{x}(t) > 0$ et pour $t < \tau < t_0$, en vertu de (5.4), on a

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x(t)}^{x(\tau)} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = \tau - t,$$

ce qui, en passant à la limite pour $\tau \rightarrow t_0$, donne

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = t - t_0, \quad \text{pour } t < t_0. \quad (5.7)$$

Un argument semblable montre que si $V'(x_0) < 0$, la solution du problème de Cauchy est donnée au voisinage de $t = t_0$ par

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = t - t_0, \quad \text{pour } t > t_0, \quad (5.8)$$

$$-\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = t - t_0, \quad \text{pour } t < t_0. \quad (5.9)$$

Dans les deux cas, le point matériel se dirige vers x_0 quand $t < t_0$, la vitesse s'annule en $t = t_0$, et ensuite le point matériel rebrousse chemin. Ceci justifie la terminologie point de réflexion.

Un cas particulièrement intéressant est celui du mouvement entre deux points de réflexion a et b . Supposons que

$$\begin{aligned} a &< b, \\ V(a) &= V(b) = E, \\ V'(a) &< 0, \quad V'(b) > 0, \\ V(x) &< E \quad \forall x \in]a, b[. \end{aligned}$$

comme sur la Figure 2 ci-dessous.

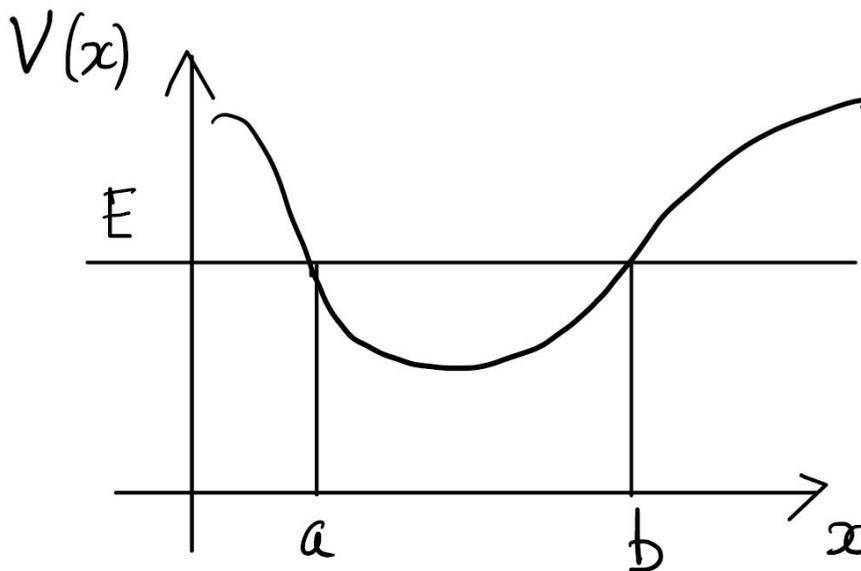


Figure 2.

L'analyse locale faite ci-dessus permet de suivre le mouvement qui est un va-et-vient entre l'abscisse a et b , c'est donc un mouvement périodique. La période du mouvement est donnée par

$$\begin{aligned}
 T &= \sqrt{\frac{m}{2}} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} - \sqrt{\frac{m}{2}} \int_b^a \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}, \\
 &= 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}, \\
 &= \sqrt{2m} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}. \tag{5.10}
 \end{aligned}$$

Remarque 5.1.2. *A priori, la convergence de l'intégrale dans les équations (5.6), (5.7), (5.8) et (5.9) n'est pas évidente, puisque $V(x_0) = E$ et l'intégrand $1/\sqrt{E - V(x)}$ tend vers l'infini pour $x \rightarrow x_0$. La convergence de l'intégrale est ici garantie par le théorème général d'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy. La convergence sera discutée indépendamment du résultat général sur l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy aux exercices.*

Exemple 1 : l'oscillateur harmonique. On considère l'équation d'un oscillateur harmonique, obéissant à la loi de Hooke

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t), \quad k > 0,$$

où k désigne la constante de rappel du ressort. On souhaite résoudre le problème de Cauchy

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0.$$

L'équation de conservation de l'énergie est donnée par

$$\frac{m\dot{x}(t)^2}{2} + \frac{kx^2(t)}{2} = E,$$

avec

$$E = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2}. \quad (5.11)$$

Pour fixer les idées on suppose $v_0 > 0$. L'équation (5.4) donne alors

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{kx^2}{2}}} = t - t_0,$$

tant que $\dot{x}(t) > 0$. Par le changement de variable

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin\varphi \Rightarrow dx = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos\varphi d\varphi;$$

on obtient

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} d\varphi = t - t_0 \Leftrightarrow \varphi(t) = \varphi_0 + \omega (t - t_0), \text{ avec } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

De là

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin(\omega(t - t_0) + \varphi_0). \quad (5.12)$$

Puisque

$$x(t_0) = x_0 = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin\varphi_0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(t_0) = v_0 = \sqrt{\frac{2E}{k}} \omega \cos\varphi_0,$$

on en déduit que

$$\tan \varphi_0 = \frac{\omega x_0}{v_0} \Leftrightarrow \varphi_0 = \arctan \frac{\omega x_0}{v_0}.$$

En substituant la valeur de l'énergie (5.11) dans (5.12), la solution est complètement définie en terme des conditions initiales x_0 et v_0 . On vérifie que cette solution reste valide pour tout $t \in \mathbb{R}$ et quelle que soit la valeur de v_0 .

Notons que pour $E > 0$, la formule (5.10) donne (voir Figure 3 ci-dessous)

$$T = \sqrt{2m} \int_{-\sqrt{\frac{2E}{k}}}^{\sqrt{\frac{2E}{k}}} \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{kx^2}{2}}} = 2\sqrt{2m} \int_0^{\sqrt{\frac{2E}{k}}} \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{kx^2}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}},$$

ce qui est consistant avec la formule (5.12). On voit donc que pour un oscillateur harmonique, la période des oscillations ne dépend pas de leur amplitude. Il n'en sera plus de même dans l'exemple du pendule.

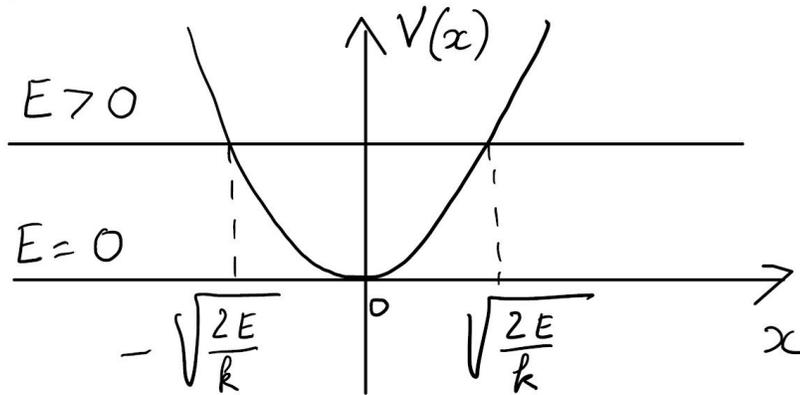


Figure 3.

Exemple 2 : le pendule. L'équation du mouvement (3.30) est

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta,$$

où θ est l'angle que fait le pendule avec la verticale descendante. Le potentiel donné par (3.31) est défini à une constante près. Si l'on ajuste cette constante

pour que le potentiel soit nul lorsque le pendule est dans sa position la plus basse, celui-ci est donné par

$$V(\theta) = mgl(1 - \cos\theta) = 2mgl \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Avec cette normalisation du potentiel, la conservation de l'énergie totale (3.32) s'exprime comme suit

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + 2mgl \sin^2 \frac{\theta}{2} = E. \quad (5.13)$$

Cherchons à résoudre le problème de Cauchy pour les conditions initiales

$$\theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = v_0 > 0.$$

Puisque $V(0) = 0$, l'énergie correspondant à ces conditions initiales vaut

$$E = \frac{m}{2}l^2v_0^2.$$

Tant que $\dot{\theta}(t) > 0$, en vertu de (5.4), en observant que ml^2 joue le rôle de m dans cette formule, on a

$$\sqrt{\frac{m}{2}} l \int_0^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{E - 2mgl \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = t. \quad (5.14)$$

1. Mouvements oscillatoires. C'est le cas où $0 < E < 2mgl$. On a

$$V(\theta) = E \Leftrightarrow \theta = \pm\alpha \text{ modulo } 2\pi, \quad 0 < \alpha < \pi.$$

Puisque $\dot{\theta}(t) = 0$ quand $\theta = \pm\alpha$, en substituant dans (5.13), on trouve

$$E = 2mgl \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

En substituant cette valeur de l'énergie dans (5.14), on obtient

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = t.$$

En posant

$$k = \sin \frac{\alpha}{2}, \quad 0 < k < 1,$$

et en faisant le changement de variable

$$\sin \frac{\theta}{2} = x \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow d\theta = \frac{2k dx}{\sqrt{1 - k^2 x^2}},$$

on obtient finalement

$$\int_0^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} = \sqrt{\frac{g}{l}} t. \quad (5.15)$$

On peut montrer que cette intégrale n'admet pas de primitive. Son inversion, c'est-à-dire la fonction $x(t)$ qui résout (5.15), définit une nouvelle fonction qu'on appelle le *sinus elliptique de Jacobi* (quand la constante $\sqrt{\frac{g}{l}} = 1$), et que l'on note $sn(t, k)$. La solution peut donc s'écrire comme suit

$$x(t) = sn\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t, k\right).$$

Quand $k = 0$, la fonction sinus elliptique de Jacobi coïncide avec la fonction sinus habituelle puisque

$$\int_0^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = t \Leftrightarrow \arcsin x(t) = t \Leftrightarrow x(t) = \sin t.$$

Par un argument de symétrie, le temps mis par le pendule pour aller de $\theta = 0$ à $\theta = \alpha$ est égal au quart de la période T du mouvement oscillatoire du pendule, et donc

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}},$$

ce qui, en utilisant le changement de variable précédent donne la formule suivante pour *la période du mouvement oscillatoire du pendule*

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}.$$

En faisant un développement de Taylor au voisinage de $k = 0$, on obtient

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^4}{64} + \dots \right).$$

On voit donc que ce n'est que pour des petites oscillations $k \approx 0$ que la période d'oscillation du pendule, en première approximation, est la période d'oscillation d'un oscillateur harmonique

$$T_0 \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

L'indépendance de la période de l'amplitude de l'oscillation (pour des petites oscillations), observée par Galilée, est connue sous le nom d'*isochronisme des petites oscillations*. On peut apprécier la valeur de l'approximation d'isochronisme sur le graphe de la fonction T/T_0 représenté sur la Figure 4 ci-dessous.

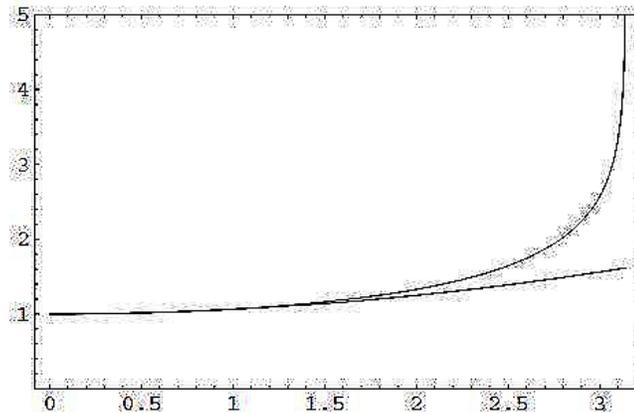


Figure 4. Graphe de T/T_0 en fonction de α exprimé en radians.

On représente sur la Figure 5 les graphes de la fonction $sn(t, k)$ pour $k = 0.1$ et $k = 0.99999$. On voit que la période de la fonction augmente en fonction de $0 < k < 1$. Pour k proche de 0, le graphe de la fonction ressemble au graphe du sinus habituel, mais ce n'est plus le cas quand k tend vers 1 !

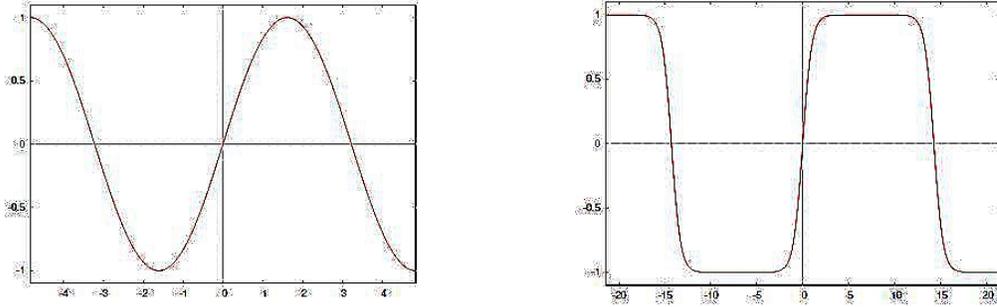


Figure 5. Graphe de la fonction $sn(t, k)$ pour $k = 0.1$ et $k = 0.99999$.

2. Mouvements circulatoires. Dans ce cas, on a

$$E > 2mgl \Leftrightarrow \frac{ml^2v_0^2}{2} > 2mgl \Leftrightarrow a - l > 0 \text{ avec } a = \frac{l^2v_0^2}{2g} - l, \quad (5.16)$$

de sorte que (5.14) peut s'écrire comme suit

$$\frac{l}{\sqrt{2g(a+l)}} \int_0^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{2l}{a+l} \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = t.$$

En posant cette fois-ci

$$k^2 = \frac{2l}{a+l}, \quad 0 < k < 1,$$

après le changement de variable

$$x = \sin \frac{\theta}{2} \Rightarrow d\theta = \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

en substituant la valeur de a donnée par (5.16), on obtient

$$\int_0^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{v_0}{2}t,$$

ce qui conduit à la formule suivante en terme du *sinus elliptique de Jacobi*

$$x(t) = sn\left(\frac{v_0}{2}t, k\right).$$

3. Mouvement asymptotique. C'est le cas où $E = 2mgl$. Dans ce cas l'intégrale (5.14) donnant la solution du problème de Cauchy devient

$$\int_0^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\cos \frac{\theta}{2}} = 2\sqrt{\frac{g}{l}} t.$$

L'intégrale est élémentaire et se calcule par le changement de variable

$$x = \sin \frac{\theta}{2} \Rightarrow d\theta = \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

qui conduit à

$$\int_0^{x(t)} \frac{dx}{1-x^2} = \sqrt{\frac{g}{l}} t \Leftrightarrow \ln \frac{1+x(t)}{1-x(t)} = 2\omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

et donc

$$x(t) = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{e^{\omega t} + e^{-\omega t}} = \tanh(\omega t) \Leftrightarrow \theta(t) = 2 \arcsin(\tanh(\omega t)).$$

On voit donc que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = 2 \arcsin(1) = \pi \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \theta(t) = 2 \arcsin(-1) = -\pi.$$

Ceci justifie la terminologie *solution asymptotique* car la solution tend vers la position d'équilibre instable du pendule, sans jamais l'atteindre, quand $t \rightarrow \pm\infty$. Cette solution est tellement instable qu'il est en pratique impossible de l'observer. Une toute petite modification des conditions initiales du mouvement fait basculer la solution vers un mouvement oscillatoire ou circulaire.

Outre les solutions que nous venons de calculer, les seules autres solutions de l'équation du pendule sont données par l'équilibre stable $\theta(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$, et l'équilibre instable $\theta(t) = \pi, \forall t \in \mathbb{R}$.

5.2 Diagramme du potentiel et plan de phase

5.2.1 Diagramme du potentiel

La solution d'un système à 1 degré de liberté revient, comme nous l'avons vu, au calcul d'une intégrale. Comme il n'existe pas nécessairement de primitive, il est souhaitable de développer des méthodes plus qualitatives pour

comprendre les mouvements possibles.

La méthode du diagramme du potentiel repose sur l'équation de conservation de l'énergie.

$$\frac{m\dot{x}^2(t)}{2} + V(x(t)) = E, \quad (5.17)$$

$$E = \frac{mv_0^2}{2} + V(x_0), \quad (5.18)$$

où x_0 et v_0 dénotent respectivement la position et la vitesse initiale. L'idée consiste à analyser tous les mouvements possibles correspondant à un niveau d'énergie fixé E . Considérons le graphe d'un potentiel conduisant à toutes les situations qui peuvent se présenter.

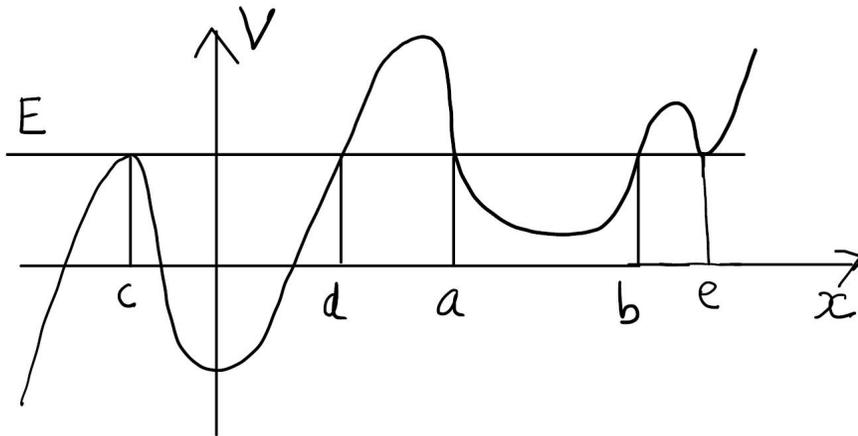


Figure 6.

On remarque :

- l'équation (5.17) montre que les mouvements ne sont possibles que dans les régions où le potentiel est inférieur à l'énergie, puisque

$$E - V(x(t)) \geq 0 \Leftrightarrow V(x(t)) \leq E.$$

- l'équation (5.18) montre que si l'on fixe l'énergie E et la position initiale x_0 , la vitesse initiale est déterminée au signe près

$$v_0 = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x_0))}.$$

L'analyse du diagramme du potentiel procède comme suit pour le niveau d'énergie E fixé sur la Figure 6.

1. Les équilibres.

$$x(t) = x_0 \quad \forall t \Leftrightarrow V'(x_0) = 0 \text{ et } V(x_0) = E.$$

On trouve donc deux équilibres dans notre cas notés c et e , e est un équilibre stable $V''(e) > 0$ (les mouvements correspondant à des conditions initiales voisines de l'équilibre, restent proches). Dans tous les autres cas, l'équilibre est instable (des conditions initiales voisines ne conduisent pas à des mouvements qui restent proches de l'équilibre). Dans notre cas c est un équilibre instable.

2. Les points de réflexion. Ce sont les points pour lesquels

$$V(x_0) = E \text{ et } V'(x_0) \neq 0.$$

On trouve trois points de réflexion dans notre cas, notés a , b et d .

3. Les mouvements possibles correspondant au niveau d'énergie E :

- *deux équilibres c et e .*
- *un mouvement périodique* entre les deux points de réflexion a et b .
- *un mouvement asymptotique borné.* Si $x_0 \in]c, d[$ et $v_0 > 0$, le point matériel se dirige vers le point de réflexion d , la vitesse s'annule en ce point et le point repart vers l'équilibre instable qu'il n'atteint jamais. Si $x_0 \in]c, d[$ et $v_0 \leq 0$, le point se dirige vers l'équilibre c sans jamais l'atteindre également. Dans les deux cas on parcourt le même mouvement $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = c$. Le point c ne peut pas être atteint en un temps fini, car cela contredirait l'unicité de la solution du problème de Cauchy.
- *un mouvement asymptotique non borné,* si $x_0 \in]-\infty, c[$ et $v_0 > 0$. Dans ce cas le point matériel se dirige vers l'équilibre instable c sans jamais l'atteindre $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = c$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = -\infty$.
- *un mouvement asymptotique non borné* si $x_0 \in]-\infty, c[$ et $v_0 < 0$. Dans ce cas $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = c$.

5.2.2 Plan de phase

Un système conservatif à 1 degré de liberté est équivalent à un système de deux équations du premier ordre :

$$m\ddot{x}(t) = -V'(x(t)) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = v(t), \\ m\dot{v}(t) = -V'(x(t)). \end{cases}$$

Le plan (x, v) s'appelle le plan de phase. Pour une condition initiale donnée $(x(t_0) = x_0, v(t_0) = v_0)$, si l'on note la solution correspondante $(x(t), v(t))$, par la conservation de l'énergie, on a

$$\{(x(t), v(t) = \dot{x}(t))\} \subset \left\{ (x, v) \in \mathbb{R}^2 : \frac{mv^2}{2} + V(x) = E \right\},$$

avec $E = \frac{mv_0^2}{2} + V(x_0)$. En général, l'inclusion ci-dessus est stricte, car la courbe décrite par l'équation $\frac{mv^2}{2} + V(x) = E$ (courbe d'énergie constante), peut contenir plusieurs mouvements différents. Un ensemble $\{(x(t), v(t) = \dot{x}(t))\}$ contenu dans une courbe d'énergie constante, s'appelle une orbite. Par exemple, dans le cas étudié à la Figure 6, pour la valeur E considérée, la courbe d'énergie E contient six orbites différentes, ce qui résulte de la discussion précédente du diagramme du potentiel. Ces six orbites sont représentées sur la Figure 7 ci-dessous.

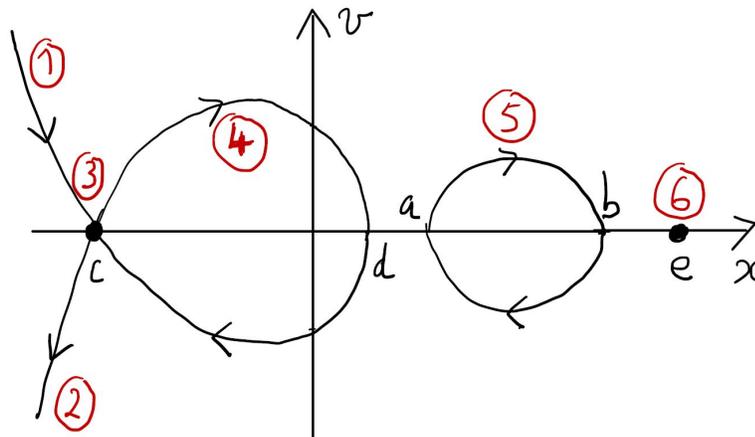


Figure 7. Les 6 orbites numérotées correspondant à la Figure 6.

Les flèches indiquent le sens dans lequel les différentes orbites sont parcourues. Quand $\dot{x}(t) > 0$, $x(t)$ croît et quand $\dot{x}(t) < 0$, $x(t)$ décroît.

Faire une représentation dans le plan de phase consiste à représenter les orbites dans le plan de phase, en distinguant tous les niveaux d'énergie donnant lieu à un ensemble d'orbites différent.

Exemple 1 : l'oscillateur harmonique. Le potentiel est donné par

$$V(x) = \frac{kx^2}{2}, \quad k > 0.$$

Le graphe est celui d'une parabole avec un minimum en $x = 0$ comme sur la Figure 3 ci-dessus. Les mouvements sont possibles seulement pour

- $E > 0$. Il y a une seule orbite correspondant à un mouvement périodique avec deux points de réflexion en $x = \pm \sqrt{\frac{2E}{k}}$.
- $E = 0$. Il y a une seule orbite correspondant à l'équilibre stable $x(t) = 0, \forall t$.

Plan de phase. Pour $E > 0$, la courbe d'énergie constante

$$\left\{ (x, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E \right\},$$

est une ellipse. Pour $E = 0$, l'ellipse se réduit au point $(x = 0, v = 0)$ correspondant à l'équilibre (stable) de l'oscillateur harmonique. On obtient donc le plan de phase suivant :

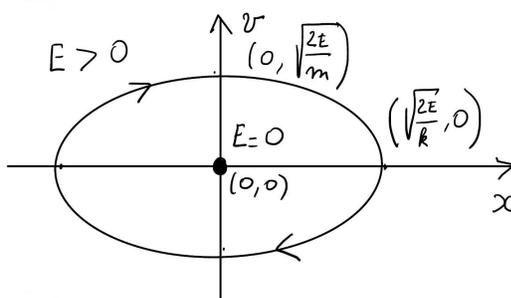


Figure 8.

Exemple 2 : le pendule. Le graphe du potentiel

$$V(\theta) = mgl(1 - \cos\theta),$$

est 2π périodique en θ . $V(\theta)$ est minimum en $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, où $V = 0$, et maximum en $\theta = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$, où $V = 2mgl$, comme représenté sur la Figure 9.

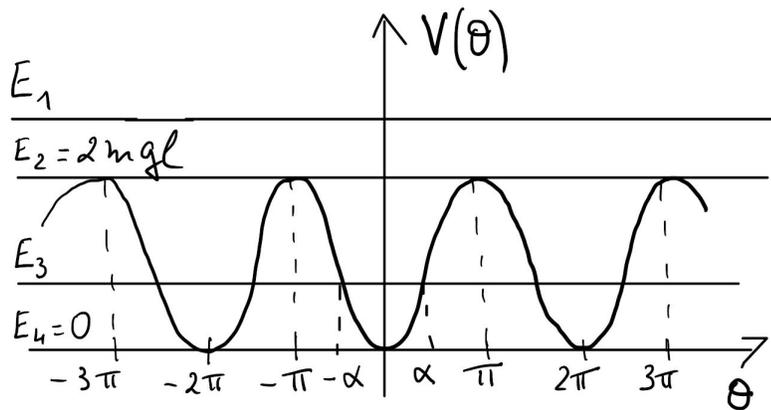


Figure 9.

Il y a 4 niveaux d'énergie conduisant à des ensembles d'orbites différents, représentés sur la figure ci-dessus.

- $E_1 > 2mgl$. Dans ce cas $\dot{\theta}(t_0) \neq 0$. Deux orbites :
 un mouvement circulaire dans le sens anti-horloger $\theta(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \theta(t) = \pm\infty$ si $\dot{\theta}(t_0) > 0$.
 un mouvement circulaire dans le sens horloger $\theta(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \theta(t) = \mp\infty$ si $\dot{\theta}(t_0) < 0$.
- $E_2 = 2mgl$. Trois orbites :
 un équilibre (instable) $\theta(t) = \pi \pmod{2\pi}, \forall t$, si $\dot{\theta}(t_0) = 0$.
 un mouvement asymptotique borné $\theta(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \theta(t) = \pm\pi$, si $\dot{\theta}(t_0) > 0$.
 un mouvement asymptotique borné $\theta(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \theta(t) = \mp\pi$, si $\dot{\theta}(t_0) < 0$.
- $0 < E_3 < 2mgl$. Une orbite correspondant à un mouvement périodique (mouvement oscillatoire du pendule) avec deux points de réflexion en $\theta(t) = \pm\alpha$, où $0 < \alpha < \pi$ est défini par $V(\alpha) = E_3, V'(\alpha) > 0$.

- $E_4 = 0$. Une orbite correspondant à l'équilibre (stable) du pendule $\theta(t) = 0 \pmod{2\pi}, \forall t$.

Plan de phase. On se concentre d'abord sur les mouvements asymptotiques qui sont les seuls pour lesquels la courbe d'énergie constante $E_2 = 2mgl$

$$\left\{ (\theta, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{ml^2}{2} v^2 + mgl(1 - \cos\theta) = 2mgl \right\},$$

peut être représentée avec précision. En utilisant l'identité trigonométrique

$$1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2},$$

la courbe d'énergie constante $E_2 = 2mgl$ peut s'écrire

$$\frac{ml^2}{2} v^2 = 2mgl \cos^2\frac{\theta}{2} \Leftrightarrow v = \pm 2\sqrt{\frac{g}{l}} \cos\frac{\theta}{2}.$$

Les graphes de ces deux fonctions, correspondant aux signes \pm sont représentés sur la Figure 10.

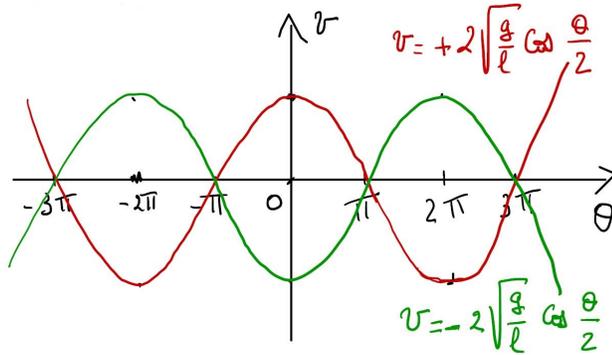


Figure 10.

Pour $0 < E_3 < 2mgl$, quand θ est petit, un développement de Taylor au voisinage de $\theta = 0$ donne $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2} + \dots$, de sorte que la courbe d'énergie constante E_3 , $\left\{ (\theta, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{ml^2}{2} v^2 + 2mgl \sin^2\frac{\theta}{2} = E_3 \right\}$, est approximativement une ellipse d'équation

$$\frac{ml^2}{2} v^2 + \frac{mgl}{2} \theta^2 = E_3.$$

Pour $E_1 > 2mgl$, en posant $E_1 = 2mgl + \varepsilon, \varepsilon > 0$, la courbe d'énergie constante E_1 s'écrit

$$\left\{ (\theta, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{ml^2}{2} v^2 + 2mgl \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2mgl + \varepsilon \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\left\{ (\theta, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{ml^2}{2} v^2 - 2mgl \cos^2 \frac{\theta}{2} = \varepsilon \right\}.$$

En faisant un développement de Taylor de $\cos \frac{\theta}{2}$ au voisinage de π , on obtient

$$\cos \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2}(\theta - \pi) + \dots,$$

de sorte que au voisinage de $(\pi, 0)$ (et, par périodicité, tous les points $((2k + 1)\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$) la courbe d'énergie constante E_3 est approximativement une hyperbole d'équation

$$\frac{ml^2}{2} v^2 - \frac{mgl}{2} (\theta - \pi)^2 = \varepsilon.$$

En combinant ces informations avec l'étude du diagramme du potentiel et en se rappelant que v^2 est maximum (minimum) quand $V(\theta)$ est minimum (maximum), on obtient une représentation assez précise du plan de phase du pendule simple, Figure 11 ci-dessous.

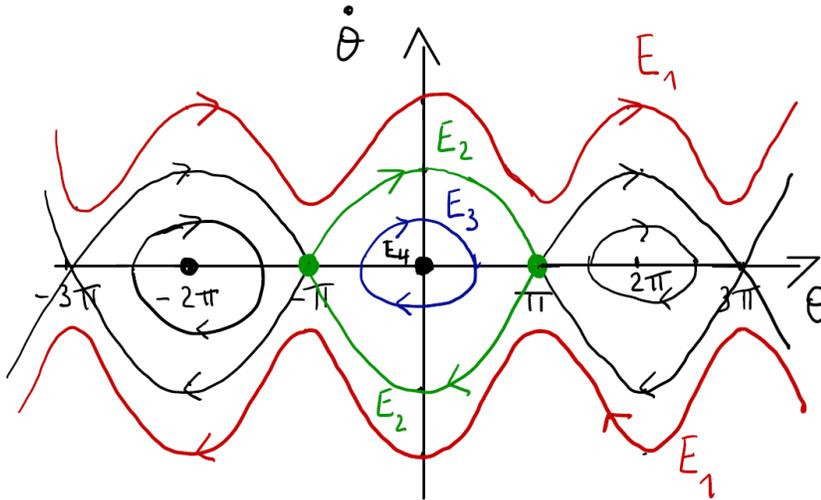


Figure 11.

5.3 Mouvement dans un champ central, potentiel effectif

On peut parfois ramener la solution d'un système à plusieurs degrés de liberté, à celle d'un système à un degré de liberté, en exploitant les symétries du problème, qui se traduisent pas des lois de conservation. Le potentiel du système à un degré de liberté auquel on ramène la solution du problème s'appelle *le potentiel effectif*. Nous traitons ici un des exemples les plus importants.

Soit P un point de masse m dans \mathbb{R}^3 , supposé inertiel, soumis à une force centrale

$$\vec{F}(\vec{r}) = \Phi(\|\vec{r}\|) \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}, \quad \vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad (5.19)$$

où $\Phi : \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 . L'équation du mouvement est

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t)). \quad (5.20)$$

Le cas de la force d'attraction newtonienne

$$\Phi(r) = -\frac{GMm}{r^2}, \quad (5.21)$$

décrivant le mouvement d'une planète autour du Soleil, M = masse du Soleil, m = masse de la planète, s'appelle le problème de Kepler.

On définit

$$V(r) = -\int_{r_0}^r \Phi(x) dx, \quad (5.22)$$

et

$$V^*(\vec{r}) = V(\|\vec{r}\|). \quad (5.23)$$

Proposition 5.3.1. *Une force centrale dérive d'un potentiel, précisément*

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V^*(\vec{r}).$$

Démonstration. Par dérivation des fonctions composées, on a

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} V^*(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} V(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}), \\
 &= V'(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\
 &= -\Phi(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\
 &= -\Phi(\|\vec{r}\|) \frac{x}{\|\vec{r}\|}.
 \end{aligned}$$

Par un calcul similaire pour les dérivées partielles en y et z , on obtient donc

$$\begin{aligned}
 -\vec{\nabla} V^*(\vec{r}) &= -\left(\frac{\partial}{\partial x} V^*(x, y, z), \frac{\partial}{\partial y} V^*(x, y, z), \frac{\partial}{\partial z} V^*(x, y, z) \right), \\
 &= \frac{\Phi(\|\vec{r}\|)}{\|\vec{r}\|} (x, y, z), \\
 &= \Phi(\|\vec{r}\|) \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \vec{F}(\vec{r}).
 \end{aligned}$$

□

Une conséquence de cette proposition est la conservation de l'énergie totale du système, donnée par le Théorème 3.2.2.

Théorème 5.3.2. *L'énergie totale*

$$E(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2} \|\dot{\vec{r}}\|^2 + V^*(\vec{r}), \quad (5.24)$$

est constante le long de tout mouvement.

La clef de la résolution du problème est l'existence d'une deuxième loi de conservation.

Théorème 5.3.3. *Le moment cinétique par rapport à l'origine*

$$\vec{J} = \vec{r} \wedge m\dot{\vec{r}}, \quad (5.25)$$

est constant le long de tout mouvement.

Démonstration. En utilisant (3.47) et (5.19), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\vec{J}(t) &= \vec{r}(t) \wedge \vec{F}(r(t)), \\ &= \frac{\Phi(\|\vec{r}(t)\|)}{\|\vec{r}(t)\|} \vec{r}(t) \wedge \vec{r}(t) = 0.\end{aligned}$$

□

Puisque $\vec{J}(t) = \vec{M}$ est un vecteur constant durant le mouvement, il y a deux cas possibles :

1er cas. $\vec{M} = 0$, ce qui signifie que la vitesse $\dot{\vec{r}}(t)$ est constamment parallèle à $\vec{r}(t)$, c'est-à-dire

$$\dot{\vec{r}}(t) = k(t)\vec{r}(t).$$

On vérifie facilement que la solution est donnée par

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) \exp\left(\int_0^t k(s) ds\right),$$

puisque

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) &= \vec{r}(0) \exp\left(\int_0^t k(s) ds\right) \frac{d}{dt} \int_0^t k(s) ds, \\ &= \vec{r}(0) \exp\left(\int_0^t k(s) ds\right) k(t) = k(t)\vec{r}(t).\end{aligned}$$

C'est donc un mouvement radial.

2ème cas. $\vec{M} \neq 0$. Dans ce cas, le mouvement a lieu dans un plan perpendiculaire à \vec{M} . En choisissant une base orthonormale $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ d'orientation directe telle que

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \frac{\vec{M}}{\|\vec{M}\|}, \quad (5.26)$$

et en introduisant des coordonnées polaires r, φ dans le plan engendré par (\vec{e}_1, \vec{e}_2) , on peut écrire dans cette base

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi(t) \\ r(t)\sin\varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{r}(t)\cos\varphi - r(t)\dot{\varphi}(t)\sin\varphi(t) \\ \dot{r}(t)\sin\varphi + r(t)\dot{\varphi}(t)\cos\varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

On calcule facilement que

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mr^2(t)\dot{\varphi}(t) \end{pmatrix},$$

et donc

$$mr^2(t)\dot{\varphi}(t) = h, \quad \text{avec } h = \|\vec{M}\|. \quad (5.28)$$

Un simple calcul, utilisant (5.22), (5.23) et (5.24), donne l'énergie totale

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2(t) + r^2(t)\dot{\varphi}^2(t)) + V(r(t)) = E. \quad (5.29)$$

De l'équation (5.28), on tire

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{h}{mr^2(t)}. \quad (5.30)$$

En substituant cette équation dans (5.29), on obtient

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2(t) + \left(V(r(t)) + \frac{h^2}{2mr^2(t)} \right) = E. \quad (5.31)$$

Cette dernière équation ramène l'étude du mouvement en $r(t)$ (distance à l'origine) à la solution d'un système conservatif à un degré de liberté pour un point de masse m soumis à une force dérivant du potentiel

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{h^2}{2mr^2}, \quad (5.32)$$

que l'on appelle le potentiel effectif.

Si la solution analytique de (5.31) peut être calculée explicitement, l'angle $\varphi(t)$ s'obtient ensuite à partir de (5.30) par simple intégration, en conséquence la solution de (5.20) est obtenue explicitement. C'est notamment possible dans le *problème de Kepler*, pour lequel, en vertu de (5.21) et (5.22), le potentiel est donné par

$$V(r) = GMm \int_{r_0}^r \frac{dx}{x^2} = GMm \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{r_0} \right).$$

Le potentiel newtonien est d'habitude normalisé en le posant nul à l'infini, c'est-à-dire

$$V(r) = -\frac{GMm}{r}.$$

Le problème de Kepler sera intégré dans la section suivante. C'est seulement dans ce cas que les célèbres trois lois de Kepler sont vérifiées.

Mentionnons pour terminer ce chapitre que la deuxième loi de Kepler (la loi des aires) est toujours vérifiée dans le cas d'une force centrale.

Théorème 5.3.4. (*Loi des aires*) *Pour toute force centrale, le rayon vecteur $\vec{r}(t)$ balaye des aires égales en des temps égaux.*

Démonstration. Par définition du produit vectoriel, l'aire balayée $A(t_1, t_2)$ par le rayon vecteur du temps t_1 au temps t_2 , est donnée par

$$\begin{aligned} A(t_1, t_2) &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \|\vec{r}(t) \wedge \dot{\vec{r}}(t)\| dt, \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{h}{m} dt = \frac{h}{2m}(t_2 - t_1), \end{aligned} \quad (5.33)$$

où h désigne la norme du moment cinétique, défini en (5.25) □

5.4 Le problème de Kepler

Le problème de Kepler où la force centrale est la force d'attraction newtonienne introduite en (5.21)

$$V(r) = -\frac{k}{r} \Leftrightarrow \Phi(r) = -\frac{k}{r^2}, \quad k = GmM, \quad (5.34)$$

possède une symétrie supplémentaire par rapport au cas général. En effet, on a toujours

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}(t) \wedge \vec{J}(t)) = \ddot{\vec{r}}(t) \wedge \vec{J}(t) = \Phi(r(t)) \frac{\vec{r}(t)}{r(t)} \wedge (\vec{r}(t) \wedge \dot{\vec{r}}(t)), \quad (5.35)$$

et

$$\frac{d}{dt} \frac{\vec{r}(t)}{r(t)} = \frac{r^2(t)\dot{\vec{r}}(t) - r(t)\dot{r}(t)\vec{r}(t)}{r^3(t)} = -\frac{\vec{r}(t)}{r^3(t)} \wedge (\vec{r}(t) \wedge \dot{\vec{r}}(t)), \quad (5.36)$$

où, dans la dernière égalité, on a utilisé l'identité vectorielle $\vec{x} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{z}) = (\vec{x}|\vec{z})\vec{y} - (\vec{x}|\vec{y})\vec{z}$. Dans le cas où l'intensité de la force centrale est donnée par (5.34) on déduit de (5.35) et (5.36) que

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}(t) \wedge \vec{J}(t) - k \frac{\vec{r}(t)}{r(t)} \right) = 0,$$

ce qui établit le résultat suivant :

Proposition 5.4.1. *Dans le cas du problème de Kepler le vecteur de Laplace*

$$\vec{L} = \dot{\vec{r}} \wedge \vec{J} - k \frac{\vec{r}}{r}, \quad (5.37)$$

est une constante du mouvement.

Un simple calcul, utilisant (5.27) et (5.28), donne l'expression suivante pour le vecteur de Laplace introduit en (5.37)

$$\vec{L} = h \begin{pmatrix} \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \\ r \dot{\varphi} \sin \varphi - \dot{r} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

d'où l'on déduit, en utilisant (5.29), (5.30) et (5.34), que

$$\|\vec{L}\| = k e, \quad \text{avec} \quad e = \sqrt{1 + \frac{2h^2 E}{mk^2}}. \quad (5.38)$$

Puisque \vec{L} est constant dans le plan du mouvement, on peut choisir \vec{e}_1 en (5.26) comme suit

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{L}}{\|\vec{L}\|}.$$

Avec ce choix, on a

$$(\vec{r}|\vec{L}) = r \|\vec{L}\| \cos \varphi. \quad (5.39)$$

Un calcul direct donne

$$(\vec{r}|\dot{\vec{L}}) = (\vec{r}|\dot{\vec{r}} \wedge \vec{J}) - k \dot{r} = h r^2 \dot{\varphi} - k \dot{r}. \quad (5.40)$$

Des équations (5.39) et (5.40), on déduit que

$$\|\vec{L}\| \cos \varphi = h r \dot{\varphi} - k,$$

et donc, en utilisant (5.30) et (5.38), on obtient

$$k e \cos \varphi = \frac{h^2}{mr} - k,$$

qui peut s'écrire

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad \text{avec} \quad p = \frac{h^2}{mk}. \quad (5.41)$$

L'équation (5.41) est l'équation d'une conique d'excentricité e . Si $e = 0$, il s'agit d'un cercle, si $0 < e < 1$, les trajectoires sont des ellipses, si $e = 1$, il s'agit d'une parabole et si $e > 1$, les trajectoires sont des hyperboles. Les résultats obtenus sont résumés dans le théorème suivant.

Théorème 5.4.2. (Les trois lois de Kepler) *Les lois de Kepler concernent le mouvement des planètes autour du soleil. Elles sont au nombre de trois.*

1) *Les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le soleil occupe un des foyers.*

2) *Les aires balayées (par le vecteur joignant une planète au soleil) en des temps égaux sont égales.*

3) *Les carrés des périodes des mouvements planétaires sont proportionnels aux cubes des grands axes des trajectoires.*

Démonstration. 1) Quand $0 \leq e < 1$, l'équation (5.41) est l'équation polaire d'une ellipse où l'origine des coordonnées est fixée au centre d'attraction O (c.à.d. le soleil) qui coïncide avec un des foyers de l'ellipse (voir Figure 12) et

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}, \quad (5.42)$$

où a et b dénotent respectivement le grand axe et le petit axe de l'ellipse.

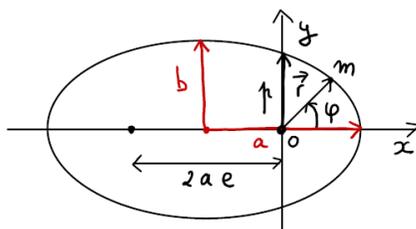


Figure 12.

2) La loi des aires est toujours vérifiée pour un mouvement dans un champ de forces central, comme établi au Théorème 5.3.4.

3) La loi des aires (5.33) donne la période T du mouvement en terme de l'aire de l'ellipse

$$\pi a b = \frac{h T}{2 m} \Leftrightarrow T = \frac{2 m \pi a b}{h},$$

d'où, en utilisant (5.41) et (5.42), l'on déduit

$$T^2 = \frac{4 m^2 \pi^2 a^3 p}{h^2} = \frac{4 m^2 \pi^2 a^3 h^2}{m k h^2} = \frac{4 \pi^2 m}{k} a^3,$$

ce qui établit la troisième loi de Kepler. \square

5.5 Exercices

1. a) Résoudre le problème de Cauchy

$$m\ddot{x}(t) = kx(t), \quad k > 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0,$$

de deux manières différentes, en utilisant la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants, et en utilisant la conservation de l'énergie.

b) Discuter le diagramme du potentiel et représenter les orbites dans le plan de phase.

2. Un point matériel de masse m se meut sans frottement le long d'un axe réel x sous l'action d'une force dérivant du potentiel

$$V(x) = \frac{x^3}{3} - x.$$

a) Ecrire la loi de conservation de l'énergie et dessiner le graphe du potentiel.

b) Représenter avec précision les orbites dans le plan de phase (x, \dot{x}) , en distinguant tous les niveaux d'énergie donnant lieu à un ensemble d'orbites différent.

c) Les mouvements $x(t)$ définis par les conditions initiales suivantes

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad & x(0) = -1, \quad \dot{x}(0) = 0, \\ (\beta) \quad & x(0) = 2, \quad \dot{x}(0) = 0, \\ (\gamma) \quad & x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = \frac{2}{\sqrt{3m}}, \end{aligned}$$

sont-ils des équilibres ? des mouvements périodiques ? des mouvements non périodiques, bornés ? des mouvements non périodiques, non bornés ? des mouvements asymptotiques ? Choisir dans chaque cas *la ou les* réponses adéquates. Justifier vos réponses et représenter le mouvement correspondant dans le plan de phase obtenu en b).

3. Un point matériel de masse m se meut sans frottement le long d'un axe réel x sous l'action d'une force dérivant du potentiel

$$V(x) = 2x^2 - x^4.$$

a) Ecrire la loi de conservation de l'énergie et dessiner le graphe du potentiel.

b) Représenter avec précision les orbites dans le plan de phase (x, \dot{x}) , en distinguant tous les niveaux d'énergie donnant lieu à un ensemble d'orbites différent.

c) Les mouvements $x(t)$ définis par les conditions initiales suivantes

$$(\alpha) \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \sqrt{\frac{2}{m}},$$

$$(\beta) \quad x(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \dot{x}(0) = 0,$$

$$(\gamma) \quad x(0) = -\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \dot{x}(0) = 0,$$

sont-ils des équilibres ? des mouvements périodiques ? des mouvements non périodiques, bornés ? des mouvements non périodiques, non bornés ? des mouvements asymptotiques ? Choisir dans chaque cas *la ou les* réponses adéquates. Justifier brièvement et représenter le mouvement correspondant dans le plan de phase obtenu en b).

4. On reprend le problème du pendule sphérique (exercice 5, chapitre 4). Pour rappel, l désigne la longueur du pendule, $\theta(t)$ l'angle que fait le pendule avec la verticale descendante et $\varphi(t)$ l'angle qui détermine le plan méridien dans lequel le pendule se trouve au temps t .

a) Calculer l'énergie totale du système en fonction de θ et φ .

b) Calculer la projection du moment cinétique (par rapport à l'origine) sur l'axe vertical en fonction de θ, φ . Démontrer que cette quantité reste constante lors du mouvement.

c) Utiliser le résultat obtenu en b) pour ramener l'étude du problème à celle d'un système à un degré de liberté en θ et donner le potentiel effectif $V_{eff}(\theta)$.

d) Montrer que l'altitude $z(t)$ du pendule en fonction du temps satisfait

$$\frac{m}{2}\dot{z}^2 = p(z), \text{ avec}$$

$$p(z) = \frac{mg}{l^2} \left\{ (z^2 - l^2) \left(z - \frac{E}{mg} \right) - \frac{1}{2g} \left(\frac{h}{m} \right)^2 \right\}, \quad (5.43)$$

où E désigne l'énergie et h est la constante du mouvement trouvée en b).

e) Démontrer que le polynôme $p(z)$ a trois racines réelles z_1, z_2, z_3 satisfaisant à

$$-l < z_1 \leq z_2 < l < z_3.$$

Discuter qualitativement le mouvement en fonction de z et φ .

f) On suppose les 3 racines z_1, z_2, z_3 de $p(z)$ distinctes. Montrer que la substitution

$$u = \sqrt{\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}, \quad k = \sqrt{\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{g(z_3 - z_1)}{2l^2}},$$

dans (5.43) conduit à l'équation

$$\dot{u}^2 = \omega^2(1 - u^2)(1 - k^2u^2),$$

qui permet d'exprimer la solution analytique du problème en terme de la fonction sinus elliptique $sn(t, k)$ de Jacobi.

5. On considère le mouvement d'un point matériel de masse m soumis à une force centrale

$$\vec{F}(\vec{r}) = -k \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^4}, \quad k > 0.$$

a) Donner le potentiel effectif du système.

b) Soit h la valeur constante du moment cinétique. Esquisser les orbites dans le plan de phase (r, \dot{r}) en considérant les trois cas $h^2 < km, h^2 = km, h^2 > km$, où $r = \|\vec{r}\|$.

c) Montrer que lorsque $h^2 - km < 0$ et $E \neq 0$, la masse "tombe" sur le centre en un temps fini, c.à.d. que l'on a une collision. Calculer le temps de chute à partir d'une distance $r(0) = r_0$, en supposant que la vitesse initiale

$\dot{r}(0)$ est négative ou nulle. Que se passe-t-il quand $E = 0$?

6. Soit $V : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 définie sur un ouvert Ω de \mathbb{R} . Soit $[x_0, a] \subset \Omega$ un intervalle tel que $V(x) < E$ sur $[x_0, a[$.

a) Démontrer que la fonction

$$I :]x_0, a[\rightarrow I(]x_0, a[) : s \mapsto I(s) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^s \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}},$$

est croissante et que l'application inverse $I^{-1}(t) = x(t), t \in I(]x_0, a[)$ est dérivable avec

$$\frac{d}{dt}x(t) = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - V(x(t))}.$$

b) En déduire que si $E = m\frac{v_0^2}{2} + V(x_0)$ avec $v_0 > 0$, la fonction $x(t)$ définie en a) est solution du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= -V'(x(t)), \\ x(0) &= x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \end{aligned}$$

et que l'on a

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = t.$$

7. On considère le mouvement d'un point matériel

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= -V'(x(t)), \\ x(0) &= x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 > 0, \end{aligned} \tag{5.44}$$

soumis à une force dérivant d'un potentiel $V : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 et défini sur un ouvert Ω de \mathbb{R} . Soit $[x_0, a] \subset \Omega$ un intervalle tel que $V(x) < E$ sur $[x_0, a[$, $V(a) = E$ et $V'(a) > 0$.

a) Montrer que la fonction G définie par

$$G(x) = \begin{cases} \frac{E - V(x)}{a - x}, & \text{si } x \in [x_0, a[, \\ V'(a), & \text{si } x = a, \end{cases}$$

est continue sur $[x_0, a]$. En déduire que cette fonction atteint son minimum sur $[x_0, a]$ et que

$$\min_{x \in [x_0, a]} G(x) = \delta > 0.$$

b) En déduire que le mouvement du point matériel soumis aux conditions initiales (5.44) atteint le point a en un temps t_a fini et que

$$t_a \leq \sqrt{\frac{2m}{\delta}} \sqrt{a - x_0}.$$

8. On considère le mouvement d'un point matériel

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= -V'(x(t)), \\ x(0) &= x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 > 0, \end{aligned} \tag{5.45}$$

soumis à une force dérivant d'un potentiel $V : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 et défini sur un ouvert Ω de \mathbb{R} . Soit $[x_0, a] \subset \Omega$ un intervalle tel que $V(x) < E$ sur $[x_0, a[$, $V(a) = E$ et $V'(a) = 0$.

a) Montrer que la fonction G définie par

$$G(x) = \begin{cases} \frac{E-V(x)}{(a-x)^2}, & \text{si } x \in [x_0, a[, \\ -\frac{V''(a)}{2}, & \text{si } x = a, \end{cases}$$

est continue sur $[x_0, a]$. En déduire que cette fonction atteint son maximum sur $[x_0, a]$ et que

$$\max_{x \in [x_0, a]} G(x) = \delta > 0.$$

b) En déduire que le mouvement du point matériel soumis aux conditions initiales (5.45) n'atteint pas le point a en un temps fini. Autrement dit le temps t_a pour atteindre la position d'équilibre est infini.

Remarque. Une autre façon d'aborder le problème 8 b), si l'on accepte l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= F(x(t)), \\ x(0) &= x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \end{aligned}$$

où $F(x) = -V'(x)$ est de classe \mathcal{C}^1 (puisque $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^2), est la suivante. On suppose que $V(a) = E$ et $V'(a) = 0$, c'est-à-dire que a est un équilibre. Si l'équilibre est atteint en un temps fini t_a en partant de $x_0 < a$ au temps $t = 0$ avec une vitesse $v_0 > 0$, c'est-à-dire que $x(t_a) = a$ et $\dot{x}(t_a) = 0$, on vérifie facilement que

$$y(t) = x(t + t_a),$$

est solution de

$$\begin{aligned} m\ddot{y}(t) &= F(y(t)) = -V'(y(t)), \\ y(0) &= a, \quad \dot{y}(0) = 0. \end{aligned}$$

Par unicité de la solution du problème de Cauchy, l'unique solution est

$$y(t) = a, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$x(t + t_a) = a, \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow x(-t_a + t_a) = x(0) = a,$$

et donc $x_0 = a$ puisque $x(0) = x_0$, ce qui contredit $x_0 < a$.

9. On considère le problème de Kepler dont l'étude est ramenée à celle du potentiel effectif, défini en (5.32) :

$$V_{eff}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{h^2}{2mr^2}, \quad k > 0, h > 0.$$

Discuter qualitativement tous les mouvements possibles (circulaire, elliptiques, parabolique, hyperboliques) par une étude qualitative du diagramme du potentiel effectif.

10. Dans l'étude du mouvement dans un champ de forces central, en vertu de (5.30), on a

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{h}{mr^2(t)},$$

et donc, si $h > 0$, on peut paramétrer r en fonction de φ .

a) Montrer que l'équation de conservation de l'énergie s'écrit

$$\frac{h^2}{2mr^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + V(r) + \frac{h^2}{2mr^2} = E.$$

b) Dans le cas du problème de Kepler où $V(r) = -\frac{k}{r}$, $k > 0$, montrer en ramenant le calcul de la solution à une intégrale (et donc sans utiliser la conservation du vecteur de Laplace), que

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cos \varphi},$$

avec e, p définis comme en (5.38) et (5.41).

Indication. Faire le changement de variable $r = \frac{1}{u}$ dans l'intégrale.

Bibliographie

- [1] V.I. Arnold, Equations différentielles ordinaires, Editions Mir.Moscou, 1974.
- [2] V.I. Arnold, Méthodes mathématiques de la mécanique classique, Editions Mir.Moscou, 1976.
- [3] C.A. Tracy, Lectures on differential equations, March 2017.
<https://www.math.ucdavis.edu/tracy/courses/math22B/22BBook.pdf>
- [4] A. Deprit, N. Rouche, Mécanique rationnelle 1, Vander - Louvain, 1970.
- [5] N. Rouche, Mécanique rationnelle 2, Vander - Louvain, 1970.