Faculté des Sciences
École de Mathématique

UCL
Université catholique de Louvain

LMAT 1223

Équations différentielles ordinaires

J. Van Schaftingen

2010 – 2018

Table des matières

Pourquoi étudier les équations différentielles ? 7

I. Problèmes de valeurs initiales 9

1. Systèmes linéaires à coefficients constants 11
- 1.1. Construction de l'exponentielle d'opérateur 13
  - 1.1.1. Développement de Taylor d'une solution 13
  - 1.1.2. Définitions et propriétés de l'exponentielle d'opérateur . . 14
  - 1.1.3. Dérivée de l'exponentielle d'opérateur 16
  - 1.1.4. Existence et unicité de solutions de systèmes linéaires . . 18
- 1.2. Équations différentielles et spectre d'opérateurs 20
  - 1.2.1. Exponentielle et spectres d'opérateurs 20
  - 1.2.2. Application aux équations différentielles scalaires d'ordre supérieur 25
- Exercices 32

2. Systèmes linéaires à coefficients variables 37
- 2.1. Théorème d'existence 39
- 2.2. Théorème d'unicité 42
- 2.3. Structure géométrique de l'ensemble des solutions 45
  - 2.3.1. Systèmes différentiels du premier ordre 45
  - 2.3.2. L'espace des solutions 45
  - 2.3.3. Résolvante 47
- 2.4. Changements de variables facilitant le calcul de solutions 53
  - 2.4.1. Variation des constantes 53
  - 2.4.2. Réduction d'ordre 56
- Exercices 65

3. Systèmes d'équations différentielles ordinaires non linéaires 69
- 3.1. Existence locale de solution 71
- 3.2. Unicité 72
  - 3.2.1. Obstructions à l'unicité 72
  - 3.2.2. Unicité locale 72
  - 3.2.3. Unicité globale 75
- 3.3. Courbes intégrales maximales 76
  - 3.3.1. Construction de courbes intégrales maximales 76

3.4. Dépendance par rapport aux données initiales 79
3.4.1. Continuité par rapport aux données initiales 79
3.4.2. Différentiabilité par rapport aux données initiales 83
Compléments 85
Exercices 93

4. Stabilité de systèmes d'équations différentielles autonomes 101
4.1. Introduction 103
4.2. Stabilité 103
4.3. Stabilité asymptotique 106
4.3.1. Méthode de Lyapounov 106
4.3.2. Stabilité asymptotique de problèmes linéaires 109
4.3.3. Stabilité asymptotique par linéarisation 109
4.4. Instabilité 110
4.4.1. Méthode de Lyapounov 110
4.4.2. Instabilité de problèmes linéaires 112
4.4.3. Instabilité par linéarisation 113
Exercices 113

II. Problèmes aux limites 117

5. Problèmes aux limites pour les systèmes d'équations différentielles linéaires 119
5.1. Introduction 120
5.2. Condition de résolubilité 120
5.3. Condition d'unicité 123
Compléments 124
Exercices 132

6. Problèmes aux limites pour des équations différentielles non linéaires 135
6.1. Introduction 135
6.2. Méthode de tir 136
6.3. Méthode des approximations successives 138
6.4. Méthode de monotonie 141
Exercices 145

A. Éléments d'algèbre linéaire 147
A.1. Norme d'applications linéaires 147
A.2. Vecteurs propres généralisées 150
A.3. Opérateur adjoint 152
A.4. Spectre d'un opérateur autoadjoint 153
A.5. Trace 154

A.6. Déterminant 156
A.6.1. Déterminant de n vecteurs 158

B. Éléments d'analyse **159**
B.1. Intervalles 159
B.2. Topologie et convergence dans l'espace euclidien 159
B.2.1. Définition de convergence 159
B.2.2. Critère de Cauchy 160
B.2.3. Convergence de série 160
B.2.4. Propriété de Bolzano–Weierstraß 161
B.2.5. Ensembles compacts 161
B.2.6. Topologie de l'espace euclidien 162
B.3. Inégalité des accroissements finis 162
B.4. Intégrale de fonctions vectorielles sur un intervalle 163
B.4.1. Inégalité triangulaire pour l'intégrale 163
B.4.2. Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral . 163
B.4.3. Formule intégrale du reste du développement de Taylor . 163
B.4.4. Propriétés de l'intégrale indéfinie 164
B.4.5. Théorèmes de convergences dominée et monotone 165

C. Solutions types d'exercices **167**

D. Solutions d'exercices **175**
Chapitre 1 — Systèmes linéaires à coefficients constants 175
Chapitre 2 — Systèmes linéaires à coefficients variables 180
Chapitre 3 — Systèmes d'équations différentielles ordinaires non linéaires 183
Chapitre 4 — Stabilité de systèmes d'équations différentielles autonomes 187
Chapitre 5 — Problèmes aux limites pour les systèmes d'équations différentielles linéaires 187
Chapitre 6 — Problèmes aux limites pour des équations différentielles non linéaires 188

Index **189**

Pourquoi étudier les équations différentielles ?

De nombreux modèles mécaniques, électrodynamique, chimiques, écologiques, financiers relient différentes variables à leurs dérivées. Par exemple, la position θ d'un pendule amorti satisfait l'équation

$$m\theta'' = -\mu\theta' - mg\sin\theta.$$

Si une équation différentielle est censée modéliser un système, on n'observe jamais l'équation différentielle, mais seulement les solutions de l'équation différentielle. On cherche donc à établir une sorte de dictionnaire entre les propriété de l'équation différentielle et les propriétés des solutions, afin de pouvoir valider notre modèle physique. À un extrême, lors d'une modélisation empirique, on cherche à écrire une équation différentielle qui donne comme solutions les comportements observés.

Une première question qu'on peut se poser sur une équation différentielle est de savoir si elle possède une unique solution. Pour cela, on remarque d'abord que l'équation différentielle toute seule n'a en général pas une solution unique. Pour le problème du pendule, on espère avoir une solution unique pour chaque position et vitesse initiale.

Si on regarde le problème du pendule, on s'aperçoit que mis à part le cas de vitesse et de position nulle au départ, on n'arrive pas à écrire de solutions aux équations. Il semble physiquement assez réducteur de rejeter une équation ou des données initiales parce que nous n'arrivons pas à écrire une solution à partir de fonctions élémentaires. Je pourrais dire que parce que le pendule fonctionne toujours, il doit y avoir une solution ; mais si j'utilise un argument physique, je suppose que mon modèle décrit parfaitement la physique, ce dont je ne peux pas être sûr. Justement, vérifier si mon équation possède mathématiquement une solution est un critère qui me permet de valider mon modèle.

Nous allons donc essayer de développer une théorie des solutions d'équations différentielles sans pouvoir écrire de solution explicite des solutions. Plutôt que de chercher des formules pour des solutions, nous allons étudier comment on peut contruire des solutions approximatives et étudier les propriétés qualitatives de toutes les solutions, à des fins de validation du modèle, de prédiction de comportement du modèle et de validation de solutions calculées numériquement

On va donc construire une solution à ce problème par un processus de limite. On a ainsi fabriqué une nouvelle fonction qui résout notre problème. La situation analogue à celle du problème de primitive, pour lequel on fabrique de nouvelles fonctions. Une manière de *définir* le logarithme néperien est de poser $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. De même, on peut *définir* les fonctions trigonométriques en posant $\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. D'une certaine manière, on a construit là des nouvelles fonctions comme solutions d'une certaine équation différentielle.

La question de l'unicité est liée à la reproductibilité des expériences : si je lâche plusieurs fois mon pendule avec une même vitesse et une même position initiale, j'observe le même comportement. J'aimerais donc dire que, à données initiales données, mon problème a au plus une solution. Ce n'est de nouveau pas la physique qui va me dire que mon équation à cette propriété-là : je ne sais pas si cette équation est un bon modèle physique. Vérifier que l'équation a la propriété mathématique d'unicité qui correspond à la reproductibilité des expériences me permettra de valider mon modèle physique.

En fait, si je prends mon pendule, je n'arriverai jamais à le faire partir avec une position et une vitesse initales identiques. J'observe néanmoins que si je fixe suffisament précisément mes positions et vitesses initiales, j'ai des comportements fort proches de mon pendule. Si je veux vérifier que mon modèle a les mêmes propriétés, je voudrai vérifier la dépendance continue de ma solution par rapport aux données initiales.

Je peux aussi étudier les solutions particulièrement simples de mon équation du pendule que sont les solutions constantes. Physiquement, elles correspondent à deux états différents : le pendule en équilibre en bas et le pendule en équilibre en haut. Le premier est observable dans la vie courante, le second ne l'est pas. Pour expliquer cette différence, on introduit le concept de stabilité : on dit que pour un grand ensemble de données initiales, des solutions vont ressembler à l'équilibre bas. Par contre, l'équilibre haut n'est pas observable parce qu'une petite erreur sur la donnée initiale donnera un comportement très différent à long terme.

Enfin, une dernière famille de problèmes sont les problèmes pour lesquels on a une équation différentielle mais on impose non pas une condition initiale, mais des conditions à chaque extrémité d'un intervalle, par exemple pour modéliser le comportement d'une poutre ou la distribution stationnaire de chaleur dans une barre. Dans ces problèmes, l'existence et l'unicité des solutions sont nettement plus délicates à obtenir. On remarquera par exemple qu'on ne peut pas avoir une distribution stationnaire de température avec une source de chaleur dans un milieu parfaitement isolé : la quantité de chaleur et donc la température sont en augmentation constante.

Première partie

Problèmes de valeurs initiales

1. Systèmes linéaires à coefficients constants

Matières

1.1. Construction de l'exponentielle d'opérateur 13
1.1.1. Développement de Taylor d'une solution 13
1.1.2. Définitions et propriétés de l'exponentielle d'opérateur . . 14
1.1.3. Dérivée de l'exponentielle d'opérateur 16
1.1.4. Existence et unicité de solutions de systèmes linéaires . . 18
1.2. Équations différentielles et spectre d'opérateurs 20
1.2.1. Exponentielle et spectres d'opérateurs 20
1.2.2. Application aux équations différentielles scalaires d'ordre supérieur 25
Exercices 32

Prérequis

- ☞ Algèbre linéaire : définition d'opérateur linéaire, compositions d'opérateurs linéaires, vecteurs propres,
- ☞ Analyse : développement et série de Taylor de l'exponentielle réelle,
- ☞ Analyse vectorielle : suites de Cauchy de vecteurs,
- ☞ Calcul intégral : théorème de la convergence dominée.

Questionnaire de révision

- ☞ Définissez l'exponentielle d'un opérateur et montrez la convergence de la suite associée.
- ☞ Démontrez que si $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n)$, $\|\mathrm{e}^A\| \leq \mathrm{e}^{\|A\|}$.
- ☞ Démontrez que $\mathrm{e}^{tA}[v] - v = \int_0^t A\big[\mathrm{e}^{sA}[v]\big]\,\mathrm{d}s$.
- ☞ Démontrez que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}[v]$ est dérivable.
- ☞ Exposez comment on définit l'exponentielle d'opérateur et comment on démontre ses propriétés de différentiabilité en vue de l'étude d'équations différentielles.

- ☞ Énoncez et démontrez le théorème de caractérisation des solutions du problème de Cauchy pour un système d'équations différentielles linéaires d'ordre homogène et non homogène.
- ☞ Expliquez les liens entre exponentielle d'opérateur et systèmes d'équations différentielles linéaires.
- ☞ Décrire comment l'exponentielle d'un opérateur agit sur un vecteur propre.
- ☞ Décrire comment l'exponentielle d'un opérateur agit sur un vecteur propre généralisé.
- ☞ Expliquer pourquoi connaître le comportement de l'exponentielle d'un opérateur agit sur chaque vecteur propre généralisé permet de décrire complètement l'exponentielle.
- ☞ Donner un exemple d'exponentielle d'opérateur dont la matrice ne s'écrit pas à l'aide de fonctions exponentielles et trigonométriques

Exercices prioritaires : 1.1, 1.7, 1.9, 1.14, 1.21, 1.22.

1.1. Construction de l'exponentielle d'opérateur

1.1.1. Développement de Taylor d'une solution

Soit $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$ un opérateur linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Nous cherchons une fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ qui soit dérivable et telle que pour chaque temps $t \in \mathbb{R}$ on ait

$$u'(t) = A\big[u(t)\big]. \tag{1.1}$$

Supposons que la fonction u soit une solution du problème et calculons-en le développement de Taylor.

Pour cela, nous allons calculer toutes les dérivées de u en 0. Nous observons tout d'abord que notre équation permet de calculer la dérivée à partir de la valeur de la fonction :

$$u'(t) = A\big[u(t)\big].$$

Nous remarquons ensuite que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction u est dérivable deux fois en t et

$$u''(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} A\big[u(s)\big]\Big|_{s=t} = A\big[u'(t)\big] = A\big[A[u(t)]\big].$$

On montre de même que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction u est dérivable trois fois en t et

$$u'''(t) = A\Big[A\big[A[u(t)]\big]\Big]$$

Afin de poursuivre, nous définissons l'opérateur linéaire $A^0 \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$ comme étant l'identité, c'est-à-dire pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, $A^0[v] = v$. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $v \in \mathbb{R}^n$, nous posons

$$A^{k+1}[v] = A\big[A^k[v]\big].$$

Nous remarquons en particulier que $0^0[v] = v$ et $0^k[v] = 0$ si $k \ge 1$. (Cette convention, qui peut sembler perturbante, est celle qu'on adopte usuellement pour écrire la formule générale du polynôme de Taylor.) Notons aussi que si $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda A)^k[v] = \lambda^k A^k[v].$$

Par contre, en général, *les puissances d'opérateurs ne se distribuent pas rapport à la composition* $(A \circ B)^k = A^k \circ B^k$.

Nous pouvons montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, la fonction u est dérivable k fois en t et

$$u^{(k)}(t) = A^k\big[u(t)\big].$$

Le polynôme de Taylor T^k_{u,t_0} d'ordre $k \in \mathbb{N}$ de la fonction u en t_0 est donc donné pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$T^k_{u,t_0}(t) = \sum_{i=0}^{k} (t - t_0)^i \frac{A^i[u(t_0)]}{i!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\big((t - t_0)A\big)^i[u(t_0)]}{i!}.$$

Cela suggère de définir la fonction u au point t comme la limite de $T^k_{u,t_0}(t)$ quand k tend vers l'infini. Cela ne suffit malheureusement pas à définir une solution. En effet, en général, si $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe C^∞, $t \in \mathbb{R}$ et $t_0 \in \mathbb{R}$, la suite $\big(T^k_{u,t_0}(t)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas nécessairement quand $k \to \infty$ et dans le cas où elle converge, elle ne converge pas nécessairement vers $u(t)$.

1.1.2. Définitions et propriétés de l'exponentielle d'opérateur

Nous allons dans un premier temps prouver que la suite des polynômes de Taylor converge. Avant de commencer, rappelons que pour un opérateur linéaire $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n)$, la norme de A est donnée par

$$\|A\| = \sup\big\{\|A[v]\| \mid v \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|v\| \le 1\big\}.$$

On montre que le nombre $\|A\|$ est la racine carrée de la plus grande des valeurs propres de l'opérateur autoadjoint $A^* \circ A$ (qui sont toujours toutes réelles). Quand, comme souvent, la valeur précise de la norme n'est pas importante, on peut utiliser la majoration

$$\max_{1\le i\le n} \|A[e_i]\| \le \|A\| \le \Big(\sum_{i=1}^n \|A[e_i]\|^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

où les vecteurs $e_1, \dots, e_n$ forment une base orthonormée de l'espace $\mathbb{R}^n$. On montre par récurrence que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|A^k[v]\| \le \|A\|^k \|v\|.$$

Proposition 1.1 (Convergence du développement de Taylor de l'exponentielle d'opérateur) *Pour tout opérateur linéaire Soit $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n)$ et pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$, la suite de vecteurs*

$$\Big(\sum_{m=0}^k \frac{A^m[v]}{m!}\Big)_{k\in\mathbb{N}}$$

converge dans $\mathbb{R}^n$ et pour chaque $k \in \mathbb{N}$,

$$\Big\|\sum_{m=0}^k \frac{A^m[v]}{m!}\Big\| \le \mathrm{e}^{\|A\|}\|v\|.$$

Démonstration de la proposition 1.1. Nous allons montrer que la série converge par la propriété de sommabilité d'une suite de vecteurs par comparaison (proposition B.2). On a pour chaque $m \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\|A^m[v]\|}{m!} \le \frac{\|A\|^m\|v\|}{m!}.$$

Puisque, par la convergence de la série de Taylor de l'exponentielle, on a

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{m=0}^{k}\frac{\|A\|^m\|v\|}{m!}=\mathrm{e}^{\|A\|}\|v\|,$$

nous obtenons la conclusion par la propriété de sommabilité d'une suite de vecteurs par comparaison (proposition B.2). □

Nous pouvons définir

Définition 1.1 *Soit* $A\in\mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n)$ *un opérateur linéaire. L'*exponentielle *de* A *est l'application* $\mathrm{e}^A\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *définie pour chaque vecteur* $v\in\mathbb{R}^n$ *par*

$$\mathrm{e}^A[v]=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{k}\frac{A^i[v]}{i!}.$$

Cette définition a bien du sens puisque la suite du membre de droite converge par la proposition 1.1.

Remarquons qu'en vertu de notre convention que A^0 est l'application linéaire identité, on a pour chaque $v\in\mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{e}^0[v]=v.$$

En général, les opérateurs linéaires ne commutent pas entre eux : si $n\geq 2$ on peut trouver $A,B\in\mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n)$ tels que $A\circ B\neq B\circ A$ (penser par exemple à une rotation et une réflexion). Il est donc remarquable qu'un opérateur commute avec son exponentielle.

Proposition 1.2 (Commutation d'un opérateur avec son exponentielle) *Si* $A\in\mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n)$, *alors*

$$\mathrm{e}^A\circ A=A\circ\mathrm{e}^A.$$

Démonstration. On vérifie par récurrence que pour tout $m\in\mathbb{N}$,

$$A^m\circ A=A\circ A^m.$$

On a donc pour chaque $k\in\mathbb{N}$

$$\Bigl(\sum_{m=0}^{k}\frac{A^m}{m!}\Bigr)[A[v]]=A\Bigl[\sum_{m=0}^{k}\frac{A^m[v]}{m!}\Bigr],$$

et on conclut en prenant la limite quand $k\to\infty$ grâce à la définition 1.1 d'exponentielle d'opérateur. □

1.1.3. Dérivée de l'exponentielle d'opérateur

Nous voudrions maintenant vérifier que, étant donné un opérateur linéaire $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$ et un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$, la fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ définie pour chaque $t \in \mathbb{R}$ par

$$u(t) = \mathrm{e}^{tA}[v]$$

vérifie l'équation différentielle (1.1). Pour cela, nous voudrions calculer la dérivée de u. Pour l'instant, nous ne connaissons aucune propriété de régularité sur cette fonction u : nous ne savons pas si elle est continue voire dérivable.

Nous commençons par une propriété fort faible : nous allons démontrer que la fonction u est intégrable et satisfait une identité intégrale en tout point.

Proposition 1.3 (Identité intégrale pour l'exponentielle d'opérateur) *Soit $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$ et $v \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $s \mapsto \mathrm{e}^{sA}[v]$ est intégrable sur l'intervalle $[0, t]$ et*

$$\mathrm{e}^{tA}[v] = v + A\Big[\int_0^t \mathrm{e}^{sA}[v]\,\mathrm{d}s\Big].$$

Démonstration. Pour $k \in \mathbb{N}$, nous définissons la fonction $u_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ en posant pour chaque $t \in \mathbb{R}$,

$$u_k(t) = \sum_{m=0}^{k} \frac{(tA)^m[v]}{m!}.$$

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, la fonction u_k est un polynôme à valeurs vectorielles. La fonction u_k est donc dérivable et pour chaque $k \in \mathbb{N}_*$ et chaque $s \in \mathbb{R}$, nous avons

$$u_k'(s) = \sum_{m=0}^{k} m\frac{s^{m-1}(A)^m[v]}{m!} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{s^j(A)^{j+1}[v]}{j!} = A\Big[\sum_{j=0}^{k-1} \frac{s^j(A)^j[v]}{j!}\Big] = A[u_{k-1}(s)].$$

Par le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral (proposition B.7), nous avons pour chaque $t \in \mathbb{R}$

$$u_k(t) = u_k(0) + \int_0^t u_k'(s)\,\mathrm{d}s = v + \int_0^t A[u_{k-1}(s)]\,\mathrm{d}s = v + A\Big[\int_0^t u_{k-1}(s)\,\mathrm{d}s\Big].$$

Afin de conclure, nous allons passer à la limite $k \to \infty$ dans cette identité. Pour cela, notons tout d'abord que l'intégrand converge partout : pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{k\to\infty} u_{k-1}(s) = \mathrm{e}^{sA}[v].$$

De plus, l'intégrand est borné par une fonction intégrable, uniformément en $k \in \mathbb{N}$. En effet, par la proposition 1.1, on a pour tout $s \in \mathbb{R}$

$$\|u_{k-1}(s)\| \le \mathrm{e}^{|s|\|A\|}\|v\|.$$

En particulier, pour tout $s \in [0, t]$,

$$\|u_{k-1}(s)\| \leq \mathrm{e}^{|t|\|A\|}\|v\|$$

et la fonction constante $s \in [0, t] \mapsto \mathrm{e}^{|t|\|A\|}\|v\|$ est intégrable sur $[0, t]$. Par le théorème de convergence dominée (proposition B.12), la fonction $s \mapsto \mathrm{e}^{sA}[v]$ est intégrable sur $[0, t]$ et on trouve

$$\mathrm{e}^{tA}[v] = v + A\Big[\int_0^t \mathrm{e}^{sA}[v]\,\mathrm{d}s.\Big] \qquad \square$$

L'identité intégrale de la proposition 1.3, permet de calculer la dérivée de l'exponentielle d'opérateur.

Proposition 1.4 (Dérivée de l'exponentielle d'opérateur) *Soit $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}[v]$ est dérivable et pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{tA}[v] = A\big[\mathrm{e}^{tA}[v]\big].$$

Démonstration. Nous définissons les fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$ par

$$u(t) = \mathrm{e}^{tA}[v]$$

et

$$w(t) = \int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s.$$

L'identité intégrale de la proposition 1.3 se réécrit pour tout $t \in \mathbb{R}$ comme

$$u(t) = v + A[w(t)]. \tag{1.2}$$

Puisque la fonction u est intégrable sur tout intervalle borné, la fonction w est continue par la propriété de continuité de l'intégrale indéfinie (proposition B.10), d'où on déduit par (1.2) que la fonction u est continue par somme et composition de fonctions continues.

Ensuite, puisque la fonction u est continue, la fonction w est continûment dérivable par la propriété de dérivabilité de l'intégrale indéfinie (proposition B.11) et que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$w'(t) = u(t).$$

On déduit de (1.2), par somme et composition de fonctions dérivables que la fonction u est dérivable et que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$u'(t) = A[u(t)]. \qquad \square$$

1.1.4. Existence et unicité de solutions de systèmes linéaires

Nous allons maintenant utiliser les résultats de la section précédente pour démontrer l'existence et l'unicité de solutions de systèmes d'équations différentielles linéaires.

Proposition 1.5 (Systèmes d'équations linéaires et exponentielle) *Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, soit $t_0 \in I$, soit $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$, $u_0 \in \mathbb{R}^n$, soit $b \in C(I, \mathbb{R}^n)$ et soit $u : I \to \mathbb{R}^n$. La fonction u est dérivable et solution de*

$$\begin{cases} u'(t) = A[u(t)] + b(t) & \textit{pour tout } t \in I, \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

si et seulement pour tout $t \in I$,

$$u(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}\Big[u_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{(t_0-s)A}[b(s)]\,\mathrm{d}s\Big] = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}[u_0] + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{(t-s)A}[b(s)]\,\mathrm{d}s.$$

Pour simplifier la preuve, nous commençons par le cas homogène $b = 0$.

Démonstration de la proposition 1.5 dans le cas $b = 0$. Tout d'abord supposons que pour tout $t \in I$,

$$u(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}[u_0].$$

On a alors immédiatement $u(t_0) = u_0$ et par la proposition 1.4, pour tout $t \in I$,

$$u'(t) = A\big[\mathrm{e}^{(t-t_0)A}[u_0]\big] = A[u(t)].$$

Inversément, supposons que $u : I \to \mathbb{R}^n$ soit une solution. Fixons $t \in \mathbb{R}$ et définissons $v : I \to \mathbb{R}^n$ pour $s \in I$ par

$$v(s) = \mathrm{e}^{(t-s)A}[u(s)].$$

On a pour tout $s \in I$, par la proposition 1.2,

$$v'(s) = -\big(A \circ \mathrm{e}^{(t-s)A}\big)[u(s)] + \big(\mathrm{e}^{(t-s)A} \circ A\big)[u(s)] = 0.$$

Puisque I est un intervalle, v est constante. En particulier, on a

$$u(t) = v(t) = v(t_0) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}[u(t_0)] = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}[u_0]. \qquad \square$$

Nous avons la conséquence suivante :

Proposition 1.6 *Soit $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$. Pour chaque $s, t \in \mathbb{R}$,*

$$\mathrm{e}^{(t+s)A} = \mathrm{e}^{tA} \circ \mathrm{e}^{sA}.$$

Parmi les conséquences de la proposition précédente, pour chaque $t \in \mathbb{R}$, l'opérateur linéaire e^{tA} est inversible et $(\mathrm{e}^{tA})^{-1} = \mathrm{e}^{-tA}$.

Démonstration de la proposition 1.6. Soit $v \in \mathbb{R}^n$ et $s \in \mathbb{R}$ fixés. Posons, pour chaque $t \in \mathbb{R}$,

$$u(t) = \mathrm{e}^{(t+s)A}[v].$$

Par la proposition 1.4, on vérifie que pour chaque $t \in \mathbb{R}$,

$$u'(t) = A\bigl[\mathrm{e}^{(t+s)A}[v]\bigr].$$

Puisque $u(0) = \mathrm{e}^{sA}[v]$, on conclut par la proposition 1.5 que

$$u(t) = \mathrm{e}^{tA}\bigl[\mathrm{e}^{sA}[v]\bigr]. \qquad \square$$

L'idée fondamentale de cette preuve est qu'on peut traduire grâce à la proposition 1.5 les propriétés de l'exponentielle d'un opérateur en propriétés de solutions d'équations différentielles ordinaires. Il aurait été possible, mais assez fastidieux, de démontrer cette propriété à l'aide de la définition d'exponentielle d'un opérateur linéaire.

On peut résumer le contenu de la proposition 1.6 en disant que l'ensemble

$$\bigl\{\mathrm{e}^{tA} \mid t \in \mathbb{R}\bigr\}$$

est un sous-groupe du groupe $GL(\mathbb{R}^n)$ des transformations linéaires inversibles de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et que l'opérateur $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$ est un homomorphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $GL(\mathbb{R}^n)$.

Nous allons passer maintenant à la preuve du cas général.

Démonstration de la proposition 1.5 dans le cas général. Nous allons démontrer successivement les deux implications. Supposons que la fonction u ait la forme annoncée. Nous allons calculer la dérivée de u. Par la propriété de dérivation d'un produit, par la formule de la dérivée de l'exponentielle d'opérateur (proposition 1.4), la formule de dérivation d'une intégrale indéfinie (proposition B.11) et la propriété de composition des exponentielles (proposition **??**), on a pour chaque $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} u'(t) &= A \circ e^{(t-t_0)A}[u_0] + e^{(t-t_0)A} \circ A\Bigl[\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{(t_0-s)A}[b(s)]\,\mathrm{d}s\Bigr] + b(t) \\ &= A \circ e^{(t-t_0)A}\Bigl[u_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{(t_0-s)A}[b(s)]\,\mathrm{d}s\Bigr] + b(t) = A[u(t)] + b(t), \end{aligned}$$

grâce

Dans l'autre sens, supposons que la fonction $u : I \to \mathbb{R}^n$ soit une solution. Fixons $t \in \mathbb{R}$ et définissons la fonction $v : I \to \mathbb{R}^n$ pour $s \in I$ par

$$v(s) = \mathrm{e}^{(t-s)A}[u(s)].$$

On a, pour tout $s \in I$, par la formule de la dérivée de l'exponentielle d'opérateur (proposition 1.4) et la formule de dérivation d'un produit,

$$\begin{aligned} v'(s) &= -A\bigl[\mathrm{e}^{(t-s)A}[u(s)]\bigr] + \mathrm{e}^{(t-s)A}[u'(s)] \\ &= -A\bigl[\mathrm{e}^{(t-s)A}[u(s)]\bigr] + \mathrm{e}^{(t-s)A}\bigl[A[u(s)] + b(s)\bigr], \end{aligned}$$

puisque par hypothèse la fonction u est solution de l'équation différentielle. Par la propriété de commutation d'un opérateur avec son exponentielle (proposition 1.2), on en déduit que

$$v'(s) = \mathrm{e}^{(t-s)A}[b(s)]$$

et on conclut par le théorème fondamental que

$$u(t) = \mathrm{e}^{0}[u(t)] = v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{(t-s)A}[b(s)]\,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}[u_0] + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{(t-s)A}[b(s)]\,\mathrm{d}s.$$

En particulier, la solution u construite dans la première partie de la preuve satisfait cette identité, ce qui démontre la proposition. □

1.2. Équations différentielles et spectre d'opérateurs

Afin de comprendre le comportement de l'exponentielle d'un opérateur nous allons étudier les relations entre l'exponentielle d'un opérateur et le spectre de cet opérateur. Nous verrons en particulier que les solutions d'une équation différentielle ordinaire s'écrivent comme sommes de produits de polynômes, d'exponentielles et de fonctions trigonométriques.

1.2.1. Exponentielle et spectres d'opérateurs

La *théorie spectrale* décrit un opérateur linéaire à partir de ses *vecteurs propres* et *valeurs propres*. Si on travaille avec des valeurs propres réelles d'opérateurs linéaires sur des espaces vectoriels réels, ce projet ne peut pas être mené à bien. Par exemple, les rotations du plan $\mathbb{R}^2$ qui fixent l'origine $0 \in \mathbb{R}^2$ n'ont pas de valeur propre réelle (à moins d'être l'identité ou une symétrie centrale).

On est donc conduit à étudier les valeurs propres *complexes*. Formellement, si $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n)$, A définit naturellement un opérateur linéaire complexifié de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ que nous noterons aussi A : pour $v = w + \imath y \in \mathbb{C}^n$ avec $w, y \in \mathbb{R}^n$ on pose $A[v] = A[w] + \imath A[y]$. Si $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{C}^n)$, son spectre $\operatorname{spec} A$ est l'ensemble de ses valeurs propres

$$\operatorname{spec} A = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker(A - \lambda\,\mathrm{id}) \neq \{0\}\}.$$

Cet ensemble n'est pas vide : $\operatorname{spec} A \neq \emptyset$ (proposition A.5). Si $v \in \ker(A - \lambda\,\mathrm{id}) \setminus \{0\}$, on dit que v est un vecteur propre de A. En général, les vecteurs propres de A n'engendrent pas $\mathbb{C}^n$. Par contre, les *vecteurs propres généralisés* engendrent toujours $\mathbb{C}^n$ (proposition A.7). Le vecteur $v \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre généralisé d'ordre k associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ lorsque

$$v \in \ker(A - \lambda\,\mathrm{id})^k.$$

Les notions de vecteur propre et de vecteur propre généralisé d'ordre 1 sont équivalentes. Si on écrit

$$A[v] = \lambda v + w,$$

où $w = (A-\lambda)[v] \in \ker(A-\lambda\,\mathrm{id})^{k-1}$, on note que le vecteur v est un vecteur propre modulo $\ker(A-\lambda\,\mathrm{id})^{k-1}$. Par exemple, si v est un vecteur propre généralisé d'ordre $k = 2$ associé à la valeur propre λ, alors

$$A[v] = \lambda v + w,$$

où $w = A[v] - \lambda v$ est lui-même un vecteur propre.

Proposition 1.7 (Exponentielle d'opérateur et vecteur propre généralisé) *Soit $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n)$, soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ et $v \in \ker(A-\lambda\,\mathrm{id})^k$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a*

$$\mathrm{e}^{tA}[v] = \mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{t^i}{i!}(A-\lambda\,\mathrm{id})^i[v].$$

Démonstration. La proposition est vraie pour $k = 0$ puisque dans ce cas on a $\ker(A-\lambda)^0 = \ker \mathrm{id} = \{0\}$ et donc nécessairement $v = 0$. Supposons qu'elle soit vérifiée pour $k-1 \in \mathbb{N}$ et démontrons-la pour k.

Soit $v \in \ker(A-\lambda\,\mathrm{id})^k$. Définissons la fonction $w : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ pour $t \in \mathbb{R}$ par $w(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{tA}[v]$. On a $w(0) = v$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, par la propritété de commutation d'un opérateur avec son exponentielle (proposition 1.2)

$$w'(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} A\bigl[\mathrm{e}^{tA}[v]\bigr] - \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{tA}[v] = \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{tA}\bigl[A[v] - \lambda v\bigr].$$

Puisque $Av - \lambda v \in \ker(A-\lambda\,\mathrm{id})^{k-1}$, par hypothèse de récurrence, nous avons donc

$$w'(t) = \sum_{i=0}^{k-2} \frac{t^i}{i!}(A-\lambda\,\mathrm{id})^i\bigl[A[v]-\lambda v\bigr] = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}(A-\lambda\,\mathrm{id})^j[v].$$

On en conclut que

$$w(t) = v + \int_0^t w'(s)\,\mathrm{d}s = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{t^i}{i!}(A-\lambda\,\mathrm{id})^i[v]$$

et on calcule $\mathrm{e}^{tA}[v] = \mathrm{e}^{\lambda t} w(t)$. □

Par la proposition A.7, si $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} = \operatorname{spec} A$, on peut trouver des nombres $k_i \in \mathbb{N}_*$ tels que

$$\mathbb{C}^n = \ker(A-\lambda_1\,\mathrm{id})^{k_1} \oplus \dots \oplus \ker(A-\lambda_m\,\mathrm{id})^{k_m}.$$

On peut alors décrire complètement l'exponentielle d'un opérateur à l'aide de ses vecteurs propres et valeurs propres généralisées.

Proposition 1.8 (Structure de l'exponentielle par le spectre) *Soit* $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$*. Si*

$$\mathbb{C}^n = \ker(A - \lambda_1 \operatorname{id})^{k_1} \oplus \cdots \oplus \ker(A - \lambda_m \operatorname{id})^{k_m},$$

alors il existe $B_{i,j} \in \operatorname{Lin}(\mathbb{C}^n)$ *avec* $i \in \{1, \dots, m\}$ *et* $j \in \{0, \dots, k_i - 1\}$ *tels que*

$$e^{tA} = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{e}^{\lambda_i t} \sum_{j=0}^{k_i - 1} \frac{t^j}{j!} B_{i,j}.$$

De plus,

$$\operatorname{rang} B_{i,j} = \dim \ker(A - \lambda_i \operatorname{id})^{k_i} - \dim \ker(A - \lambda_i \operatorname{id})^{j}.$$

Démonstration. Soient $P_1, \dots, P_m$ les projections sur les espaces propres généralisés parallèlement aux autres espaces propres généralisés.

Soit $P_i \in \operatorname{Lin}(\mathbb{C}^n)$ la projection sur l'espace propre généralisé $\ker(A - \lambda_i)^{k_i}$ parallèlement aux autres espaces propres généralisé, c'est à dire P_i est défini de manière à ce que si $v \in \ker(A - \lambda_i \operatorname{id})^{k_i}$, on ait $P_i[v] = v$ et que si $v \in \ker(A - \lambda_j \operatorname{id})^{k_j}$ avec $j \in \{1, \dots n\} \setminus \{i\}$, on ait $P_i[v] = 0$. Puisque par hypothèse $\mathbb{C}^n = \ker(A - \lambda_1 \operatorname{id})^{k_1} \oplus \cdots \oplus \ker(A - \lambda_m \operatorname{id})^{k_m}$ est une somme directe, l'application P_i est bien définie. Par construction, pour tout $v \in \mathbb{C}^n$ et pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on a

$$P_i[v] \in \ker(A - \lambda_i \operatorname{id})^{k_i}.$$

Par la proposition 1.7 sur le calcul d'exponentielle sur des vecteurs propres généralisés, on a pour chaque $t \in \mathbb{R}$

$$e^{tA}[P_i[v]] = \mathrm{e}^{\lambda_i t} \sum_{j=0}^{k_i - 1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda_i \operatorname{id})^j \big[P_i[v]\big].$$

Si on définit pour $i \in \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{0, \dots, k_i - 1\}$,

$$B_{i,j} = (A - \lambda_i \operatorname{id})^j \circ P_i,$$

on vérifie que

$$e^{tA}[P_i[v]] = \mathrm{e}^{\lambda_i t} \sum_{j=0}^{k_i - 1} \frac{t^j}{j!} B_{i,j}[v]$$

et on conclut en notant que

$$v = \sum_{i=1}^{m} P_i[v]. \qquad \square$$

On peut observer dans la preuve que

$$\begin{aligned} \ker B_{i,j} = \ker(A - \lambda_1 \operatorname{id})^{k_1} \oplus \cdots \oplus \ker(A - \lambda_{i-1} \operatorname{id})^{k_{i-1}} \\ \oplus \ker(A - \lambda_i \operatorname{id})^{j} \oplus \ker(A - \lambda_{i+1} \operatorname{id})^{k_{i+1}} \oplus \cdots \oplus \ker(A - \lambda_m \operatorname{id})^{k_m}. \end{aligned}$$

Les formules pour des solutions obtenues ici sont intéressante d'un point de vue théorique, en permettant de comprendre le comportement des solutions en relation avec les propriétés spectrales de l'opérateur linéaire A. Cependant, elles sont d'un faible intérêt pour les calculs sur des exemples particuliers. Par exemple, pour $n \geq 5$, on sait qu'il n'y a pas de formule explicite pour les racines d'un polynôme. De plus, déterminer si un opérateur à des valeurs propres distinctes est un problème numériquement mal posé.

Une conséquence importante est la suivante :

Proposition 1.9 (Borne supérieure de l'exponentielle par le spectre) *Soient $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$ et $\sigma \in \mathbb{R}$. Si pour tout $\lambda \in \operatorname{spec} A$, on a $\sigma > \operatorname{Re}(\lambda)$, alors il existe une constante $C \in [1, +\infty[$ tel que pour tout $t \in [0, +\infty[$,*

$$\|\mathrm{e}^{tA}\| \leq C\mathrm{e}^{\sigma t}.$$

Cette proposition à deux défauts : on ne peut pas prendre $\sigma = \max\{\operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \operatorname{spec} A\}$ et la constante C n'est pas nécessairement 1. La valeur de σ ne peut pas être améliorée en général. Si $\lambda \in \operatorname{spec} A$ et $v \in \ker(A - \lambda\,\mathrm{id})^d \setminus \ker(A - \lambda\,\mathrm{id})^{d-1}$, alors par le calcul de l'exponentielle sur les vecteurs propres généralisés (proposition 1.7),

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\|e^{tA}[v]\|}{t^{d-1}\mathrm{e}^{\operatorname{Re}(\lambda)t}} = \frac{\|(A - \lambda\,\mathrm{id})^{d-1}v\|}{(d-1)!},$$

et donc si $d \geq 2$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\|e^{tA}[v]\|}{\mathrm{e}^{\operatorname{Re}(\lambda)t}} = +\infty.$$

Démonstration de la proposition 1.9. On écrit

$$\mathbb{C}^n = \ker(A - \lambda_1\,\mathrm{id})^{k_1} \oplus \cdots \oplus \ker(A - \lambda_m\,\mathrm{id})^{k_m},$$

avec $\lambda_i \in \operatorname{spec}(A)$ et $k_i \in \mathbb{N}_*$. Par la proposition 1.8 et l'inégalité triangulaire,

$$\|e^{tA}\| \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{k_i-1} \frac{|t^j\mathrm{e}^{\lambda_i t}|}{j!} \|B_{i,j}\|.$$

On note que pour chaque $j \in \{0, \dots, k_i - 1\}$ et $t \geq 0$

$$|t^j\mathrm{e}^{\lambda_i t}| = |t^j|\,\mathrm{e}^{\operatorname{Re}(\lambda_i)t} \leq \Big(\frac{j\mathrm{e}}{\sigma - \operatorname{Re}(\lambda_i)}\Big)^j \mathrm{e}^{\sigma t},$$

puisque, en résolvant explicitement le problème de maximisation d'exponentielle multipliée par un monôme, nous avons

$$\Big(\frac{j\mathrm{e}}{\sigma - \operatorname{Re}(\lambda_i)}\Big)^j = \max_{t\geq 0} \frac{t^j\mathrm{e}^{\operatorname{Re}(\lambda_i)t}}{\mathrm{e}^{\sigma t}}.$$

On a donc, par l'inégalité triangulaire et la formule de représentation de l'exponentielle de la proposition 1.8

$$\|\mathrm{e}^{tA}\| \leq C\mathrm{e}^{\sigma t}$$

où

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{k_i-1} \Bigl(\frac{j\,\mathrm{e}}{\sigma - \mathrm{Re}(\lambda_i)}\Bigr)^j \frac{\|B_{i,j}\|}{j!}. \qquad \square$$

Cette proposition peut aussi être utilisée pour étudier $\|\mathrm{e}^{tA}\|$ pour t négatif. En effet, pour $t \in \left]-\infty, 0\right[$, on a $\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{(-t)(-A)}$. Puisque $\ker(-A-\lambda) = \ker(A-(-\lambda))$, on a aussi, $\mathrm{spec}(-A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid -\lambda \in \mathrm{spec}\, A\}$, On en conclut que si

$$\mathrm{spec}\, A \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re} z > \sigma\},$$

alors, il existe $C \in [1, +\infty)$ tel que pour tout $t \in \left]-\infty, 0\right]$,

$$\|\mathrm{e}^{tA}\| \leq C\mathrm{e}^{\sigma t}.$$

On peut aussi obtenir une borne inférieure sur la norme à partir du spectre.

Proposition 1.10 (Borne inférieure sur l'exponentielle par le spectre) *Soit* $A \in \mathrm{Lin}\,(A)$. *Pour tout* $\lambda \in \mathrm{spec}\, A$, *il existe* $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *tel que pour tout* $t \in \mathbb{R}$

$$\|\mathrm{e}^{tA}[v]\| \geq \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\lambda)t}\|v\|.$$

En particulier, la proposition 1.10 implique que $\|e^{tA}\| \geq \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\lambda)t}$.

Démonstration de la proposition 1.10. Par définition du spectre et des valeurs propres d'une application linéaire, il existe un vecteur $\tilde{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $A[\tilde{v}] = \lambda v$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, nous prenons $v = \tilde{v}$ et on a par la proposition 1.7, $e^{tA}[v] = \mathrm{e}^{\lambda t} v$ et donc, puisque $\lambda = \mathrm{Re}(\lambda)$, $\|\mathrm{e}^{tA}[v]\| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\lambda)t}\|v\|$.

Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, nous considérons la fonction $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ définie pour $\varphi \in [0, 2\pi]$ par $g(\varphi) = \|\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{i\varphi})\|$. Cette fonction g est continue, et par le théorème des bornes atteintes (théorème B.4) il existe $\varphi_* \in [0, 2\pi]$ tel que pour tout $\varphi \in [0, 2\pi]$, $g(\varphi) \geq g(\varphi_*)$. Par périodicité de l'exponentielle complexe, nous en déduisons que pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$, on a $\|\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{i\varphi}\tilde{v})\| \geq \|\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{i\varphi_*}\tilde{v})\|$. Nous posons $v = \mathrm{Im}(\tilde{v}) \in \mathbb{R}^n$. Nous observons que $v \neq 0$. En effet, sinon nous aurions, $\mathrm{e}^{i\varphi_*}\tilde{v} \in \mathbb{R}^n$, et donc nous aurions $A[\tilde{v}] = \bar{\lambda}\tilde{v}$, d'où, puisque $\lambda \notin \mathbb{R}$, $\tilde{v} = 0$, ce qui serait absurde. Enfin, nous avons, par la proposition 1.7,

$$\mathrm{e}^{tA}[v] = \mathrm{e}^{tA}[\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{i\varphi_*}\tilde{v})] = \mathrm{Im}\bigl(\mathrm{e}^{tA}[\mathrm{e}^{i\varphi_*}\tilde{v})]\bigr) = \mathrm{Im}\bigl(\mathrm{e}^{(\lambda + i\varphi_*}\tilde{v}\bigr)$$

et donc

$$\|\mathrm{e}^{tA}[v]\| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\lambda)t}\|\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{i(\mathrm{Im}(\lambda)+\varphi_*)t}\tilde{v})\| \geq \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\lambda)t}\|\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{i(\varphi_*)t}\tilde{v})\| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\lambda)t}\|v\|. \qquad \square$$

1.2.2. Application aux équations différentielles scalaires d'ordre supérieur

On cherche une fonction $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable n fois et telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$w^{(n)}(t) + a_{n-1}w^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 w'(t) + a_0 w(t) = 0.$$

Définissons $u = (u_1, \ldots, u_n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et $i \in \{1, \ldots, n\}$, par $u_i(t) = w^{(i-1)}(t)$. La fonction u satisfait pour chaque $t \in \mathbb{R}$,

$$u'(t) = A[u(t)],$$

où $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$ est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Nous allons construire une base de solutions de ce problème linéaire.

On peut vérifier qu'un vecteur propre de l'opérateur A associé à la valeur propre λ est nécessairement de la forme $(1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1})$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$. Définissons la fonction $v : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, par $v(\lambda) = (1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on calcule

$$A[v(\lambda)] = \lambda v(\lambda) - \big(0, \ldots, 0, p(\lambda)\big),$$

où, pour alléger les notations, on a noté par $p(\lambda)$ le polynôme

$$p(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i.$$

En dérivant cette formule par rapport à la variable complexe λ, on obtient par récurrence que pour chaque $j \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$A[v^{(j)}(\lambda)] = \lambda v^{(j)}(\lambda) + j v^{(j-1)}(\lambda) - \big(0, \ldots, 0, p^{(j)}(\lambda)\big).$$

Si nous supposons que λ est une racine d'ordre $k \in \mathbb{N}_*$ du polynôme p, alors pour tout $j \in \{0, \ldots, k-1\}$, $p^{(j)}(\lambda) = 0$ et

$$(A - \lambda \operatorname{id})\big[v^{(j)}(\lambda)\big] = j v^{(j-1)}(\lambda).$$

Nous avons donc montré que

$$v^{(j)}(\lambda) \in \ker(A - \lambda \operatorname{id})^{j+1}.$$

Si $p(\lambda) = \prod_{i=1}^{m}(\lambda - \lambda_i)^{k_i}$, nous allons montrer que les n vecteurs $v^{(j)}(\lambda_i)$ pour $1 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq k_i - 1$ engendrent l'espace $\mathbb{C}^n$. Soit V le sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs. Supposons que $b = (b_1, \dots, b_n) \in V^{\perp}$. Alors, si nous posons

$$q(\lambda) = \sum_{\ell=0}^{n-1} b_{\ell+1}\lambda^{\ell},$$

on a pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{0, \dots, k_i - 1\}$,

$$(b|v^{(j)}(\lambda_i)) = q^{(j)}(\lambda_i).$$

Par hypothèse, nous avons donc que pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{0, \dots, k_i - 1\}$,

$$q^{(j)}(\lambda_i) = 0.$$

Cela signifie que le polynôme q est divisible par le polynôme p. Puisque le degré de q est inférieur à $n - 1$, on a nécessairement $q = 0$. On a donc prouvé que $V^{\perp} = \{0\}$ et donc $V = \mathbb{C}^n$.

En remarquant que

$$(A - \lambda_i \,\mathrm{id})^k(v^{(j)}(\lambda_i)) = \begin{cases} \dfrac{j!}{(j-k)!}v^{(j-k)}(\lambda_i) & \text{si } k < j, \\ 0 & \text{si } k \geq j, \end{cases}$$

on obtient, grâce à la proposition 1.5, les calculs ci-dessus et la proposition 1.8.

Proposition 1.11 (Structure des solutions d'équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants) *Supposons que*

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_i)^{k_i}.$$

La fonction u satisfait l'équation

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_0 u = 0$$

si et seulement si il existe $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$, avec $i \in \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{0, \dots, k_i - 1\}$ tels que

$$u(t) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{k_i-1} \alpha_{ij}\frac{t^i}{i!}\mathrm{e}^{\lambda_i t}.$$

Compléments

Propriété algébrique de l'exponentielle

Plus généralement, on a

Proposition 1.12 (Commutativité de l'exponentielle d'opérateur) *Soient* $A, B \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$*. Si* $A \circ B = B \circ A$*, alors*

$$e^A \circ e^B = e^{A+B} = e^B \circ e^A.$$

L'hypothèse $A \circ B = B \circ A$ est *essentielle.*

Inégalités pour l'exponentielle

On peut démontrer que l'exponentielle d'opérateur est continue par l'inégalité de la proposition suivante.

Proposition 1.13 (Continuité de l'exponentielle d'opérateur) *Soient* $A, B \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$*. On a*

$$\|e^A - e^B\| \le \|A - B\| \frac{e^{\|A\|} + e^{\|B\|}}{2}.$$

Démonstration. Posons

$$v(t) = e^{tA} \circ e^{(1-t)B}.$$

On a

$$v'(t) = e^{tA} \circ (A - B) \circ e^{(1-t)B},$$

et donc pour $t \in [0, 1]$,

$$\|v'(t)\| \le e^{t\|A\|} \|A - B\| e^{(1-t)\|B\|} \le \|A - B\| \big(te^{\|A\|} + (1-t)e^{\|B\|}\big),$$

d'où on conclut par intégration. □

On a aussi une condition sur A qui permet d'améliorer la borne de la proposition 1.9.

Proposition 1.14 (Condition de la résolvante de Hille-Yosida) *Soit* $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$*,* $C \in [1, +\infty[$ *et* $\sigma \in \mathbb{R}$*. On a pour tout* $t \in [0, +\infty)$*,*

$$\|e^{tA}\| \le Ce^{\sigma t}$$

si et seulement si pour tout $\lambda \in]\sigma, +\infty[$ *et* $k \in \mathbb{N}_*$*,*

$$\|(\lambda \operatorname{id} - A)^{-k}\| \le \frac{C}{(\lambda - \sigma)^k}.$$

Démonstration. Pour la condition nécessaire, on a pour chaque $k \in \mathbb{N}_*$ et pour chaque $v \in \mathbb{R}^n$, par récurrence et par intégration par parties, si $\operatorname{Re}\lambda > \sigma$,

$$v = (\lambda \operatorname{id} - A)^k \int_0^\infty \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} e^{tA}[v] \, dt.$$

On en déduit que $(\lambda \operatorname{id} - A)^k$ est inversible,

$$(\lambda \operatorname{id} - A)^{-k}[v] = \int_0^\infty \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{e}^{tA}[v] \, \mathrm{d}t$$

et donc

$$\|(\lambda \operatorname{id} - A)^{-k}\| \leq C \int_0^\infty \frac{t^{k-1}}{k-1} \mathrm{e}^{-(\lambda-\sigma)t} \, \mathrm{d}t = \frac{C}{(\lambda-\sigma)^k}.$$

Pour la condition suffisante, soit $v \in \mathbb{R}^n$ et posons pour $t \geq 0$ et $\lambda \in]0, +\infty[$,

$$u_\lambda(t) = \mathrm{e}^{t\lambda^2(\lambda \operatorname{id} - A)^{-1}}[\mathrm{e}^{-\lambda t} v]$$

On note que pour chaque $\lambda > \sigma$ et $t > 0$,

$$\|\mathrm{e}^{t\lambda^2(\lambda \operatorname{id} - A)^{-1}}\| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{t^k \lambda^{2k}}{k!} \|(\lambda \operatorname{id} - A)^{-k}\| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{t^k \lambda^{2k}}{k!} \frac{C}{(\lambda - \sigma)^k} = C\mathrm{e}^{\frac{t\lambda^2}{\lambda - \sigma}}.$$

On a donc

$$\|u_\lambda(t)\| \leq C\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{\lambda-\sigma}t - \lambda t}\|v\| \leq C\mathrm{e}^{\sigma t}\|v\|.$$

D'autre part on a

$$u_\lambda(t) = \mathrm{e}^{t(\lambda^2(\lambda - A)^{-1} - \lambda \operatorname{id})}[v].$$

Notons enfin que

$$\lambda^2(\lambda - A)^{-1} - \lambda \operatorname{id} - A = A(\lambda - A)^{-1}A.$$

Ce qui montre que

$$\|\lambda^2(\lambda - A)^{-1} - \lambda \operatorname{id} - A\| \leq \|A\|^2 \frac{C}{\lambda - \sigma}.$$

On obtient la conclusion par la proposition 1.13, en faisant tendre $\lambda \to \infty$. $\square$

Opérateurs autoadjoints

Pour certains vecteurs, il est particulièrement simple de calculer l'exponentielle d'un opérateur linéaire. Supposons que $v \in \mathbb{R}^n$ soit un vecteur propre, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A[v] = \lambda v$.

Proposition 1.15 *Soit $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $A[v] = \lambda v$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a*

$$\mathrm{e}^{tA}[v] = \mathrm{e}^{\lambda t} v.$$

Démonstration. On définit la fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ par $u(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} v$. On a $u(0) = v$ et, pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} v$. Par hypothèse, on a donc $u'(t) = A[u(t)]$. Par la proposition 1.5, on conclut que $u(t) = \mathrm{e}^{tA}[v]$. $\square$

Si nous supposons que A est auto-adjointe, c'est-à-dire que pour tout $v, w \in \mathbb{R}^n$,

$$(w|A[v]) = (A[w]|v),$$

on démontre (proposition A.12) qu'il existe une base orthonormée $q_1, \dots, q_n$ de $\mathbb{R}^n$ de vecteurs propres de valeurs propres associées $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Autrement dit, pour chaque $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $(q_i|q_j) = \delta_{ij}$ et pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$A[q_i] = \lambda_i q_i.$$

Puisque pour chaque $v \in \mathbb{R}^n$,

$$v = \sum_{i=1}^{n} (q_i|v) q_i,$$

on peut déterminer complètement e^{tA}

$$\mathrm{e}^{tA}[v] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda_i t} (q_i|v) q_i. \tag{1.3}$$

Le spectre $\operatorname{spec} A$ d'un opérateur auto-adjoint A est l'ensemble de ses valeurs propres :

$$\operatorname{spec} A = \big\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \ker(A - \lambda \operatorname{id}) \neq \{0\}\big\}$$

Autrement dit, $A - \lambda \operatorname{id}$ est inversible si et seulement si $\lambda \notin \operatorname{spec} A$. Le nombre d'éléments de l'ensemble $\operatorname{spec} A$ est toujours fini.

On a la proposition suivante

Proposition 1.16 *Si $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$ est un opérateur auto-adjoint et*

$$\sigma = \max \operatorname{spec} A,$$

pour chaque $t \geq 0$,

$$\|\mathrm{e}^{tA}\| = \mathrm{e}^{\sigma t}.$$

Démonstration. Puisque $\operatorname{spec} A$ est un ensemble fini, $\sigma \in \operatorname{spec} A$. Il existe donc $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $A[v] = \sigma v$. On a alors, par la proposition 1.15, pour chaque $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^{tA}[v] = \mathrm{e}^{\sigma t} v,$$

d'où on déduit que

$$\|\mathrm{e}^{tA}\| \geq \mathrm{e}^{\sigma t}.$$

Supposons maintenant que $v \in \mathbb{R}^n$. On a par la forme (1.3), pour chaque $t \in \mathbb{R}$,

$$\|\mathrm{e}^{tA}[v]\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{2\lambda_i t} (v|q_i)^2.$$

Par hypothèse, pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_i \le \sigma$. Par conséquent, pour tout $t \ge 0$, on a $\mathrm{e}^{2\lambda_i t} \le \mathrm{e}^{2\sigma t}$. On en conclut que

$$\|\mathrm{e}^{tA}[v]\|^2 \le \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{2\sigma t}(v|q_i)^2 = \mathrm{e}^{2\sigma t}\|v\|^2.$$

On en conclut que pour tout $t \ge 0$,

$$\|\mathrm{e}^{tA}\| \le \mathrm{e}^{\sigma t}. \qquad \square$$

La proposition 1.16 peut être vue comme la conséquence des deux propriétés suivantes

$$\|A\| = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \operatorname{spec} A\}$$

et

$$\operatorname{spec} e^A = \big\{\mathrm{e}^\lambda \mid \lambda \in \operatorname{spec} A\big\}.$$

Calcul explicite en dimension 2

Soit $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^2)$. Si on pose $\alpha = \operatorname{tr} A/2$ et $\Delta = \det A - \alpha^2 = \det(A - \alpha \operatorname{id})$, on peut écrire

$$e^{tA} = \begin{cases} e^{\alpha t}\Big(\cosh(\sqrt{\Delta}t)\operatorname{id} + \dfrac{\sinh(\sqrt{\Delta}t)}{\sqrt{\Delta}}(A - \alpha \operatorname{id})\Big) & \text{si } \Delta > 0,\\ e^{\alpha t}\big(I + t(A - \alpha \operatorname{id})\big) & \text{si } \Delta = 0,\\ e^{\alpha t}\Big(\cos(\sqrt{-\Delta}t)\operatorname{id} + \dfrac{\sin(\sqrt{-\Delta}t)}{\sqrt{-\Delta}}(A - \alpha \operatorname{id})\Big) & \text{si } \Delta < 0. \end{cases}$$

Ces formules s'obtiennent en observant que $A^2 = 2\alpha A - \det A I$ (théorème de Cayley–Hamilton).

Résolution à l'aide d'une équation d'ordre supérieur

La résolution d'un système différentiel autonome peut toujours se réduire à l'étude d'équations scalaires d'ordre supérieur. En effet,

$$\begin{cases} u'(t) = A[u(t)], & \text{pour } t \in \mathbb{R},\\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

est équivalent à

$$\begin{cases} u^{(k)}(t) = A^k[u(t)] & \text{pour } t \in \mathbb{R},\\ u^{(i)}(0) = A^i[u_0] & \text{pour } i \in \{0, \dots, k-1\}. \end{cases}$$

Si on sait que

$$A^k = \sum_{i=0}^{k-1} a_i A^i,$$

on a alors

$$\begin{cases} u^{(k)}(t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} a_i u^{(i)}(t) & \text{pour } t \in \mathbb{R}, \\ u^{(i)}(0) = A^i[u_0] & \text{pour } i \in \{0, \ldots, k-1\}, \end{cases}$$

où dans l'équation différentielle les coefficients sont maintenant des *scalaires*.

On peut vérifier que cette réduction est encore vraie dans le cas où on a seulement $A^k[u_0] = \sum_{i=0}^{k-1} a_i A^i[u_0]$, car alors $u(t)$ est dans l'espace engendré par $u_0, \ldots, A^{(k-1)}(u_0)$ et on a l'identité qu'il faut sur cet espace.

Calcul de l'exponentielle d'un opérateur

De nombreuses méthodes ont été proposées et implémentées pour calculer l'exponentielle d'un opérateur linéaire. Une méthode numérique utilisée dans les logiciels de calcul pour calculer l'exponentielle d'un opérateur consiste à utiliser une approximation de Padé de l'exponentielle. Cela consiste à utiliser une fraction rationnelle de la forme

$$R_{p,q}(A) = \big(N_{q,p}(-A)\big)^{-1} N_{p,q}(A),$$

où

$$N_{p,q}(A) = \sum_{j=0}^{p} \frac{(p+q-j)!p!}{(p+q)!j!(p-j)} A^j.$$

Cette formule converge quand p et q tendent vers l'infini. Cependant, elle génèrent de grandes erreurs d'arrondi quand $\|A\|$ est grand. Pour contourner cela, lorsque $\|A\|$ est grand, on calcule

$$\mathrm{e}^{2^{-k}A},$$

et on élève le résultat k fois au carré [1].

Références

[1] Cleve Moler and Charles Van Loan, *Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later*, SIAM Rev. **45** (2003), no. 1, 3–49.

Exercices

Exponentielle matricielle

Exercice 1.1 Calculer à partir de la définition l'exponentielle des opérateurs représentés par les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.2 Soit $P \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n)$ telle que $P \circ P = P$ (P est un projecteur). Calculer e^{tP} pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.3 Soit $S \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n)$ telle que $S \circ S = \mathrm{id}$ (S est une involution). Calculer e^{tS} pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.4 Soit $N \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n)$ telle que $N \circ N = 0$ (N est *nilpotent* d'ordre 1). Calculer e^{tN} pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.5 Soit $N \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n)$ telle que $N^k = 0$ (N est *nilpotent*). Calculer e^{tN} pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.6 Soit $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n)$. Calculer e^{A^*} en fonction de e^{A}, où A^* désigne l'opérateur adjoint de A.

Exercice 1.7 Calculez en résolvant des équations différentielles, e^{tA} où $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ est représenté par les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.8 Soit $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n)$ et $B \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n)$. Montrez que si $A \circ B = B \circ A$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{e}^{tA} \circ B = B \circ \mathrm{e}^{tA}$$

et

$$\mathrm{e}^{t(A+B)} = \mathrm{e}^{tA} \circ \mathrm{e}^{tB}.$$

Exercice 1.9 Donner un exemple d'application linéaire non nulle $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^2)$ telle que

$$\mathrm{e}^{A} = \mathrm{id}\,.$$

Exercice 1.10 Soit $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n)$. Donner une condition suffisante sur A de sorte que

$$\|\mathrm{e}^{A}\| = 1.$$

Dans quelle mesure cette condition est-elle nécessaire ?

Exercice 1.11 Soit $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(A[x]|x) \leq \alpha \|x\|^2.$$

Montrer que pour chaque $t \in [0, \infty[$,

$$\|\mathrm{e}^{tA}[v]\| \leq \mathrm{e}^{t\alpha}\|v\|.$$

Exercice 1.12 Donner une condition suffisante sur $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$ pour que
- e^A soit triangulaire supérieure,
- e^A soit triangulaire inférieure,
- e^A soit diagonale.

Exercice 1.13 Soit $V \subset \mathbb{R}^n$. Relier par des relations d'implication les propositions suivantes entre elles :

(a) $A[V] \subseteq V$,

(b) $\mathrm{e}^A[V] \subseteq V$,

(c) pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{tA}[V] \subseteq V$.

Relier ces résultats aux relations entre exponentielle et matrices triangulaires et triangulaires supérieures.

Exercice 1.14 Soit $B \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^2)$ représenté par

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Peut-on trouver $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^2)$ tel que $B = \mathrm{e}^A$?

Exercice 1.15 Calculer à partir des propriétés du cours, e^{tA_μ} où $A_\mu \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^2)$ est représenté par

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+\mu \end{pmatrix}.$$

Observer le comportement de e^{tA_μ} quand μ tend vers 0.

Exercice 1.16 Soit $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$, $f \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ et soit $\mu < 0$ tel que pour tout $\lambda \in \operatorname{spec} A$, $\operatorname{Re}(\lambda) < \mu$ et $\int_0^\infty |f(s)| \mathrm{e}^{-\mu s} \,\mathrm{d}s < +\infty$. Montrer que si pour tout $t \in [0, \infty[$,

$$u'(t) = A[u(t)] + f(t),$$

alors $\lim_{t \to \infty} u(t) = 0$.

Exercice 1.17 Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel. Montrer que si $A[V] \subseteq V$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^{tA}[V] \subseteq V.$$

Exercice 1.18 Soit $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n)$. Prouver que l'équation

$$u'(t) = A\big[u(t)\big]$$

possède une solution non triviale u telle que $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \operatorname{spec} A$ tel que $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.

Exercice 1.19 Soit $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n)$. Prouver que l'équation

$$u'(t) = A\big[u(t)\big]$$

possède une solution non triviale bornée si et seulement s'il existe $\lambda \in \operatorname{spec} A$ tel que $\mathrm{Re}\lambda = 0$.

Exercice 1.20 Soit $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n)$. Prouver que l'équation

$$u'(t) = A\big[u(t)\big]$$

possède une solution non triviale de période T si et seulement si

$$\frac{\imath 2\pi}{T}\mathbb{Z} \cap \operatorname{spec} A \neq \emptyset.$$

Équations d'ordre supérieur

Exercice 1.21 Écrire une formule pour les solutions des équations suivantes en fonction des données initiales et de la donnée $f \in C(\mathbb{R})$ et du paramètre λ éventuel.

$$w''(t) - 4w'(t) - 5w(t) = f(t), \tag{a}$$
$$w''(t) - \lambda w(t) = f(t). \tag{b}$$

Exercice 1.22 Supposons que $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ décrive le comportement d'un oscillateur harmonique forcé :

$$u''(t) = -\kappa u(t) + f(t) \quad t \in \mathbb{R}$$

où $\kappa \in \mathbb{R}^+$ et f est un terme de force. Donnez une condition suffisante sur f pour que u soit bornée.

Exercice 1.23 On considère le problème de l'oscillateur harmonique amorti forcé

$$u''(t) = -bu'(t) - \omega^2 u(t) + f(t) \qquad t \in \mathbb{R}$$

où $\omega \in \mathbb{R}$ et f est un terme de force. Donnez une condition suffisante sur f pour que $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$.

Exercice 1.24 (Équation différentielle d'Euler) On considère l'équation

$$u^{(n)}(t) + \frac{a_{n-1}}{t} u^{(n-1)}(t) + \cdots + \frac{a_0}{t^n} u(t) = 0.$$

On définit le polynôme

$$p(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} a_n \prod_{j=0}^{i-1} (\lambda - j),$$

où on a posé $a_n = 1$. Si λ_i sont les racines du polynôme p, de multiplicité d_i, montrer que toute solution s'écrit sous la forme

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} t^{\lambda_i} \sum_{j=0}^{d_i - 1} (\ln t)^j.$$

Comment interprète-t-on ceci si les racines ne sont pas toutes réelles ?

2. Systèmes linéaires à coefficients variables

Matières

2.1. Théorème d'existence 39
2.2. Théorème d'unicité 42
2.3. Structure géométrique de l'ensemble des solutions 45
2.3.1. Systèmes différentiels du premier ordre 45
2.3.2. L'espace des solutions 45
2.3.2.1. Équations d'ordre supérieur 46
2.3.3. Résolvante 47
2.3.3.1. Définition et propriétés de la résolvante 47
2.3.3.2. Résolvante et système affin 50
2.3.3.3. Calcul de résolvante 51
2.4. Changements de variables facilitant le calcul de solutions 53
2.4.1. Variation des constantes 53
2.4.1.1. Système d'équations 53
2.4.1.2. Équation du second ordre 55
2.4.2. Réduction d'ordre 56
2.4.2.1. Système d'équations 56
2.4.2.2. Équation du second ordre 58
2.4.2.3. Équation d'ordre supérieur 59
Exercices 65

Prérequis

- ☞ Algèbre linéaire : trace et déterminant,
- ☞ Analyse vectorielle : suites de Cauchy de vecteurs,
- ☞ Calcul intégral : théorème de convergence dominée.

Questionnaire de révision

- ☞ Démontrer l'existence d'une solution pour un problème aux valeurs initiales linéaire ou affin à coefficients variables.

- ☞ Démontrer l'unicité de la solution pour un problème aux valeurs initiales linéaire ou affin à coefficients variables.
- ☞ Démontrer que l'espace des solutions d'un problème linéaire dans $\mathbb{R}^n$ à coefficients variables est de dimension n et caractériser une base par une condition sur les valeurs de ces solutions en un point.
- ☞ Définissez la résolvante.
- ☞ Donnez un exemple de résolvante d'un système à coefficient variable.
- ☞ Exprimez la solution d'un problème affin à coefficients variables à l'aide de la résolvante.
- ☞ Donnez des exemples d'application de la méthode de réduction d'ordre à l'étude d'équations différentielles du second ordre.

Exercices prioritaires : 2.10, 2.11, 2.12, 2.13.

2.1. Théorème d'existence

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, nous cherchons une fonction $u : I \to \mathbb{R}^n$ qui soit dérivable et telle que

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)[u(t)] + f(t) & \text{pour chaque } t \in I, \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

La fonction $A : I \to \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$ est une application de l'intervalle I dans l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui donne les coefficients de l'équation différentielle. Pour chaque $t \in I$, $A(t)$ est une application linéaire et si on fixe en plus un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$, alors $A(t)[v]$ est le vecteur obtenu en appliquant l'application $A(t)$ au vecteur v. Pour chaque $t \in I$, l'application linéaire $A(t)$ peut être représentée par une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

où pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, les entrées $a_{ij} : I \to \mathbb{R}$ sont données par des fonctions réelles. Toutes les entrées de cette matrice peuvent donc dépendre de t.

Nous supposerons que la fonction $A : I \to \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$ est continue. Cette condition est équivalente à supposer que pour chaque $v \in \mathbb{R}^n$, la fonction $t \in I \mapsto A(t)[v]$ est continue ou encore que si A est représentée par (2.2), la fonction $a_{ij} : I \to \mathbb{R}$ est continue pour chaque $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Si A est une application continue, on démontre que $t \in I \mapsto A(t)[u(t)]$ est une fonction continue.

Proposition 2.1 *Soient $I \subseteq \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$, $A : I \to \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$, $u : I \to \mathbb{R}^n$. Si A et u sont continues en s, alors la fonction $A[u] : I \to \mathbb{R}^n$ pour chaque $t \in I$ par*

$$A[u](t) = A(t)\big[u(t)\big].$$

est continue en s.

Nous allons démontrer que le problème (2.1) possède une solution.

Proposition 2.2 *Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $t_0 \in I$, $A \in C(I, \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n))$ et $f \in C(I, \mathbb{R}^n)$. Il existe une fonction $u : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable telle que*

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)[u(t)] + f(t) & \textit{pour chaque } t \in I, \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Une première idée de preuve pourrait consister à écrire un développement en série de Taylor de u. On calculerait ainsi pour chaque $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
u'(t) &= A(t)[u(t)] + f(t),\\
u''(t) &= A'(t)[u(t)] + A(t)\big[A(t)[u(t)] + f(t)\big] + f'(t),\\
u'''(t) &= A''(t)[u(t)] + 2A'(t)\big[A(t)[u(t)] + f(t)\big] + A(t)\big[A'(t)[u(t)] + f'(t)\big]\\
&\quad + A(t)\big[A(t)\big[A(t)[u(t)] + f(t)\big]\big] + f''(t),\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

Les calculs deviennent rapidement complexes et demandent des hypothèses fortes de régularité sur A et sur f. De plus, il faudrait imposer des conditions encore plus fortes sur A et f qui assurent la convergence de la série de Taylor associée.

On pourrait aussi essayer de poser, dans le cas où $f = 0$, $u(t) = \mathrm{e}^{\int_{t_0}^t A(s)\,\mathrm{d}s}$. Malheureusement, cette formule ne donne pas une solution de l'équation différentielle, parce qu'en général

$$\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t+h} A(s)\,\mathrm{d}s} \neq \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} A(s)\,\mathrm{d}s} \circ \mathrm{e}^{\int_{t}^{t+h} A(s)\,\mathrm{d}s}$$

et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} A(s)\,\mathrm{d}s} \neq A(t) \circ \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} A(s)\,\mathrm{d}s}.$$

Exemple 2.1 On considère le problème suivant

$$u'(t) = A(t)u(t).$$

où pour chaque $t \in \mathbb{R}$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule

$$\int_0^t A(s)\,\mathrm{d}s = \begin{pmatrix} t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathrm{e}^{\int_0^t A(s)\,\mathrm{d}s} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & t\frac{\mathrm{e}^t-1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

mais

$$\frac{d}{dt}\mathrm{e}^{\int_0^t A(s)\,\mathrm{d}s} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & t\frac{(1+t)\mathrm{e}^t-1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & t\frac{\mathrm{e}^t+1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & t\frac{\mathrm{e}^t-1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration de la proposition 2.2. Nous allons définir une suite de solutions approchées par récurrence. Posons pour $t \in I$,

$$u_1(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Supposons que la fonction $u_{k-1} : I \to \mathbb{R}^n$ est définie pour $k \in \mathbb{N}_*$ et posons pour $t \in I$,

$$u_k(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)[u_{k-1}(s)] + f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Afin de contrôler la norme des données, nous fixons des points $a, b \in I$ tels que $t_0 \in [a, b]$, et nous posons

$$L = \max\{\|A(t)\| \mid t \in [a, b]\}$$

et

$$K = \|u_0\| + \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Nous allons maintenant démontrer que la suite $(u_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ converge pour chaque $t \in I$. On montre d'abord que pour chaque $t \in [a, b]$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$\|u_{k+1}(t) - u_k(t)\| \leq K \frac{\big(L|t - t_0|\big)^k}{k!}. \tag{2.3}$$

On observe tout d'abord que pour chaque $t \in [a, b]$,

$$u_2(t) - u_1(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)\Big[u_0 + \int_{t_0}^{s} f(r)\,\mathrm{d}r\Big]\,\mathrm{d}s,$$

d'où on déduit que

$$\|u_2(t) - u_1(t)\| \leq KL\,|t - t_0|.$$

Supposons maintenant qu'on ait (2.3) pour $k - 1$. On calcule pour $t \in [a, b]$

$$u_{k+1}(t) - u_k(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)[u_k(s) - u_{k-1}(s)]\,\mathrm{d}s$$

et donc

$$\begin{aligned}
\|u_{k+1}(t) - u_k(t)\| &\leq \int_{[t_0,t]} \|A(s)\|\|u_k(s) - u_{k-1}(s)\|\,\mathrm{d}s \\
&\leq \int_{[t_0,t]} LK \frac{(L|s - t_0|)^{k-1}}{(k-1)!}\,\mathrm{d}s \\
&= K \frac{(L|t - t_0|)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Puisque nous avons un développement en série de l'exponentielle tronquée du premier terme

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{m=1}^{k} K \frac{(L|t - t_0|)^m}{m!} = K(\mathrm{e}^{L|t-t_0|} - 1),$$

et que

$$u_k(t) = u_1(t) + \sum_{m=1}^{k-1} (u_{m+1}(t) - u_m(t)), \tag{2.4}$$

par la proposition B.2, la suite $(u_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Définissons la fonction $u :\to \mathbb{R}^n$ pour tout temps $t \in I$ par

$$u(t) = \lim_{k\to\infty} u_k(t).$$

Nous voulons montrer que la fonction u est une solution au problème posé. Puisque pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{k+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)[u_k(s)] + f(s)\,\mathrm{d}s,$$

il suffit de passer à la limite dans cette identité par le théorème de convergence dominée.

Par l'inégalité triangulaire, par (2.4) et par (2.3), on a

$$\|u_k(t)\| \le \|u_1(t)\| + \sum_{m=1}^{k-1} K \frac{(L|t-t_0|)^m}{m!} \le K + K(\mathrm{e}^{L|t-t_0|} - 1).$$

Puisque la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie pour $t \in [a, b]$ par $g(t) = K\mathrm{e}^{L|t-t_0|}$ est intégrable sur $[a, b]$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée (proposition B.12), par lequel u est intégrable et

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)[u(s)] + f(s)\,\mathrm{d}s.$$

On montre ensuite par les propositions B.10 et B.11 que la fonction u est successivement continue et dérivable et que pour chaque $t \in \,]a, b[$,

$$u'(t) = A(t)[u(t)] + f(t).$$

Puisque $[a, b] \subset I$ est un intervalle fermé borné arbitraire et I est un intervalle ouvert, u est dérivable et satisfait l'équation sur tout l'intervalle I. □

2.2. Théorème d'unicité

Nous allons maintenant montrer que le problème (2.1) admet au plus une solution. Pour cela, nous allons montrer que si nous avons deux solutions au problème, ces solutions sont égales.

Proposition 2.3 *Soient* $u_1 : I \to \mathbb{R}^n$ *et* $u_2 : I \to \mathbb{R}^n$ *des fonctions dérivables telles que pour* $i \in \{1, 2\}$,

$$\begin{cases} u_i'(t) = A(t)[u_i(t)] + f(t) & \text{pour chaque } t \in I, \\ u_i(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Alors pour chaque $t \in I$,

$$u_1(t) = u_2(t).$$

Pour prouver ce résultat nous aurons besoin du résultat suivant

Proposition 2.4 *Soit* $I \subseteq \mathbb{R}$ *un intervalle ouvert,* $t_0 \in I$, $f : I \to [0, +\infty[$ *une fonction intégrable et* $L \in [0, +\infty[$*. Si pour tout* $t \in I$,

$$f(t) \le L \int_{[t_0,t]} f(s)\,\mathrm{d}s,$$

alors pour tout $t \in I$,

$$f(t) = 0.$$

Démonstration. On démontre tout d'abord par récurrence que pour chaque $k \in \mathbb{N}$ et $t \in I$,

$$f(t) \le L \int_{[t_0,t]} \frac{(L|t-s|)^k}{k!} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

L'inégalité est vraie par hypothèse pour $k = 0$. Supposons-la vraie pour $k \in \mathbb{N}$. Alors, par l'hypothèse de récurrence et l'hypothèse de la proposition, on obtient

$$\begin{aligned} f(t) &\le L \int_{[t_0,t]} \frac{(L|t-s|)^k}{k!} f(s)\,\mathrm{d}s \\ &\le L^2 \int_{[t_0,t]} \frac{(L|t-s|)^k}{k!} \int_{[t_0,s]} f(r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

En intervertissant l'ordre d'intégration, on en déduit que

$$\begin{aligned} f(t) &\le L^2 \int_{[t_0,t]} \int_{[r,t]} \frac{(L|t-s|)^k}{k!} f(r)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}r \\ &= L \int_{[t_0,t]} \frac{(L|t-r|)^{k+1}}{(k+1)!} f(r)\,\mathrm{d}r \\ &= L \int_{[t_0,t]} \frac{(L|t-s|)^{k+1}}{(k+1)!} f(s)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

Notons que pour chaque $s \in [t_0, t]$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{(L|t-s|)^k}{k!} \le \frac{(L|t-t_0|)^k}{k!},$$

et donc pour chaque $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{[t_0,t]} \frac{(L|t-s|)^k}{k!} f(s)\,\mathrm{d}s \le \frac{(L|t-t_0|)^k}{k!} \int_{[t_0,t]} |f(s)|\,\mathrm{d}s.$$

Puisque

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(L|t-t_0|)^k}{k!} = 0,$$

on en déduit de (2.2) en faisant tendre $k \to \infty$ que

$$f(t) \le 0. \qquad \square$$

Nous disposons maintenant des outils pour prouver la propriété d'unicité.

Démonstration de la proposition 2.3. On a pour chaque $t \in I$, par le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral,

$$\begin{aligned} u_1(t) - u_2(t) &= u_1(t_0) - u_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} u_1'(s) - u_2'(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{t_0}^{t} A(s)\big[u_1(s) - u_2(s)\big]\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

d'où, par l'inégalité triangulaire pour l'intégrale (proposition B.6)

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \le \int_{[t_0,t]} \|A(s)\|\|u_1(s) - u_2(s)\|\,\mathrm{d}s.$$

Soit $[a,b] \subset I$ tel que $t_0 \in [a,b]$. On pose

$$L = \sup\big\{\|A(s)\| \mid s \in [a,b]\big\}.$$

On a alors pour chaque $t \in [a,b]$,

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \le L \int_{[t_0,t]} \|u_1(s) - u_2(s)\|\,\mathrm{d}s$$

Par la proposition 2.4, on a pour chaque $t \in I$,

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| = 0,$$

d'où on conclut que $u_1(t) = u_2(t)$ pour chaque $t \in I$. $\square$

2.3. Structure géométrique de l'ensemble des solutions

2.3.1. Systèmes différentiels du premier ordre

2.3.2. L'espace des solutions

Dans cette section on se propose d'étudier l'espace des solutions

$$\mathcal{S} = \big\{u : I \to \mathbb{R}^n \mid u \text{ est dérivable et, pour chaque } t \in I,\ u'(t) = A(t)[u(t)]\big\}.$$

Nous observons d'abord que l'ensemble $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel lorsqu'on le munit des opérations usuelles d'addition et de multiplication par un scalaire des fonctions.

Proposition 2.5 *L'ensemble $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel.*

Démonstration. Tout d'abord, il est clair que $0 \in \mathcal{S}$. Si $u \in \mathcal{S}$ et $v \in \mathcal{S}$, alors la fonction $u + v : I \to \mathbb{R}^n$ est dérivable et pour chaque $t \in I$, par linéarité de $A(t)$,

$$(u + v)'(t) = u'(t) + v'(t) = A(t)[u(t)] + A(t)[v(t)] = A(t)[u(t) + v(t)],$$

d'où on conclut que $u + v \in \mathcal{S}$ par définition de $\mathcal{S}$. De même, si $u \in \mathcal{S}$ et $\mu \in \mathbb{R}$, alors la fonction $\mu u : I \to \mathbb{R}^n$ est dérivable et pour chaque $t \in I$, par linéarité de $A(t)$,

$$(\mu u)'(t) = \mu u'(t) = \mu A(t)[u(t)] = A(t)[\mu u(t)],$$

et donc $\mu \in \mathcal{S}$. □

Nous voulons maintenant identifier la dimension de $\mathcal{S}$.

Proposition 2.6 *Si I est un intervalle, pour tout réel $s \in I$ fixé, l'application linéaire d'évaluation $E_s : u \in \mathcal{S} \mapsto u(s) \in \mathbb{R}^n$ est une bijection.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que l'application linéaire E_s est injective. Puisque que l'application E_s est linéaire, il suffit d'étudier son noyau

$$\ker E_s = \{u \in \mathcal{S} : u(s) = 0\}.$$

Si $u \in \ker E_s$, u est dérivable et

$$\begin{cases} u'(t) = A[u(t)] & \text{si } t \in I, \\ u(s) = 0. \end{cases}$$

De plus, la fonction identiquement nulle satisfait cette équation. Par la propriété d'unicité des solutions du problème de Cauchy, proposition 2.3, puisque l'ensemble I est un intervalle, nous avons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = 0$, ce qui implique que $\ker E_s = \{0\}$.

Nous allons maintenant prouver que l'application E_s est surjective. Soit un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$. Par la proposition 2.2, il existe une fonction $u : I \to \mathbb{R}^n$ telle que

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)[u(t)] & \text{pour chaque } t \in I, \\ u(s) = v. \end{cases}$$

On a donc $u \in \mathcal{S}$ et $u(s) = v$. □

On déduit en particulier de la proposition 2.6 que $\dim \mathcal{S} = n$ et que les fonctions $u_1, \dots, u_k \in \mathcal{S}$ engendrent l'espace $\mathcal{S}$ si et seulement si les vecteurs $u_1(s), \dots, u_k(s)$ engendrent l'espace $\mathbb{R}^n$. De même, les fonctions $u_1, \dots, u_k \in \mathcal{S}$ sont linéairement indépendantes si et seulement si les vecteurs $u_1(s), \dots, u_k(s)$ sont linéairement indépendants $\mathbb{R}^n$. Ce résultat est faux si I *n'est pas un intervalle.*

Exemple 2.2 On considère l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{u : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \mid \text{pour tout } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ u'(t) = 0\}.$$

On observe que

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \{u : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \mid \text{il existe } c, d \in \mathbb{R} \text{ tels que si } t \in]-\infty, 0[, u(t) = c \\ \text{et si } t \in]0, +\infty[,\ u(t) = d\}, \end{aligned}$$

et en particulier $\dim \mathcal{S} = 2$.

Les résultats précédents ont une réciproque : si les n fonctions $u_1, \dots, u_n$ sont continûment dérivables de I dans $\mathbb{R}^m$ et si pour chaque $t \in I$, les vecteurs $u_1(t), \dots, u_n(t)$ sont linéairement indépendants, alors il existe une fonction $A \in C(I, \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n))$ tel que pour tout $t \in I$ et pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $u_i'(t) = A(t)[u_i(t)]$. En effet, cette dernière formule et la condition d'indépendance linéaire permettent de définir $A(t)$ pour chaque $t \in I$. La continuité de A suit de la continuité des fonctions u_i et u_i'.

2.3.2.1. Équations d'ordre supérieur

Si on considère l'équation

$$w''(t) = -a_1(t)w'(t) - a_0(t)w(t),$$

nous pouvons, en posant $u(t) = (w(t), w'(t))$, appliquer la proposition précédente. En particulier, si w est une solution, alors soit w et w' n'ont pas de racine commune, soit w s'annule identiquement. Si w_1 et w_2 sont deux solutions linéairement indépendantes, w_1 et w_2 ne peuvent pas avoir de racine commune ou de point critique commun (sinon, on aurait une relation de dépendance linéaire entre $(w_1(0), w_1'(0))$ et $(w_2(0), w_2'(0))$).

Proposition 2.7 *Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et soient $w_1, \dots, w_m \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$. Les fonctions $w_1, \dots, w_m$ sont linéairement indépendantes dans $C^k(I, \mathbb{R}^n)$ si et seulement si les fonctions $(w_1, \dots, w_1^{(k)}), \dots, (w_m, \dots, w_m^{(k)})$ sont linéairement indépendantes dans $C^1(I, \mathbb{R}^{n(k+1)})$.*

Démonstration. Supposons que les fonctions $w_1, \dots, w_m$ sont linéairement indépendantes. S'il existe des nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in I$

$$\lambda_1\big(w_1(t), \dots, w_1^{(k)}(t)\big) + \cdots + \lambda_m\big(w_m(t), \dots, w_m^{(k)}(t)\big) = 0,$$

et donc en particulier, pour tout $t \in I$

$$\lambda_1 w_1(t) + \cdots + \lambda_m w_m(t) = 0,$$

ce qui s'écrit encore

$$\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m = 0.$$

Par hypothèse d'indépendance linéaire, nous en déduisons que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$.

Réciproquement, supposons que les fonctions $(w_1, \dots, w_1^{(k)}), \dots, (w_m, \dots, w_m^{(k)})$ sont linéairement indépendantes. S'il existe des nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tels que pour tout $t \in I$ on ait

$$\lambda_1 w_1(t) + \cdots + \lambda_m w_m(t) = 0,$$

alors, par linéarité de la dérivée

$$\lambda_1\big(w_1(t), \dots, w_1^{(k)}(t)\big) + \cdots + \lambda_m\big(w_m(t), \dots, w_m^{(k)}(t)\big) = 0,$$

et donc par hypothèse $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$. □

En fait cette démonstration est un cas particulier du résultat suivant : si V et W sont des espaces vectoriels (non nécessairement de dimension finie) et si l'application $L : V \to W$ est linéaire, les vecteurs $v_1, \dots, v_m$ de V sont linéairement indépendants si et seulement si les vecteurs $(v_1, L[v_1]), \dots, (v_m, L[v_m])$ de $V \times W$ sont linéairement indépendants. C'est une conséquence de ce que l'application linéaire $v \in V \mapsto (v, L[v]) \in V \times W$ est toujours injective.

2.3.3. Résolvante

2.3.3.1. Définition et propriétés de la résolvante

Définition 2.1 *Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $A \in C(I, \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n))$. La résolvante associée à A est une fonction $R : I \times I \to \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$, telle que pour chaque $u \in \mathcal{S}$ et pour chaque $s, t \in I$,*

$$u(t) = R(t, s)[u(s)].$$

La résolvante est donc une fonction à chaque couple de nombres réels $(t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ associe une application linéaire $R(t, s)$. Cette application linéaire $R(t, s)$ peut à son tour être évaluée en un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ pour donner un vecteur $R(t, s)[v] \in \mathbb{R}^n$.

Par la proposition 2.6, $R(t, s) = E_t \circ E_s^{-1}$ est une application linéaire bien définie.

Si on connaît l'espace des solutions $\mathcal{S}$ (ou une base de celui-ci), on connaît donc la résolvante du système associé. La notation pour l'ordre des variables de la fonction R est choisie de manière à ce que dans $u(t) = R(t, s)[u(s)]$, les s soient côte-à-côte, en analogie avec la convention pour les indices de matrices et le produit matriciel.

Dans le cas où $A \in C(I, \mathrm{Lin}\,(()\mathbb{R}^n))$ est une fonction constante, c'est-à-dire que pour tout $t \in I$, $A(t) = A_0 \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n)$, on retrouve l'exponentielle d'opérateur :

$$R(t, s) = \mathrm{e}^{(t-s)A}.$$

Proposition 2.8 *Pour chaque* $r, s, t \in I$*,*

$$R(t, s) = R(t, r) \circ R(r, s).$$

Démonstration. Soit $s \in I$. Nous définissons la fonction $u : I \to \mathbb{R}^n$ en posant pour chaque $t \in I$,

$$u(t) = R(t, s)[v].$$

Si $r \in I$, on a aussi

$$u(r) = R(r, s)[v]$$

Par définition de la résolvante, on vérifie que $u'(t) = A(t)[u(t)]$, et donc

$$R(t, s)[v] = u(t) = R(t, r)[u(r)] = R(t, r)\big[R(r, s)[v]\big]. \qquad \square$$

Une conséquence intéressante est que pour tout $s, t \in I$, l'application linéaire $R(t, s) \in \mathrm{Lin}\,(()\mathbb{R}^n)$ est inversible et $R(t, s)^{-1} = R(s, t)$.

Proposition 2.9 *Pour chaque* $r, s, t \in I$*,*

$$R(t, s) - R(r, s) = \int_r^t A(\tau) \circ R(\tau, s)\,\mathrm{d}\tau.$$

Démonstration. Soit $v \in \mathbb{R}^n$ et $s \in I$ fixés. Nous définissons la fonction $u : I \to \mathbb{R}^n$ en posant pour chaque $\tau \in I$,

$$u(\tau) = R(\tau, s)[v].$$

Par définition de la résolvante, la fonction u est dérivable et pour chaque $\tau \in I$,

$$u'(\tau) = A(\tau)[u(\tau)].$$

En intégrant par rapport à τ, on obtient,

$$u(t) - u(r) = \int_r^t u'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_r^t A(\tau)[u(\tau)]\,\mathrm{d}\tau,$$

on a donc montré pour chaque $v \in \mathbb{R}^n$,

$$R(t,s)[v] - R(r,s)[v] = \int_r^t A(\tau)\big[R(\tau,s)[v]\big]\,\mathrm{d}\tau. \qquad \square$$

Comme conséquence, on a

Proposition 2.10 *Pour tout* $s \in I$*, la fonction* $R(\cdot,s) : I \to \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n) : t \mapsto R(t,s)$ *est dérivable et pour tout* $t \in I$

$$\frac{d}{dt}R(t,s) = A(t) \circ R(t,s).$$

Démonstration. On a

$$\frac{R(t,s) - R(r,s)}{t-r} = \frac{1}{t-r}\int_r^t A(\tau) \circ R(\tau,s)\,\mathrm{d}\tau,$$

puisque A et R sont des fonctions continues, la proposition découle de la formule de dérivation de l'intégrale indéfinie (proposition B.11). $\square$

On a aussi :

Proposition 2.11 *Pour tout* $t \in I$*, la fonction* $R(t,\cdot) : I \to \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n) : s \mapsto R(t,s)$ *est dérivable et pour tout* $s \in I$*,*

$$\frac{d}{ds}R(t,s) = -R(t,s) \circ A(s).$$

Démonstration. On a pour chaque $r, s, t \in I$,

$$\begin{aligned} R(t,s) - R(t,r) &= R(t,s) \circ R(r,t) \circ R(t,r) - R(t,s) \circ R(s,t) \circ R(t,r) \\ &= R(t,s) \circ \big(R(r,t) - R(s,t)\big) \circ R(t,r). \end{aligned}$$

On en déduit pour $s, t \in I$ que

$$\begin{aligned} \lim_{r \to s} \frac{R(t,s) - R(t,r)}{s-r} &= -\lim_{r \to s} R(t,s) \circ \frac{R(r,t) - R(s,t)}{r-s} \circ R(t,r) \\ &= -R(t,s) \circ A(s) \circ R(s,t) \circ R(t,s) \\ &= -R(t,s) \circ A(s), \end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration. $\square$

2.3.3.2. Résolvante et système affin

Proposition 2.12 *Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, $t_0 \in I$, $A \in C(I, \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n))$, $f \in C(I, \mathbb{R}^n)$ et $u : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable. On a pour chaque $t \in I$*

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)[u(t)] + f(t) & \textit{pour tout } t \in I, \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

si et seulement si

$$u(t) = R(t, t_0)[u_0] + \int_{t_0}^{t} R(t, s)[f(s)] \,\mathrm{d}s.$$

On peut encore écrire la solution sous la forme de $R(t, t_0)[v(t)]$, où $v : I \to \mathbb{R}$ est définie pour $t \in I$ par

$$v(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} R(t_0, s)[f(s)] \,\mathrm{d}s$$

On a donc la formule pour le problème linéaire, si ce n'est que la constante u_0 est remplacée par une fonction dépendant du temps. Cela explique le nom de formule de variation de la constante qui lui est donné.

Démonstration de la proposition 2.12. On vérifie que

$$R(t, t_0)[u_0] - u_0 = \int_{t_0}^{t} A(r)\big[R(r, t_0)[u_0]\big] \,\mathrm{d}r$$

et que

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} R(t, s)[f(s)] \,\mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t} f(s) \,\mathrm{d}s &= \int_{t_0}^{t} \int_{s}^{t} A(r)[R(r, s)[f(s)]] \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}s \\ &= \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{r} A(r)\big[R(r, s)[f(s)]\big] \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}r \\ &= \int_{t_0}^{t} A(r)\Big[\int_{t_0}^{r} R(r, s)[f(s)] \,\mathrm{d}s\Big] \,\mathrm{d}r. \end{aligned}$$

Si on pose pour $t \in I$,

$$u(t) = R(t, t_0)[u_0] + \int_{t_0}^{t} R(t, s)[f(s)] \,\mathrm{d}s,$$

on a donc

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} A(r)[u(r)] \,\mathrm{d}r + \int_{t_0}^{t} f(r) \,\mathrm{d}r,$$

d'où on déduit que la fonction u satisfait l'équation.

On obtient la réciproque par la propriété d'unicité de la solution au problème posé. □

2.3.3.3. Calcul de résolvante

Pour connaître la résolvante R associée à $A \in C(I, \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n))$, il est suffisant de connaître n solutions $u_i : I \to \mathbb{R}^n$ linéairement indépendantes de l'équation

$$u_i'(t) = A(t)[u_i(t)] \qquad \text{pour chaque } t \in I.$$

On appelle $u_1, \dots, u_n$ un *système fondamental de solutions du système.*

En effet, puisque pour chaque $t \in I$, les vecteurs $u_1(t), \dots, u_n(t)$ sont linéairement indépendants, puisque

$$u_i(s) = R(s,t)\big[u_i(t)\big]$$

et puisque $R(s,t)$ est une application linéaire, on peut par le théorème de représentation des applications linéaires, calculer complètement $R(s,t)$.

En pratique, on peut construire pour tout $t \in I$ l'application linéaire $V(t) \in \mathrm{Lin}\,(()\mathbb{R}^n)$ définie pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ par

$$V(t)[x] = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i(t).$$

La matrice qui représente cette application linéaire est

$$\big(u_1(t) \dots u_n(t)\big)\,,$$

où $u_i(t)$ est identifié au vecteur colonne correspondant. Cette matrice est appelée *matrice fondamentale* du système. On vérifie que pour chaque $s, t \in I$ et pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$

$$R(t,s)\big[V(s)[x]\big] = V(t)[x].$$

On en déduit que

$$R(t,s) = V(t) \circ V(s)^{-1},$$

ou encore que $R(t,s)$ est représenté par la matrice

$$\big(u_1(t) \dots u_n(t)\big)\,\big(u_1(s) \dots u_n(s)\big)^{-1}.$$

Comme exemple considérons $A \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ tel que $A(t)$ est représenté pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{pmatrix} 0 & -2t \\ 2t & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule comme solutions $u_1(t) = (\cos t^2, \sin t^2)$ et $u_2(t) = (-\sin t^2, \cos t^2)$. Nous en déduisons que la résolvante $R(t,s)$ satisfait l'équation

$$R(t,s)\begin{pmatrix} \cos s^2 & -\sin s^2 \\ \sin s^2 & \cos s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t^2 & -\sin t^2 \\ \sin t^2 & \cos t^2 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer la résolvante, nous réécrivons l'équation sous la forme

$$\begin{pmatrix} R(t,s) & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos s^2 & -\sin s^2 \\ \sin s^2 & \cos s^2 \\ \cos t^2 & -\sin t^2 \\ \sin t^2 & \cos t^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Si nous réussissons à transformer le bloc supérieur de la matrice de droite en matrice identité par des opérations élémentaires sur les colonnes, nous aurons réussi à calculer la résolvante. Pour cela, commençons par traiter le cas $\cos s^2 \neq 0$ en soustrayant à la première colonne multipliée par $\cos s^2$, la seconde multipliée par $\sin s^2$ et on obtient

$$\begin{pmatrix} R(t,s) & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\cos s^2)^2 + (\sin s^2)^2 & -\sin s^2 \\ 0 & \cos s^2 \\ \cos s^2 \cos t^2 + \sin s^2 \sin t^2 & -\sin t^2 \\ \cos s^2 \sin t^2 - \sin s^2 \cos t^2 & \cos t^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Ensuite, on multiplie la première colonne par $\sin s^2$ et on l'additionne à la seconde

$$\begin{pmatrix} R(t,s) & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos s^2 \\ \cos s^2 \cos t^2 + \sin s^2 \sin t^2 & -\sin t^2 + \sin s^2(\cos s^2 \cos t^2 + \sin s^2 \sin t^2) \\ \cos s^2 \sin t^2 - \sin s^2 \cos t^2 & \cos t^2 + \sin s^2(\cos s^2 \sin t^2 - \sin s^2 \cos t^2) \end{pmatrix} = 0.$$

Puisque par la relation de Pythagore pour les fonctions trigonométriques $(\sin s^2)^2 = 1 - (\cos s^2)^2$, cela devient

$$\begin{pmatrix} R(t,s) & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos s^2 \\ \cos s^2 \cos t^2 + \sin s^2 \sin t^2 & \cos s^2(\sin s^2 \cos t^2 - \cos s^2 \sin t^2) \\ \cos s^2 \sin t^2 - \sin s^2 \cos t^2 & \cos s^2(\sin s^2 \sin t^2 + \cos s^2 \cos t^2) \end{pmatrix} = 0.$$

En divisant la deuxième colonne par $\cos s^2$, on trouve

$$\begin{pmatrix} R(t,s) & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \cos s^2 \cos t^2 + \sin s^2 \sin t^2 & \sin s^2 \cos t^2 - \cos s^2 \sin t^2) \\ \cos s^2 \sin t^2 - \sin s^2 \cos t^2 & \sin s^2 \sin t^2 + \cos s^2 \cos t^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} R(t,s) &= \begin{pmatrix} \cos s^2 \cos t^2 + \sin s^2 \sin t^2 & \sin s^2 \cos t^2 - \cos s^2 \sin t^2) \\ \cos s^2 \sin t^2 - \sin s^2 \cos t^2 & \sin s^2 \sin t^2 + \cos s^2 \cos t^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t^2 - s^2) & -\sin(t^2 - s^2) \\ \sin(t^2 - s^2) & \cos(t^2 - s^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le cas $\cos s^2 = 0$ se traite en permuttant les colonnes et en multipliant l'une d'entre elles par -1.

2.4. Changements de variables facilitant le calcul de solutions

Le but de cette section est de montrer comment la connaissance de certaines solutions d'un système d'équations différentielles linéaires permet de simplifier la recherche d'autres solutions. Ces techniques sont l'analogue de la possibilité d'utiliser les racines connues d'un polynôme pour le factoriser et chercher les racines restantes en étudiant un polynôme de degré inférieur ou encore de la possibilité de simplifier les calculs en géométrie analytique en choisissant un repère adéquat.

2.4.1. Variation des constantes

La connaissance d'une base de solutions d'un problème homogène facilite le calcul de solutions d'un problème inhomogène.

2.4.1.1. Système d'équations

On veut résoudre le problème

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)[u(t)] + f(t) & \text{pour } t \in I, \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Supposons que nous connaissions une base $u_1, \dots, u_n$ de l'espace de solutions $\mathcal{S}$ du problème linéaire homogène

$$u'(t) = A(t)[u(t)] \qquad \text{pour chaque } t \in I.$$

Cela revient à dire que pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, la fonction $u_i : I \to \mathbb{R}^n$ satisfait pour chaque $t \in I$

$$u_i'(t) = A(t)[u_i(t)]$$

et que pour chaque $t \in I$, les vecteur $u_1(t), \dots, u_n(t)$ forment une base de $\mathbb{R}^n$.

On veut écrire une solution u de notre problème sous la forme

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) u_i(t),$$

où $\alpha_i : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions dérivables. Nous allons étudier sous quelles conditions sur les coefficients α_i la fonction u est solution de notre équation.

On calcule que pour chaque $t \in \mathbb{R}$, par la règle du produit,

$$u'(t) = \sum_{i=1}^{n} \bigl(\alpha_i'(t) u_i(t) + \alpha_i(t) u_i'(t)\bigr).$$

Par hypothèse sur u_i et par linéarité de $A(t)$, on en déduit que

$$u'(t) = \sum_{i=1}^{n} \big(\alpha_i'(t)u_i(t) + \alpha_i(t)A\big[u_i(t)\big]\big) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i'(t)u_i(t)\Big) + A\big[u(t)\big].$$

La fonction u sera une solution de notre équation si et seulement si

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i'(t)u_i(t) = f(t) \quad \text{pour } t \in I, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t_0)u_i(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Puisque pour chaque $t \in I$ les vecteurs $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^n$, on peut donc déterminer de manière unique $\alpha_i'(t)$ et $\alpha_i(t_0)$, ce qui permet de calculer la fonction α_i par intégration.

Exemple 2.3 On considère le problème

$$\begin{cases} u'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u(t) + f(t) \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

On vérifie que les fonctions $u_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définies par $u_1(t) = (\cos t, \sin t)$ et $u_2(t) = (-\sin t, \cos t)$ satisfont

$$u_i'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u_i(t).$$

Si on pose $u(t) = \alpha_1(t)u_1(t) + \alpha_2(t)u_2(t)$, on vérifie que

$$\begin{cases} \alpha_1'(t)(\cos t, \sin t) + \alpha_2'(t)(-\sin t, \cos t) = f(t) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \\ (\alpha_1(0), \alpha_2(0)) = 0, \end{cases}$$

ou encore, en prenant le produit scalaire de la première équation avec les vecteurs $(\cos t, \sin t)$ et $(-\sin t, \cos t)$,

$$\begin{cases} \alpha_1'(t) = ((\cos t, \sin t)|f(t)) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R} \\ \alpha_2'(t) = ((-\sin t, \cos t)|f(t)) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R} \\ \alpha_1(0) = 0, \\ \alpha_2(0) = 0. \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{cases} \alpha_1(t) = \displaystyle\int_0^t ((\cos s, \sin s)|f(s))\,\mathrm{d}s, \\ \alpha_2(t) = \displaystyle\int_0^t ((-\sin s, \cos s)|f(s))\,\mathrm{d}s. \end{cases}$$

Finalement, nous pouvons conclure que

$$\begin{aligned}
u(t) &= \Big(\int_0^t ((\cos s, \sin s)|f(s))\,\mathrm{d}s\Big)(\cos t, \sin t)\\
&\qquad + \Big(\int_0^t ((-\sin s, \cos s)|f(s))\,\mathrm{d}s\Big)(-\sin t, \cos t)\\
&= \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-s) & -\sin(t-s)\\ \sin(t-s) & \cos(t-s)\end{pmatrix} \big[f(s)\big]\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Le lecteur pourra vérifier que nous obtenons la même formule que celle donnée par la proposition 2.12, en évitant de se rappeler ou de redériver cette dernière proposition et aussi de calculer la résolvante.

2.4.1.2. Équation du second ordre

Pour les équations du second ordre, nous allons travailler sur un exemple. On veut trouver les solutions de

$$w''(t) = \frac{w'(t)}{t} - \frac{w(t)}{t^2} + f(t) \qquad \text{pour tout } t \in \,]0, +\infty[.$$

On sait que les fonctions $w_1 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ et $w_2 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définies pour chaque $t \in \,]0, +\infty[$ par $w_1(t) = t$ et $w_2(t) = t \ln t$ satisfont l'équation homogène associée

$$w_i''(t) = \frac{w_i'(t)}{t} - \frac{w_i(t)}{t^2} \qquad \text{pour tout } t \in \,]0, +\infty[.$$

On suppose que la solution peut s'écrire pour tout $t \in \,]0, +\infty[$ sous la forme

$$w(t) = \alpha(t)t + \beta(t)t \ln t,$$

avec des fonctions dérivables $\alpha :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ et $\beta :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$. On calcule pour tout $t \in \,]0, +\infty[$, par la formule de dérivation d'un produit de fonctions dérivables,

$$w'(t) = \big(\alpha'(t)t + \beta'(t)t \ln t\big) + \alpha(t) + \beta(t)(\ln t + 1).$$

Si on impose que

$$\alpha'(t)t + \beta'(t)\, t \ln t = 0$$

on a alors

$$w'(t) = \alpha(t) + \beta(t)(\ln t + 1)$$

et donc

$$w''(t) = \alpha'(t) + \beta'(t)\,(\ln t + 1) + \beta(t)\frac{1}{t}.$$

Finalement les fonctions α et β doivent satisfaire pour tout $t \in \,]0, +\infty[$,

$$\alpha'(t) + \beta'(t)\,(\ln t + 1) + \beta(t)\frac{1}{t} = \frac{\alpha(t) + \beta(t)\,(\ln t + 1)}{t} - \frac{\alpha(t)t + \beta(t)\, t \ln t}{t^2} + f(t),$$

c'est-à-dire
$$\alpha'(t) + \beta'(t)(\ln t + 1) = f(t).$$
En rassemblant toutes les informations, les fonctions α et β sont solutions du problème suivant
$$\begin{cases} \alpha'(t)t + \beta'(t)t\ln t = 0 & \text{pour chaque } t \in]0, +\infty[, \\ \alpha'(t) + \beta'(t)(\ln t + 1) = f(t) & \text{pour chaque } t \in]0, +\infty[, \\ \alpha(1) = w(1), \\ \alpha(1) + \beta(1) = w'(1). \end{cases}$$
Par résolution de sytèmes linéaires, ce système est équivalent à
$$\begin{cases} \alpha'(t) = -f(t)\ln t & \text{pour chaque } t \in]0, +\infty[, \\ \beta'(t) = f(t) & \text{pour chaque } t \in]0, +\infty[, \\ \alpha(1) = w(1), \\ \beta(1) = w'(1) - w(1). \end{cases}$$
Par le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, on calcule
$$\beta(t) = \beta(1) + \int_1^t \beta'(s)\,\mathrm{d}s = w'(1) - w(1) + \int_1^t f(s)\,\mathrm{d}s$$
et
$$\alpha(t) = \alpha(1) + \int_1^t \alpha'(s)\,\mathrm{d}s = w(1) - \int_1^t f(s)\ln s\,\mathrm{d}s.$$
On en conclut que
$$w(s) = w(1)\,t(1 - \ln t) + w'(1)\,t\ln t + \int_1^t f(s)t\ln\frac{t}{s}\,\mathrm{d}s.$$

2.4.2. Réduction d'ordre

2.4.2.1. Système d'équations

Dans la section précédente, nous avons vu que pour connaître toutes les solutions d'un système linéaire, il suffit de connaître n solutions linéairement indépendantes. Malheureusement, contrairement au cas autonome, il n'y a pas de formule pour déduire la forme des solutions à partir du spectre des opérateurs $A(t)$.

Étant donnée une fonction $u_1 : I \to \mathbb{R}^n$ telle que pour chaque $t \in I$,
$$u_1'(t) = A(t)[u_1(t)],$$
nous cherchons une seconde solution linéairement indépendante u. On peut l'écrire sous la forme
$$u(t) = \alpha(t)u_1(t) + v(t),$$

où $\alpha : I \to \mathbb{R}$ est une fonction scalaire et où $v : I \to \mathbb{R}^n$ est une fonction vectorielle. Puisque pour chaque $t \in I$, $u(t)$ est un vecteur dans un espace à n dimension, on peut contraindre la fonction v à prendre ses valeurs dans un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ à $n-1$ dimensions, en imposant une contrainte $(e|v(t)) = 0$, où $e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est un vecteur donné. Une telle décomposition est possible si nous supposons que $(e|u_1(t)) \neq 0$ pour chaque $t \in I$.

Pour écrire les équations satisfaites par les fonctions α et , nous observons que pour chaque $t \in I$, par la formule de dérivation d'un produit

$$u'(t) = \alpha'(t)u_1(t) + \alpha(t)u_1'(t) + v'(t) = \alpha'(t)u_1(t) + A\big[\alpha(t)u_1(t)\big] + v'(t).$$

Pour que l'équation soit satisfaite, on doit donc avoir

$$\alpha'(t)u_1(t) + v'(t) = A[v(t)].$$

En prenant le produit scalaire de cette équation vectorielle avec le vecteur e, on obtient

$$\alpha'(t) = \frac{(e|A[v(t)])}{(e|u_1(t))},$$

d'où on déduit que w satisfait l'équation

$$v'(t) = A[v(t)] - \frac{(e|A[v(t)])}{(e|u_1(t))} u_1(t).$$

Cela nous donne, en supposant $\alpha(t_0) = 0$, la proposition suivante :

Proposition 2.13 *Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle non vide, $t_0 \in I$ et $A \in C(I, \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n))$. Supposons que la fonction $u_1 : I \to \mathbb{R}$ satisfasse pour tout $t \in I$ de*

$$u_1'(t) = A(t)[u_1(t)]$$

et que $e \in \mathbb{R}^n$ soit tel que pour chaque $t \in I$, $(e|u_1(t)) \neq 0$. Si la fonction $v : I \to \mathbb{R}^n$ satisfait

$$v'(t) = A(t)[v(t)] - \frac{(e|A(t)[v(t)])}{(e|u_1(t))} u_1(t),$$

alors la fonction $u : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$u(t) = v(t) + \Big(\int_{t_0}^{t} \frac{(e|A(s)[v(s)])}{(e|u_1(s))} \,\mathrm{d}s\Big) u_1(t)$$

satisfait

$$\begin{cases} u'(t) = A[u(t)], & \textit{si } t \in I, \\ u(t_0) = v(t_0). \end{cases}$$

Si les vecteurs $v(t_0)$ et $u_1(t_0)$ ne sont pas linéairement dépendants, alors les solutions u_1 et u sont linéairement indépendantes.

On remarque que pour chaque $t \in I$, on a l'équation

$$(e|v'(t)) = 0,$$

ce qui signifie que parmi les n équations qui déterminent v, il y en a une triviale. Nous avons donc réussi à réduire l'ordre du système. Les hypothèses du théorème sont toujours satisfaites en prenant $e = u_1(t_0)$, quitte à restreindre le domaine de l'équation. Cette proposition permet en théorie de trouver des solutions linéairement indépendantes d'un système en réduisant progressivement l'ordre du système.

2.4.2.2. Équation du second ordre

On considère l'équation de second ordre

$$w''(t) = (t^2 - 1)\, w(t) \quad \text{pour } t \in \,]0, +\infty[.$$

On vérifie que la fonction $w_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour chaque $t \in \mathbb{R}$ par

$$w_1(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}$$

est une solution. Cherchons une deuxième solution $w_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On pose $u_1 = (w_1, w_1') : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et on vérifie que pour chaque $t \in \mathbb{R}$,

$$u_1'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t^2 - 1 & 0 \end{pmatrix} u_1(t).$$

Écrivons

$$u_2(t) = \alpha(t)u_1(t) + \beta(t)(0, 1).$$

On vérifie alors qu'on doit avoir

$$\begin{cases} \alpha'(t)w_1(t) + \alpha(t)w_1'(t) = \alpha(t)w_1'(t) + \beta(t), \\ \alpha'(t)w_1'(t) + \alpha(t)w_1''(t) + \beta'(t) = (t^2 - 1)\alpha(t)w_1(t). \end{cases}$$

La première équation nous donne directement une formule pour β : $\beta(t) = \alpha'(t)w(t)$. Nous avons donc $u_2 = (\alpha w_1, \alpha w_1' + \alpha' w_1)$, ou encore $u_2 = (\alpha w_1, (\alpha w_1)')$, c'est-à-dire

$$w_2 = \alpha w_1.$$

Le problème devient alors

$$w_1''(t)\alpha(t) + 2w_1'(t)\alpha'(t) + w_1(t)\alpha''(t) = (t^2 - 1)w_1(t)\alpha(t).$$

En utilisant le fait que w_1 est solution, on trouve

$$2w_1'(t)\alpha'(t) + w_1(t)\alpha''(t) = 0,$$

c'est-à-dire
$$-2t\mathrm{e}^{-t^2/2}\alpha'(t) + \mathrm{e}^{-t^2/2}\alpha''(t) = 0,$$
d'où on déduit que pour chaque $t \in \mathbb{R}$,
$$\alpha'(t) = \alpha'(0)\mathrm{e}^{t^2}.$$
Par intégration, on obtient,
$$\alpha(t) = \alpha(0) + \alpha'(0)\int_0^t \mathrm{e}^{s^2}\,\mathrm{d}s.$$
En prenant $\alpha(0) = 0$ et $\alpha'(0) = 1$ (de manière à ce que la fonction α ait l'expression la plus simple possible sans être constante), on trouve une deuxième solution $w_2 : I \to \mathbb{R}$ définie pour $t \in \mathbb{R}$ par
$$w_2(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}\int_0^t \mathrm{e}^{s^2}\,\mathrm{d}s.$$

2.4.2.3. Équation d'ordre supérieur

Supposons que nous ayons une solution $w_1 : I \to \mathbb{R}$ de l'équation
$$w^{(n)}(t) = -\sum_{j=0}^{n-1} a_j(t)w^{(j)}(t), \quad \text{pour chaque } t \in I$$
Nous allons montrer comment on peut obtenir d'autres solutions. Si on pose $u(t) = (w(t), w'(t), \dots, w^{(n-1)}(t)$, l'équation se réécrit
$$u'(t) = A(t)[u(t)],$$
où l'application linéaire $A(t) \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n)$ est représentée par la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & -a_3(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}.$$

Étant donnée une première solution $u_0 = (w_0, w_0', \dots, w_0^{(n-1)}) : I \to \mathbb{R}$, on cherche une seconde solution de la forme
$$u(t) = \alpha(t)u_0(t) + v(t),$$
avec $v_1 = 0$. Vu que u_0 est solution, on a
$$v'(t) - \alpha'(t)u_0(t) = A(t)[v(t)],$$

et donc

$$\begin{cases} \alpha'(t)w_0(t) = v_2(t), \\ v_2'(t) + \alpha'(t)w_0'(t) = v_3(t), \\ \vdots \\ v_{n-1}'(t) + \alpha'(t)w_0^{(n-2)}(t) = v_n(t), \\ v_n'(t) + \alpha'(t)w_0^{(n-1)}(t) = -\sum_{j=0}^{n-1} a_j(t)v_{j+1}(t) \end{cases}$$

On obtient par récurrence pour $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$v_j = (\alpha w_0)^{(j-1)} - \alpha w_0^{(j-1)}.$$

En effet,

$$((\alpha w_0)^{(j)} - \alpha w_0^{(j)})' + \alpha' w_0^{(j)} = (\alpha w_0)^{(j+1)} - \alpha w_0^{(j+1)}.$$

Et on a donc l'équation

$$(\alpha w_0)^{(n)}(t) - \alpha w_0^{(n)}(t) = -\sum_{j=0}^{n-1} a_j(t)((\alpha w)^{(j)} - \alpha w^{(j)})(t).$$

Puisque

$$(\alpha w_0)^{(j)} - \alpha w_0^{(j)} = \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} \alpha^{(i)} w_0^{(j-i)},$$

on a encore

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \alpha^{(i)} w_0^{(n-i)}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i}^{n-1} \binom{j}{i} a_j(t)\alpha^{(i)}(t)w_0^{(j-i)}(t) = 0,$$

qui est une équation d'ordre $n-1$ en α'.

Compléments

On peut relier la construction de la proposition 2.2 au développement en série de l'inverse d'une application linéaire :

$$(\mathcal{D} - \mathcal{A})^{-1} = \mathcal{D}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}^{-1}\mathcal{A},$$

valable si $\|\mathcal{D}^{-1}\mathcal{A}\| < 1$. Cette formule est reliée au théorème du point fixe de Banach. Dans notre cas, on prend pour $\mathcal{A}$ l'opérateur linéaire sur les fonctions défini par

$$(\mathcal{A}u)(t) = A(t)u(t),$$

et $\mathcal{D}$ l'opérateur de dérivation pour lequel on prend

$$(\mathcal{D}^{-1}f(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

On peut retrouver le résultat d'existence en choisissant des espaces de fonctions adéquats munis de normes adéquates.

Si on suppose que pour chaque $s, t \in I$, $A(s) \circ A(t) = A(t) \circ A(s)$, alors pour chaque $s, t \in I$, on a

$$R(t, s) = \mathrm{e}^{\int_s^t A(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma}.$$

(voir par exemple [2, chapter 3, §3]).

Estimation sur la résolvante

Si pour chaque $s \in I$, $\|A(s)\| \leq L$, par l'inégalité de Grönwall, nous avons

$$\|R(t, s)\| \leq \mathrm{e}^{L|t-s|},$$

D'où nous déduisons que

$$\|R(t, s) - R(r, s)\| \leq \int_{[r,t]} L\mathrm{e}^{L|\tau - s|}\,\mathrm{d}\tau = |\mathrm{e}^{L|t-s|} - \mathrm{e}^{L|r-s|}|.$$

Formule du déterminant de Liouville

Formule pour un système du premier ordre

S'il est difficile d'obtenir une formule explicite de solution, on a une formule simple pour le déterminant de n solutions :

Proposition 2.14 (Formule de Liouville) *Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide et soit $u_1, \dots, u_n : I \to \mathbb{R}^n$ des fonctions satisfaisant pour $i \in \{1, \dots, n\}$,*

$$u_i'(t) = A(t)[u_i(t)].$$

Définissons $W : I \to \mathbb{R}$ pour $t \in I$ par

$$W(t) = \det\bigl(u_1(t), \dots, u_n(t)\bigr).$$

On a pour chaque $t \in I$,

$$W'(t) = \bigl(\operatorname{tr} A(t)\bigr) W(t).$$

La fonction $W : I \to \mathbb{R}$ est appelée le *déterminant wronskien* ou *wronskien* des solutions $u_1, \dots, u_n$. On vérifie que pour chaque $s, t \in I$, on a

$$W(t) = \mathrm{e}^{\int_s^t \operatorname{tr} A(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma} W(s).$$

Démonstration de la proposition 2.14. Tout d'abord, remarquons que par la proposition 2.6 soit les vecteurs $u_1(t), \dots, u_n(t)$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^n$ pour chaque $t \in I$, soit ils sont linéairement dépendants pour chaque $t \in I$. Dans le second cas, on a pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $W(t) = 0$, et l'équation est satisfaite.

Supposons donc que pour chaque $t \in \mathbb{R}$, les vecteurs $u_1(t), \dots, u_n(t)$ forment une base de $\mathbb{R}^n$. Puisque le déterminant est un opérateur linéaire, on a pour chaque $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} W'(t) = \det\bigl(u_1'(t), u_2(t), \dots, u_n(t)\bigr) + \det\bigl(u_1(t), u_2'(t), u_3(t), \dots, u_n(t)\bigr) \\ + \dots + \det\bigl(u_1(t), \dots, u_{n-1}(t), u_n'(t)\bigr). \end{aligned}$$

Puisque $u_i'(t) = A[u(t)]$, on a pour chaque $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} W'(t) = \det\bigl(A[u_1(t)], u_2(t), \dots, u_n(t)\bigr) + \det\bigl(u_1(t), A[u_2(t)], u_3(t), \dots, u_n(t)\bigr) \\ + \dots + \det\bigl(u_1(t), \dots, u_{n-1}, A[u_n(t)]\bigr). \end{aligned}$$

Fixons $t \in I$. Les vecteurs $u_1(t), \dots, u_n(t)$ forment une base de $\mathbb{R}^n$. On peut donc trouver $\alpha_{i,j} \in \mathbb{R}^n$ pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$ de sorte qu'on ait

$$A(t)[u_i(t)] = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} u_j(t).$$

Par la propriété d'alternance du déterminant, on en déduit que

$$W'(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,i} W(t).$$

Par la proposition A.14, on conclut que

$$W'(t) = \bigl(\operatorname{tr} A(t)\bigr) W(t). \qquad \square$$

Cela nous donne immédiatement

Proposition 2.15 *Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide et $A \in C(I, \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n))$. Pour chaque $s, t \in I$,*

$$\det R(t, s) = \mathrm{e}^{\int_s^t \operatorname{tr} A(r)\, \mathrm{d}r}.$$

Démonstration. Soient $u_1, \dots, u_n$ des solutions linéairement indépendantes satisfaisant pour $t \in \mathbb{R}$, $u_i'(t) = A[u(t)]$. On a pour chaque $I \in \mathbb{R}$

$$\det(R(t, s)) = \frac{\det\bigl(u_1(t), \dots, u_n(t)\bigr)}{\det\bigl(u_1(s), \dots, u_n(s)\bigr)}.$$

Par la proposition 2.14, on a pour chaque $t \in I$,

$$\det R(t, s) = \frac{\mathrm{e}^{\int_s^t \operatorname{tr} A(r)\, \mathrm{d}r} \det\bigl(u_1(s), \dots, u_n(s)\bigr)}{\det\bigl(u_1(s), \dots, u_n(s)\bigr)} = \mathrm{e}^{\int_s^t \operatorname{tr} A(r)\, \mathrm{d}r}. \qquad \square$$

Dans le cas particulier des sytèmes autonomes, cela nous donne

Proposition 2.16 *Soit* $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$*. On a pour chaque* $t \in \mathbb{R}$*,*

$$\det(\mathrm{e}^{tA}) = \mathrm{e}^{t \operatorname{tr} A}.$$

Démonstration. On rappelle que dans ce cas

$$\mathrm{e}^{tA} = R(t, 0),$$

où on a identifié A à la fonction constante prenant la valeur A sur l'intervalle $\mathbb{R}$. □

Cette proposition peut s'interpréter géométriquement comme suit. Si $K \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble compact, le volume de $\mathrm{e}^{tA}(K)$ est égal au volume de K multiplié par $\mathrm{e}^{t \operatorname{tr} A}$. Dans le cas où $\operatorname{tr} A \leq 0$, cela signifie qu'un ensemble des données initiales occupant un volume occupe donne des solutions occupant des ensembles de volume décroissant. Cela ne signifie cependant pas qu'elle tendent vers 0.

Application aux systèmes d'ordre supérieur

Supposons que nous ayons $u_1, \dots, u_n : I \to \mathbb{R}$ solutions de l'équation

$$u_i^{(n)}(t) = -\sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) u_i^{(j)}(t),$$

où $a_j : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues. Si on pose pour $t \in I$,

$$v_i(t) = (u_i(t), u_i'(t), \dots, u_i^{(n-1)}(t)),$$

on a

$$v_i'(t) = A(t)[v(t)],$$

où $A(t)$ est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & -a_3(t) & \dots & -a_{n-1}(t), \end{pmatrix}$$

on a par la proposition 2.14, pour chaque $s, t \in I$,

$$\det\bigl(v_1(t), \dots, v_n(t)\bigr) = \det\bigl(v_1(s), \dots, v_n(s)\bigr) \mathrm{e}^{-\int_s^t a_{n-1}(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma}.$$

(Cette formule est appelée *formule d'Abel*.)

Par exemple, si u_1 et u_2 sont des solutions et que pour $t \in \mathbb{R}$ et $i \in \{1, 2\}$, on a

$$u_i''(t) = -bu_i'(t) - cu_i(t),$$

alors pour tout $s, t \in \mathbb{R}$,

$$u_1(t)u_2'(t) - u_2(t)u_1'(t) = \big(u_1(s)u_2'(s) - u_2(s)u_1'(s)\big)\mathrm{e}^{-b(t-s)}.$$

Il peut parfois être intéressant de réécrire une équation d'ordre supérieur sous une autre forme. Intéressons nous au problème

$$(pu')'(t) + (qu)(t) = 0.$$

Étant donnée une solution $u : I \to \mathbb{R}$, nous définissons $w(t) = (u(t), p(t)u'(t))$. On voit alors que

$$w'(t) = A(t)[w(t)],$$

où $A(t)$ est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/p(t) \\ -q(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous supposerons donc que q et p sont continues et que p ne s'annule pas. On calcule que $\operatorname{tr}\big(A(t)\big) = 0$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$. Si u_1 et u_2 sont deux solutions de notre équation, par la proposition 2.14 nous avons pour chaque $s, t \in I$

$$p(t)\big(u_1(t)u_2'(t) - u_2(t)u_1'(t)\big) = p(s)\big(u_1(s)u_2'(s) - u_2(s)u_1'(s)\big).$$

On aurait pu obtenir de manière moins immédiate en réécrivant l'équation sous la forme

$$u''(t) + \frac{p'(t)}{p(t)}u'(t) + \frac{q(t)}{p(t)}u(t),$$

et en appliquant le raisonnement du paragraphe précédent.

Notes

La preuve de la proposition 2.2 est classique. On la trouvera dans le cas linéaire (homogène) chez R. Bellman [1, chapter 1, theorem 1]. Elle peut aussi être vue comme l'adaptation d'une preuve classique pour le problème non linéaire (voir chapitre suivant) [4, chapitre 1, §1]. La section 2.4 est inspirée de Hurewicz [2, chapter 3, §4].

Il est possible de prouver la convergence des séries de Taylor définissant les solutions dans un rayon de convergence égal à celui des coefficients A et du terme de forçage f, voir par exemple W. Kaplan [3, §12–4].

Références

[1] Richard Bellman, *Stability theory of differential equations*, McGraw-Hill, New York-Toronto-London, 1953.

[2] Witold Hurewicz, *Lectures on ordinary differential equations*, The Technology Press of the Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., 1958.

[3] Wilfred Kaplan, *Ordinary differential equations*, Addison-Wesley Series in Systems Engineering, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1958.

[4] Kôsaku Yosida, *Équations différentielles et intégrales*, Dunod, Paris, 1971.

Exercices

Exercice 2.1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable. Si pour tout $t \in [a, b]$,

$$f(t) \leq \int_{t_0}^{t} f(s)g(s)\,\mathrm{d}s + K,$$

démontrer que

$$f(t) \leq A\mathrm{e}^{\int_{[t_0,t]} g(s)\,\mathrm{d}s}.$$

Méthode des itérations successives

Exercice 2.2 Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle. Soient $A : I \to \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ des fonctions intégrables et $u_0 \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une fonction unique $u : I \to \mathbb{R}$ telle que pour chaque $t \in I$,

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)u(s)\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

(Contrairement à la proposition 2.2, on ne suppose pas que les fonctions A et f sont continues.)

Exercice 2.3 Soit $A \in C(]0, +\infty[; \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n))$. On suppose que

$$\int_{1}^{\infty} \|A(s)\|\,\mathrm{d}s < \infty.$$

Montrer que pour chaque $u_\infty \in \mathbb{R}^n$, il existe une fonction $u :]0, +\infty[\to \mathbb{R}^n$ telle que

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)\big[u(t)\big] & \text{pour } t \in]0, +\infty[, \\ \lim_{t\to\infty} u(t) = u_\infty. \end{cases}$$

Exercice 2.4 Soit $a \in C(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ tel que

$$\int_1^\infty s|a(s)| < \infty.$$

Montrer qu'il existe une fonction $u :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} u''(t) = a(t)u(t) & \text{si } t \in]0,+\infty[, \\ \lim\limits_{t\to\infty} u(t) = 1 \\ \lim\limits_{t\to\infty} u'(t) = 0. \end{cases}$$

Résolvante

Exercice 2.5 Calculer la résolvante associée à $A \in C(\mathbb{R}; \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n))$ où $A(t)$ est représenté pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.6 Soit $A \in C(\mathbb{R}; \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n))$ et $T \in \mathbb{R}$ tel que pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $A(t+T) = A(t)$. Montrer que pour chaque $s, t \in \mathbb{R}$,

$$R(s+T, t+T) = R(s,t).$$

Exercice 2.7 Soit $A \in C(\mathbb{R}; \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n))$ tel que pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $A(-t) = -A(t)$. Montrer que pour chaque $s, t \in \mathbb{R}$,

$$R(-s,-t) = R(s,t).$$

Exercice 2.8 Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $A \in C(I; \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n))$ et $B \in C(I; \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n))$. On suppose que

$$\int_I \|A(t) - B(t)\| \,\mathrm{d}t < \infty.$$

Soient R la résolvante associée à A et Q la résolvante associée à B. Montrer que R est bornée sur $I \times I$ si et seulement si Q est bornée sur $I \times I$.

Formule de Liouville

Exercice 2.9 Soit $A : [0,+\infty[\to \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$. On suppose que toute solution de

$$u'(t) = A(t)\big[u(t)\big] \tag{2.5}$$

est bornée sur $[0,+\infty[$ et que

$$\int_0^\infty \operatorname{tr} A > -\infty.$$

Montrer que si u est une solution de (2.5) et que $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$, alors pour chaque $t \in [0,+\infty[$, $u(t) = 0$.

Réduction d'ordre

Exercice 2.10 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Sachant que $u :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour $t \in]0, +\infty[$ par

$$u(t) = t^\lambda$$

satisfait pour chaque $t \in]0, +\infty[$,

$$u''(t) + \frac{u'(t)}{t} - \frac{\lambda^2 u(t)}{t^2} = 0,$$

trouver par la méthode de réduction d'ordre une deuxième solution de cette équation. Donnez une formule pour la résolvante du système associé à cette équation.

Exercice 2.11 Sachant que $w \colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $w(t) = t$ vérifie pour chaque $t \in]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$w''(t) = \frac{t+2}{t} w'(t) - \frac{t+2}{t^2} w(t),$$

trouver une seconde solution linéairement indépendante de cette équation.

Exercice 2.12 Sachant que $w_1 \colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour $t \in]0, +\infty[$ par $w_1(t) = t^2 \mathrm{e}^{-t}$ satisfait l'équation

$$w''(t) = \frac{w'(t)}{t} + \Big(1 - \frac{3}{t}\Big) w(t)$$

trouver une seconde solution linéairement indépendante.

Exercice 2.13 Exprimer la solution de l'équation

$$t^2 w''(t) - 6w(t) = t^4$$

pour $t > 0$ en fonction de $w(1)$ et $w'(1)$.

Exercices supplémentaires

Exercice 2.14 Soit $a \in C(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ tel que

$$\int_1^\infty s|a(s)| \,\mathrm{d}s < \infty.$$

Montrer qu'il existe une fonction $u :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} u''(t) = a(t)u(t) \quad \text{si } t \in]0, +\infty[, \\ \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{u(t)}{t} = 1, \\ \lim\limits_{t\to\infty} u'(t) = 1. \end{cases}$$

3. Systèmes d'équations différentielles ordinaires non linéaires

Matières

3.1. Existence locale de solution 71
3.2. Unicité 72
    3.2.1. Obstructions à l'unicité 72
    3.2.2. Unicité locale 72
    3.2.3. Unicité globale 75
3.3. Courbes intégrales maximales 76
    3.3.1. Construction de courbes intégrales maximales 76
3.4. Dépendance par rapport aux données initiales 79
    3.4.1. Continuité par rapport aux données initiales 79
        3.4.1.1. Continuité locale 79
        3.4.1.2. Continuité sur un intervalle borné 82
    3.4.2. Différentiabilité par rapport aux données initiales 83
Compléments 85
Exercices 93

Prérequis

☞ Suite de Cauchy de vecteurs

Questionnaire de révision

☞ Définir champ de vecteurs et courbe intégrale d'un champ de vecteurs

☞ Énoncer un théorème d'existence locale de courbes intégrales

☞ Définir un champ de vecteurs localement lipschitzien.

☞ Énoncer et démontrer un théorème d'unicité locale des courbes intégrales.

☞ Énoncer et démontrer un théorème d'unicité globale des courbes intégrales.

- ☞ Donner un exemple de champ de vecteurs possédant deux courbes intégrales passant par un point donné.
- ☞ Pourquoi définit-on les courbes intégrales comme des fonctions définies sur un *intervalle* ?
- ☞ Définir une courbe intégrale maximale.
- ☞ Donner des exemples et contre-exemples de courbes intégrales maximales.
- ☞ Énoncer un théorème d'existence de courbes intégrales maximales.
- ☞ Énoncer un théorème de caractérisation de courbes intégrales maximales.
- ☞ Comparer les résultats d'existence et d'unicité de courbes intégrales dans le cas linéaire avec ceux pour le cas de problèmes non linéaires. Quelles hypothèses sont les plus fortes ? Quelles conclusions sont les plus fortes ?
- ☞ Énoncer et démontrer des résultats de continuité de la solution par rapport aux données initiales.
- ☞ Quels sont les avantages et inconvéniens des différents cadres d'hypothèse pour étudier les équations différentielles : problèmes linéaires, problèmes différentiables en espace, problèmes lipschitziens en espace ou problèmes continus ?
- ☞ Énoncer et illustrer par des exemples la continuité de la solution par rapport aux conditions initiales.
- ☞ Énoncer et illustrer par des exemples la linéarisation autour d'une solution d'un problème nonlinéaire (différentiabilité par rapport aux conditions initiales).

Exercices prioritaires : 3.1, 3.6, 3.7, 3.15, 3.17.

3.1. Existence locale de solution

Dans ce chapitre nous allons étudier les problèmes d'équations différentielles de la forme

$$u'(t) = f(t, u(t)).$$

Nous utiliserons la terminologie suivante.

Définition 3.1 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*. Un* champ de vecteurs *sur* Ω *est une fonction* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$*.*

Définition 3.2 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *et* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *un champ de vecteur sur* Ω*. Soit* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle. La fonction* $u : I \to \mathbb{R}^n$ *est une* courbe intégrale *de* f *si* I *contient une infinité de points, si* u *est dérivable et si pour chaque* $t \in I$*,* $(t, u(t)) \in \Omega$ *et*

$$u'(t) = f\bigl(t, u(t)\bigr).$$

On demande que I soit un intervalle pour avoir des chances raisonables d'avoir unicité de la solution ; si le domaine de u n'était pas un intervalle, on aurait plusieurs morceaux de solutions de l'équation différentielle non reliées entre elles. Dans les applications, cela signifierait qu'un phénomène obéit parfois mais pas toujours au modèle mathématique, ce qui ruinerait le projet de modélisation. On demande aussi que I contienne une infinité de points afin qu'il soit assez grand pour que la dérivée ait un sens. Dans la notion de courbe intégrale, on a aussi incorporé le fait que u prenne des valeurs pour lesquelles $f(t, u(t))$ est définie. En résumé, on veut un domaine en un morceau, un membre de gauche et un membre de droite bien définis et satisfaire l'équation en tout temps.

On démontre que étant donné un point $(t_0, u_0) \in \Omega$, tout champ de vecteurs *continu* possède une courbe intégrale passant par ce point.

Proposition 3.1 (Cauchy–Peano) *Soit* $t_0 \in \mathbb{R}$*,* $h \in \,]0, +\infty[$*,* $r \in \,]0, +\infty[$*,* $u_0 \in \mathbb{R}^n$ *et* $f \colon]t_0 - h, t_0 + h[\times B(u_0, r) \to \mathbb{R}^n$ *un champ de vecteurs continu. Si pour chaque* $(t, x) \in \,]t_0 - h, t_0 + h[\times B(u_0, r)$*,*

$$h\|f(t, x)\| \le r,$$

alors il existe $u \colon]t_0 - h, t_0 + h[\to B(u_0, r)$ *qui soit une courbe intégrale de* f*.*

Géométriquement, la condition $h\|f(t, x)\| \le r$ impose une limitation de vitesse à la solution, qui fait qu'elle ne peut pas sortir de la boule $B(u_0, r)$ dans l'intervalle $]t_0 - h, t_0 + h[$.

Le preuve de ce théorème est difficile par le fait que la courbe intégrale obtenue ne satisfait aucune propriété d'unicité. Elle repose sur la caractérisation des ensembles compacts dans l'espace des fonctions continues sur un compact de G. Ascoli et C. Arzelá. Dans le cas où f est localement lipschitzienne en espace (voir définition 3.3), on a une preuve plus simple (proposition 3.13).

3.2. Unicité

3.2.1. Obstructions à l'unicité

Si f est un champ de vecteur, nous voulons déterminer si la courbe intégrale passant par un point (t_0, u_0) est unique. En général, la réponse est négative.

Il y a tout d'abord un *obstacle technique* : pour que deux fonctions soient égales, il faut que leurs domaines soient égaux et que leurs valeurs soient égales en chaque point du domaine. Dans notre cas, si on prend la restriction d'une courbe intégrale $u : I \to \mathbb{R}^n$ à un sous-intervalle strict $J \subsetneq I$ tel que $t_0 \in I$, la restriction $u|_J : J \to \mathbb{R}^n$ de u à J définie pour $t \in J$ par $u|_J(t) = u(t)$ est différente de u. On peut éviter ce problème en considérant des courbes intégrales de même domaine.

Il y aussi une *obstruction essentielle* illustrée par l'exemple suivant : soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ défini par

$$f(t, x) = 3\sqrt[3]{x^2}$$

Posons $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$u(t) = 0$$

et $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$v(t) = t^3.$$

On voit que u et v sont deux courbes intégrales, mais qu'elle ne sont pas égales.

3.2.2. Unicité locale

Le problème d'unicité peut être évité en supposant que le champ de vecteurs f soit suffisament régulier.

Définition 3.3 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Le champ de vecteurs $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est* lipschitzien en espace*, s'il existe $L \in [0, \infty[$ tel que pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, si $(t, x) \in \Omega$ et $(t, y) \in \Omega$, alors*

$$\|f(t, y) - f(t, x)\| \leq L\|y - x\|.$$

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $A : I \to \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n)$. Le champ de vecteurs $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ défini pour $(t, x) \in I \times \mathbb{R}^n$ par

$$f(t, x) = A(t)[x]$$

est lipschitzien en espace si et seulement si il existe $L \in [0, \infty[$ tel que pour chaque $t \in I$,

$$\|A(t)\| \leq L,$$

autrement dit, la fonction $\|A\| : I \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée. Nous avons donc montré que les fonctions linéaires en espace et bornées en temps, sont lipschitziennes en espace.

Définition 3.4 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *un ouvert. Le champ de vecteurs* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *est* dérivable en espace *en* $(t, x) \in \Omega$*, si pour chaque* $t \in \mathbb{R}$*, la fonction*

$$f(t, \cdot) : \{y \in \mathbb{R}^n \mid (t, y) \in \Omega\} \to \mathbb{R}^n$$

est dérivable en x*. On note* $D_x f(t, x)$ *sa dérivée.*

Si on retourne à la définition de différentiabilité, cela revient à dire qu'il existe $D_x f \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\lim_{y \to x} \frac{f(t, y) - f(t, x) - D_x f(t, x)[y - x]}{\|y - x\|} = 0.$$

On peut caractériser les fonctions lipschitziennes en espace comme étant des fonctions dont la dérivée en espace est bornée.

Proposition 3.2 (Champ lipschitzien en espace et dérivée bornée) *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *un ouvert tel que pour chaque* $t \in \mathbb{R}$*,* $\{x \in \mathbb{R}^n \mid (t, x) \in \Omega\}$ *soit convexe. Soit un champ de vecteurs* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *dérivable en espace. La fonction* $D_x f : \Omega \to \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$ *est bornée sur* Ω *si et seulement si la fonction* f *est lipschitzienne en espace.*

Dans cette proposition, l'hypothèse sur le *domaine* est essentielle.

Contre-exemple 3.1 La fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_* \to \mathbb{R}$ définie pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*$ par

$$f(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est dérivable en espace, mais n'est pas lipschitzienne en espace. En effet, si $t \in \mathbb{R}$, $x > 0$ et $y < 0$, on observe qu'on devrait avoir

$$2 = |f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|,$$

avec L indépendant de $x > 0$ et $y < 0$.

La proposition 3.2 dit que les champs dérivables et lipschitziens en espace ont une dérivée bornée, mais pas que les champs de vecteurs localement lipschitzien en espace sont dérivables. Par exemple, le champ de vecteur $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par $f(t, x) = |x|$ est lipschitzien en espace sans être dérivable.

Démonstration de la proposition 3.2. Supposons que f soit lipschitzien en espace. On a pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $(t, x) \in \Omega$ et $(t, x + \lambda v) \in \Omega$,

$$\|D_x f(x,t)[\lambda v]\| \leq \|f(t, x + \lambda v) - f(t,x) - D_x f(x,t)[\lambda v]\| + \|f(t, x + \lambda v) - f(t,x)\|.$$

Puisque

$$\|f(t, x + \lambda v) - f(t, x)\| \leq L|\lambda|\|v\|,$$

en divisant par $|\lambda|$, on obtient

$$\|D_x f(t,x)[v]\| \leq \frac{\|f(t, x + \lambda v) - f(t,x) - D_x f(t,x)[\lambda v]\|}{\|\lambda v\|}\|v\| + L\|v\|.$$

En prenant la limite quand $\lambda \to 0$, on conclut que

$$\|D_x f(t,x)[v]\| \leq L\|v\|.$$

Réciproquement, supposons que pour chaque $(x, t) \in \Omega$

$$\|D_x f(t,x)\| \leq L.$$

Puisque $\{x \in \mathbb{R}^n \mid (t, x) \in \Omega\}$ est convexe pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$, par l'inégalité des accroissements finis (proposition B.5), il existe $\lambda \in \,]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned}\|f(t,y) - f(t,x)\| &\leq \|D_x f\big(t, (1-\lambda)x + \lambda y\big)[y - x]\| \\ &\leq \|D_x f\big(t, (1-\lambda)x + \lambda y\big)\|\|y - x\| \leq L\|y - x\|.\end{aligned}$$ □

Proposition 3.3 (Unicité locale) *Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, $t_0 \in I$, $r \in \,]0, \infty[$, $u_0 \in \mathbb{R}^n$ et $f \colon I \times B(u_0, r) \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs continu et lipschitzien en espace. Si $u : I \to \mathbb{R}^n$ et $v : I \to \mathbb{R}^n$ sont des courbes intégrales de f et si $u(t_0) = v(t_0)$, alors pour chaque $t \in I$,*

$$u(t) = v(t).$$

Démonstration. Puisque u et v sont des courbes intégrales de f et que $u(t_0) = v(t_0)$, on a pour tout $t \in I$,

$$u(t) - v(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, u(s)) - f(s, v(s))\,\mathrm{d}s.$$

Par l'inégalité triangulaire pour l'intégrale (proposition B.6) et la condition de Lipschitz, on en déduit que

$$\|u(t) - v(t)\| \leq L \int_{[t_0, t]} \|u(s) - v(s)\|\,\mathrm{d}s.$$

Par la proposition 2.4, pour chaque $t \in I$, $\|u(t) - v(t)\| = 0$. □

3.2.3. Unicité globale

En général, les champs de vecteurs ne sont pas lipschitziens en espace dès que leur domaine est suffisament grand. Cependant, le résultat d'unicité reste valable quand le champ de vecteurs n'est que localement lipschitzien en espace.

Définition 3.5 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Le champ de vecteurs $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est* localement lipschitzien en espace, *si pour chaque $(t, x) \in \Omega$ il existe $r > 0$ et $h > 0$ tels que f est lipschitzien en espace sur $]t-h, t+h[\times B(x, r) \subseteq \Omega$.*

Remarquons qu'un champ de vecteur lipschitzien en espace est localement lipschitzien en espace. De plus, tout champ de vecteur continûment dérivable en espace est localement lipschitzien en espace.

On a la proposition suivante

Proposition 3.4 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs dérivable en espace. Si $D_x f : \Omega \to \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$ est continue, alors f est localement lipschitzien en espace.*

Démonstration. Cela découle de la proposition 3.2. □

Proposition 3.5 (Unicité globale) *Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs continu, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soient $u : I \to \mathbb{R}^n$ et $v : I \to \mathbb{R}^n$ deux courbes intégrales de f. Si f est localement lipschitzienne en espace et s'il existe $t_0 \in I$ tel que $u(t_0) = v(t_0)$, alors pour chaque $t \in I$,*

$$u(t) = v(t).$$

Géométriquement, cette proposition dit que si les graphes de deux courbes intégrales de même domaine s'intersectent, alors ces deux courbes intégrales coïncident.

Ce résultat serait faux si on n'avait pas imposé que l'ensemble I soit un intervalle : par exemple l'équation $u'(t) = 0$ a une infinité de solutions sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ telles que $u(1) = 0$: il suffit de faire varier la valeur qu'elle prend sur les nombres réels strictement négatifs.

Démonstration de la proposition 3.5. Supposons par l'absurde qu'il existe $t \in I$ tel que $t > t_0$ et $u(t) \neq v(t)$. Posons

$$\bar{t} = \inf\bigl\{t \in I \cap]t_0, \infty[\mid u(t) \neq v(t)\bigr\}.$$

On a clairement $\bar{t} \in I \cap [t_0, \infty[$.

Tout d'abord, montrons que $u(\bar{t}) = v(\bar{t})$. Si $\bar{t} = t_0$, cela découle de notre hypothèse. Sinon, pour chaque $t \in [t_0, \bar{t}[$, on a $u(t) = v(t)$. Puisque u et v sont continues sur I et $\bar{t} \in I$, on a $u(\bar{t}) = \lim_{t \to \bar{t}} u(t) = \lim_{t \to \bar{t}} v(t) = v(\bar{t})$.

Puisque f est localement lipschitzien en espace, on peut trouver $r > 0$ et $h > 0$ tels que f est lipschitzien en espace sur $I \cap]\bar{t} - h, \bar{t} + h[\times B(u(\bar{t}), r) \subseteq \Omega$.

Puisque les fonctions u et v sont continues, on peut trouver $k \in \left]0, h\right[$ tel que pour chaque $t \in I \cap \left]\bar{t}-k, \bar{t}+k\right[$, $u(t) \in B(u(\bar{t}), r)$ et $v(t) \in B(v(\bar{t}), r)$. La restriction de u et v à l'intervalle $I \cap \left]\bar{t}-k, \bar{t}+k\right[$ satisfait donc les hypothèses de la propriété d'unicité locale (proposition 3.3). On en déduit que pour chaque $t \in \left[\bar{t}, \bar{t}+k\right[$, $u(t) = v(t)$. Puisque ceci contredit la définition de $\bar{t}$, nous avons montré que pour chaque $t \in I \cap \left[t_0, \infty\right[$, $u(t) = v(t)$.

On prouve de même que pour chaque $t \in I \cap \left]-\infty, t_0\right]$, $u(t) = v(t)$. □

3.3. Courbes intégrales maximales

3.3.1. Construction de courbes intégrales maximales

La proposition 3.1 nous donnait l'existence d'une courbe intégrale définie sur un intervalle de temps $\left]t_0 - h, t_0 + h\right[$. Si la fonction u a une limite en $t_0 + h$, et que $(t_0 + h, \lim_{t_0+h} u) \in \Omega$, on peut prolonger la solution. En continuant de la sorte, on espère obtenir une solution définie sur un intervalle de temps le plus long possible. Pour étudier ces solutions définies le plus longtemps possible, nous allons définir et étudier la notion de courbe intégrale maximale.

Définition 3.6 *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $u : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe intégrale de f. La fonction u est une* courbe intégrale maximale *si pour toute courbe intégrale $v : J \to \mathbb{R}^n$, telle que $I \subseteq J$ et pour chaque $t \in I$, $v(t) = u(t)$, on a $I = J$.*

Autrement dit, u est maximale si elle n'est pas la restriction à un sous-ensemble strict de son domaine d'une autre courbe intégrale.

Un premier résultat fondamental est l'existence de courbes intégrales maximales.

Proposition 3.6 (Existence de courbes intégrales maximales) *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue localement lipschitzienne en espace et $(t_0, u_0) \in \Omega$. Il existe un unique intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$ tel que $t_0 \in I$ et une unique fonction courbe intégrale $u : I \to \mathbb{R}^n$ maximale du champ de vecteurs f telle que $u(t_0) = u_0$.*

Démonstration. Posons

$$S_+ = \Bigl\{t \in \left]t_0, \infty\right[\mid \text{il existe une courbe intégrale } u : \left]s, t\right[\to \mathbb{R}^n \\ \text{du champ de vecteurs } f \text{ avec } \left]s, t\right[\ni t_0 \text{ et } u(t_0) = u_0\Bigr\}.$$

Par le théorème d'existence local (proposition 3.1), cet ensemble est un intervalle non vide. Posons

$$t_{\max} = \sup S_+.$$

Soit $(t_m)_{m\in\mathbb{N}_*}$ une suite strictement croissante de $]t_0, t_{\max}[$ telle que $\lim_{m\to\infty} t_m = t_{\max}$. Soit $u_m\colon [t_0, t_m[\to \mathbb{R}^n$ une courbe intégrale de f. Définissons $u\colon [t_0, t_{\max}[\to \mathbb{R}^n$ par

$$u(t) = u_m(t)$$

si $t \in [t_{m-1}, t_m[$. Par la propriété d'unicité globale (proposition 3.5), on a pour $\ell \le m$ et $t \in [t_0, t_\ell[$,

$$u_\ell(t) = u_m(t).$$

On a donc pour chaque $m \in \mathbb{N}_*$ et $t \in [t_0, t_m[$

$$u(t) = u_m(t).$$

La fonction $u : [t_0, t_{\max}[\to \mathbb{R}^n$ définit donc bien une courbe intégrale du champ de vecteurs f. On procède de même pour définir u sur $]t_{\min}, t_0[$, où $t_{\min} = \inf S_-$ avec

$$\begin{aligned} S_- = \bigl\{s \in]-\infty, t_0[\mid \text{il existe une courbe intégrale } u :]s,t[\to \mathbb{R}^n \\ \text{du champ de vecteurs } f \text{ avec }]s,t[\ni t_0 \text{ et } u(t_0) = u_0\bigr\}. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que u est maximale. Soit une courbe intégrale $v : J \to \mathbb{R}^m$ telle que $t_0 \in J$ et $v(t_0) = u_0$. Par définition de $t_{\min}$ et de $t_{\max}$, on conclut que $J \subseteq]t_{\min}, t_{\max}[$. L'unicité suit de la propriété d'unicité globale (proposition 3.5). □

Caractérisation des courbes intégrales maximales

Pour identifier l'intervalle de temps I d'une solution maximale, nous utiliserons une condition pour nous assurer que la solution que nous avons construite ne peut pas être prolongée.

Si $u : I \to \mathbb{R}$ est une courbe intégrale maximale, alors elle ne peut pas avoir de limites aux réels de ∂I. En effet, sinon, on peut appliquer la propriété d'existence de solutions à partir de $t \in \partial I$. En particulier, puisque la fonction u est continue, on doit avoir $\partial I \cap I = \emptyset$; autrement dit, l'intervalle I est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}$. En pratique, il est difficile de déterminer si une fonction a une limite en un point adhérent de son domaine. Nous allons raffiner le critère de la limite en un critère d'explosion.

Proposition 3.7 (Caractérisation des courbes intégrales maximales) *Soit* $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *un ouvert,* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *une fonction continue. Soit* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle non vide et* $u : I \to \mathbb{R}^n$ *une courbe intégrale de* f*. La courbe intégrale* u *est maximale si et seulement si pour tout* $t_* \in \partial I$ *et pour tout* $K \subset \mathbb{R}^n$ *compact, si* $\{t_*\} \times K \subset \Omega$ *alors il existe* $\delta > 0$ *tel que si* $t \in I$ *et* $|t - t_*| \le \delta$*, alors* $u(t) \notin K$*.*

Pour bien comprendre cet énoncé, rappelons que la frontière ∂I d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est l'ensemble des points adhérents qui ne sont pas des points intérieurs, autrement dit les nombres réels qui sont limite d'une suite de points de I et d'une autre de suite de points de $I \setminus \mathbb{R}$. Par exemple, on a $\partial[1,3] = \{1,3\}$, $\partial]1,3[= \{1,3\}$, $\partial]3,\infty[= \{3\}$ et $\partial\mathbb{R} = \partial\emptyset = \emptyset$. Dans le cas d'intervalles non bornés, les bornes infinies *ne font pas partie* de la frontière.

Cette proposition dit que lorsqu'une solution maximale arrête d'exister en t_*, non seulement elle n'a pas de limite en t_*, mais de plus elle explose en ce point-là, en sortant de tout compact fixé, ce qui la force à tendre vers l'infini ou vers le bord du domaine en espace-temps $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, ce qui correspond à une singularité.

Puisque les solutions maximales ont une limite, cette proposition implique aussi que si la fonction $u : I \to \mathbb{R}^n$ est une solution d'équation différentielle, alors soit u a une limite en $t_* \in \partial I$, soit la fonction u explose en t_*. La fonction u ne peut donc pas osciller de plus en plus rapidement autour du temps t_*.

Démonstration de la proposition 3.7. Supposons que u ne soit pas maximale. Alors il existe $J \supsetneq I$ et une courbe intégrale $v : J \to \mathbb{R}^n$ telle que $v = u$ sur I. Prenons $t_* \in \partial I \cap J$. Puisque Ω est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\{t_*\} \times B[v(t_*), \varepsilon] \subset B[(t_*, v(t_*)), \varepsilon] \subset \Omega$. Puisque v est continue, il existe $\eta > 0$ tel que si $t \in J$ et $|t - t_*| \le \eta$, alors $\|v(t_*) - v(t)\| \le \varepsilon$. Nous considérons le compact $K = B[v(t_*), \varepsilon]$. Puisque $t_* \in \partial I$, pour chaque $\delta > 0$ il existe $t \in I$ tel que $|t - t_*| \le \min(\delta, \eta)$. Nous avons contredit l'hypothèse.

Dans l'autre sens, supposons qu'il existe $K \subset \mathbb{R}^n$ compact tel que pour chaque $\delta > 0$, il existe $t \in I$ tel que $|t - t_*| \le \delta$ et $u(t) \in K$. En particulier il existe une suite $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de points de I qui converge vers t_* et telle que $u(t_m) \in K$. Puisque K est compact, par la définition d'ensemble compact (définition B.5), on peut trouver une sous-suite $(u(t_{m_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un point $\bar{u} \in K$. Puisque Ω est ouvert, on peut trouver $l > 0$ et $r > 0$ tel que $]t_* - 2l, t_* + 2l[\times B(\bar{u}, 2r) \subset \Omega$. Puisque $[t_* - l, t_* + l] \times B[\bar{u}, r] \subset \Omega$ est compact et f est continue, on peut trouver $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $(t, x) \in [t_* - l, t_* + l] \times B[\bar{u}, r]$,

$$\|f(t,x)\| \le M.$$

Soit $h \in]0, l[$ tel que $h \le r/M$. Choisissons $m_* \in \mathbb{N}$ tel que $t_{m_*} \ge t_* - \frac{h}{3}$ et $u(t_{m_*}) \in B(\bar{u}, r/3)$. Par la proposition 3.1, il existe $\tilde{u} \colon]t_{m_*} - \frac{2h}{3}, t_{m_*} + \frac{2h}{3}[$ qui soit une courbe intégrale du champ de vecteur f et telle que $\tilde{u}(t_{m_*}) = u(t_{m_*})$. Si on définit la fonction $v : [t_0, t_{m_*} + \frac{2h}{3}[\to \mathbb{R}^n$ par

$$v(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } t \in [t_0, t_{m_*}[, \\ \tilde{u}(t) & \text{si } t \in [t_{m_*}, t_m + 2h/3[, \end{cases}$$

on vérifie que v est une courbe intégrale de f. Puisque $t_{m_*} + \frac{2h}{3} \ge t_* + \frac{h}{3} > t_*$, nous avons une contradiction avec la maximalité de u. $\square$

Un cas particulier important est celui où $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. La proposition nous dit que si $\sup I < \infty$, alors $\lim_{t \to \sup I} \|u(t)\| = \infty$. En effet, pour tout $R > 0$

on considère le compact $B[0,R]$, et on vérifie qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour $t \in I$ tel que $t \geq \sup I - \delta$, $\|u(t)\| \geq R$. Donc, par définition de limite infinie, $\lim_{t \to \sup I} \|u(t)\| = \infty$.

Voyons sur un exemple comment on peut appliquer la proposition 3.7 pour montrer l'existence d'une courbe intégrale $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Si on considère le problème du pendule, on a comme champ de vecteurs

$$f(t,x) = \big(x_2, -\sin x_1\big).$$

Soit $u : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe maximale donnée par la proposition précédente. Prenons la fonction

$$E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

définie par

$$E(x_1,x_2) = \frac{x_2^2}{2} + 1 - \cos x_1,$$

(il s'agit de l'énergie mécanique totale du pendule). On vérifie que

$$(E \circ u)'(t) = 0.$$

Autrement dit la fonction $E \circ u$ est constante. On en déduit que si $u = (u_1,u_2)$, u_2 est une fonction bornée par $\sqrt{2E(u(t_0))}$. Puisque $u_1'(t) = u_2(t)$, on en déduit que

$$|u_1(t)| \leq |u_1(t_0)| + \sqrt{2E(u(t_0))}|t - t_0|.$$

Soit $t_* \in \partial I$. On considère le compact

$$K = \Big\{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_2| \leq \sqrt{2E(u(t_0))} \text{ et } |x_1| \leq |u_1(t_0)| + \sqrt{2E(u(t_0))}|t_* - t_0|\Big\}.$$

On vérifie que pour tout $t \in I \cap [t_0,t_*]$, $u(t) \in K$, en contradiction avec la caractérisation des courbes intégrales maximales. On en conclut que $\partial I = \emptyset$.

3.4. Dépendance par rapport aux données initiales

3.4.1. Continuité par rapport aux données initiales

3.4.1.1. Continuité locale

Proposition 3.8 (Continuité locale) *Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, $h \in \,]0,+\infty[$, $r \in \,]0,\infty[$, $u_0 \in \mathbb{R}^n$ et $f :]t_0 - h, t_0 + h[\times B(u_0,r) \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs continu et lipschitzien en espace. Si $u :]t_0 - h, t_0 + h[\to \mathbb{R}^n$ et $v :]t_0 - h, t_0 + h[\to \mathbb{R}^n$ sont des courbes intégrales de f, alors pour chaque $s,t \in \,]t_0 - h, t_0 + h[$,*

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \mathrm{e}^{L|t-s|}\|u(s) - v(s)\|,$$

où L est donnée par la condition de Lipschitz en espace.

L'énoncé de la proposition 3.8 a la même structure que celui de la proposition 3.3 à propos de l'unicité locale des solutions. La seule différence est que la conclusion devient une inégalité. En fait, la proposition 3.3 est une conséquence immédiate de la proposition 3.8.

Nous utiliserons une variante quantitative de la proposition 2.4.

Proposition 3.9 (Lemme de Grönwall) *Soit* $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ *une fonction intégrable. Si pour chaque* $t \in [a, b]$*,*

$$f(t) \le K + L \int_{[t_0,t]} f(s) \,\mathrm{d}s,$$

alors pour tout chaque $t \in [a, b]$*,*

$$f(t) \le K \mathrm{e}^{L|t-t_0|}.$$

Démonstration. Nous allons commencer par démontrer par récurrence que pour chaque $t \in [a, b]$ et pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on a

$$f(t) \le K \sum_{i=0}^{k} \frac{(L|t-t_0|)^i}{i!} + L \int_{[t_0,t]} \frac{\big(L|t-s|\big)^k}{k!} f(s) \,\mathrm{d}s. \tag{3.1}$$

Cette inégalité est vérifiée par hypothèse pour $k = 0$. Supposons-la vraie pour $k \in \mathbb{N}$. Alors, par l'hypothèse de récurrence et l'hypothèse de la proposition, on obtient

$$\begin{aligned} f(t) &\le K \sum_{i=0}^{k} \frac{(L|t-t_0|)^i}{i!} + L \int_{[t_0,t]} \frac{(L|t-s|)^k}{k!} f(s) \,\mathrm{d}s \\ &\le K \sum_{i=0}^{k} \frac{(L|t-t_0|)^i}{i!} + L \int_{[t_0,t]} \frac{(L|t-s|)^k}{k!} K \,\mathrm{d}s + L^2 \int_{[t_0,t]} \frac{(L|t-s|)^k}{k!} \int_{[t_0,s]} f(r) \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

La première intégrale se calcule explicitement :

$$L \int_{[t_0,t]} \frac{(L|t-s|)^k}{k!} K \,\mathrm{d}s = K \frac{(L|t-t_0|)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Pour la seconde intégrale, en intervertissant l'ordre d'intégration, on a

$$\begin{aligned} L^2 \int_{[t_0,t]} \frac{(L|t-s|)^k}{k!} \int_{[t_0,s]} f(r) \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}s &= L^2 \int_{[t_0,t]} \int_{[r,t]} \frac{(L|t-s|)^k}{k!} f(r) \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}r \\ &= L \int_{[t_0,t]} \frac{(L|t-r|)^{k+1}}{(k+1)!} f(r) \,\mathrm{d}r \\ &= L \int_{[t_0,t]} \frac{(L|t-s|)^{k+1}}{(k+1)!} f(s) \,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Nous en déduisons donc que

$$f(t) \leq K \sum_{i=0}^{k+1} \frac{(L|t-t_0|)^i}{i!} + L \int_{[t_0,t]} \frac{(L(t-s))^{k+1}}{(k+1)!} f(s) \,\mathrm{d}s,$$

et nous avons donc démontré l'inégalité (3.1) par récurrence.

Par la formule intégrale du reste du développement de Taylor de l'exponentielle (proposition B.8), on a

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{(L|t-t_0|)^i}{i!} = \mathrm{e}^{L|t-t_0|} - \int_{[t,t_0]} \frac{(L|t-s|)^k}{k!} \mathrm{e}^{L|s-t_0|} \,\mathrm{d}s \leq \mathrm{e}^{L|t-t_0|}.$$

D'autre part, pour chaque $s \in [t_0, t]$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{(L|t-s|)^k}{k!} \leq \frac{(L|t-t_0|)^k}{k!},$$

et donc pour chaque $k \in \mathbb{N}$, puisque la fonction f est positive

$$\int_{[t_0,t]} \frac{(L|t-s|)^k}{k!} f(s) \,\mathrm{d}s \leq \frac{(L|t-t_0|)^k}{k!} \int_{[t_0,t]} f(s) \,\mathrm{d}s.$$

Nous en déduisons que

$$f(t) \leq K\mathrm{e}^{L|t-t_0|} + \frac{(L|t-t_0|)^k}{k!} \int_{[t_0,t]} |f(s)| \,\mathrm{d}s.$$

Puisque

$$\lim_{k \to \infty} \frac{(L|t-t_0|)^k}{k!} = 0,$$

nous en concluons que

$$f(t) \leq K\mathrm{e}^{L|t-t_0|}. \qquad \square$$

Démonstration de la proposition 3.8. Pour chaque $t, s \in \,]t_0 - h, t_0 + h[$, nous avons, puisque u et v sont des courbes intégrales du champ de vecteurs f,

$$\begin{aligned} u(t) - v(t) &= u(s) - v(s) + \int_s^t u'(r) - v'(r) \,\mathrm{d}r \\ &= u(s) - v(s) + \int_s^t f(r, u(r)) - f(r, v(r)) \,\mathrm{d}r. \end{aligned}$$

Par l'inégalité triangulaire pour l'intégrale et par la condition de Lipschitz, nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\| &\leq \|u(s) - v(s)\| + \int_{[s,t]} \|f(r, u(r)) - f(r, v(r))\| \,\mathrm{d}r \\ &\leq \|u(s) - v(s)\| + L \int_{[s,t]} \|u(r) - v(r)\| \,\mathrm{d}r. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Grönwall (proposition 3.9), nous en déduisons que

$$\|u(t) - v(t)\| \leq e^{L|t-s|} \|u(s) - v(s)\|. \qquad \square$$

3.4.1.2. Continuité sur un intervalle borné

Proposition 3.10 (Continuité ponctuelle globale) *Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs continu, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $t_0 \in I$. Si $u \colon I \to \mathbb{R}^n$ est une courbe intégrale de f et si f est localement lipschitzienne en espace, alors pour chaque $a, b \in I$ tels que $t_0 \in]a, b[$ et pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour chaque $v_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $(t_0, v_0) \in \Omega$ et $\|v_0 - u(t_0)\| \leq \delta$, il existe une courbe intégrale $v :]a, b[\to \mathbb{R}^n$ de f telle que $v(t_0) = v_0$ et pour chaque $t \in]a, b[$,*

$$\|v(t) - u(t)\| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. Supposons que $a < t_0 < b$. Posons

$$\begin{aligned} S_+ = \{b \in I \cap]t_0, \infty[\mid & \text{ pour chaque } \varepsilon > 0, \\ & \text{il existe } \delta > 0 \text{ tel que pour chaque } v_0 \in B[u(t_0), \delta] \text{ tel que } (t_0, v_0) \in \Omega, \\ & \quad \text{il existe une courbe intégrale } v :]t_0, b[\to \mathbb{R}^n \text{ de } f \\ & \quad \text{telle que } v(t_0) = v_0 \text{ et pour chaque } t \in]t_0, b[,\ \|v(t) - u(t)\| \leq \varepsilon.\} \end{aligned}$$

Il est clair que S_+ est un intervalle. Par la propriété de continuité locale (proposition 3.8), l'ensemble S_+ n'est pas vide.

Si $S_+ \neq I \cap]t_0, \infty[$, posons

$$\bar{b} = \sup S_+.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est localement lipschitzien en espace, on peut trouver $r > 0$ et $h > 0$ tels que f est lipschitzien en espace sur $]\bar{b}-h, \bar{b}+h[\times B(u(\bar{b}), r) \subseteq \Omega$. Nous pouvons supposer que $]\bar{b} - h, \bar{b} + h[\subset I \cap]t_0, \infty[$ et $\varepsilon = r$. Posons $\Omega_{u,\varepsilon} = \{(t, x) \in \Omega \mid \|x - u(t)\| < \varepsilon\}$.

Si $v : J \to \mathbb{R}^m$ est une courbe intégrale maximal de $f|_{\Omega_{u,\varepsilon}}$. Puisque$\bar{b} - h \in S_+$, par définition de S_+, il existe $\delta_1 > 0$ tel que si $\|v(t_0) - u(t_0)\| \leq \delta_1$ on a $[t_0, \bar{b}[\subset J$. Par la proposition 3.8, on a pour tout $t \in [\bar{b} - h, \bar{b} + h] \cap J$,

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \|u(\bar{b} - h) - v(\bar{b} - h)\| \mathrm{e}^{L(t+h-\bar{b})}.$$

Posons pour $\eta > 0$,

$$K_\eta = \{(t, x) \in \Omega_{u,\varepsilon} \cap \mathbb{R}^m \times [\bar{b} - h, \bar{b} + h] : \|x - u(t)\| \leq \eta \mathrm{e}^{L(t+h-\bar{b})}\}.$$

Si $\eta > 0$ est suffisament petit, K est compact. Par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que $\delta < \delta_1$ et tel que si $\|v(t_0) - u(t_0)\| \leq \delta$, alors $\|v(\bar{b} - h) - u(\bar{b} - h)\| \leq \eta$. Par la caractérisation des solutions maximales,

$$\sup\{t \in J \mid (t, v(t)) \in K_\eta\} \in J,$$

et donc $[t_0, \bar{b} + h] \in J$, en contradiction avec l'hypothèse $S_+ \neq I \cap]t_0, \infty[$. □

3.4.2. Différentiabilité par rapport aux données initiales

Proposition 3.11 (Différentiabilité locale) *Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, $h \in]0,+\infty[$, $r \in]0,\infty[$, $\Omega \supset [t_0-h,t_0+h] \times B(u_0,r)$, $u_0 \in \mathbb{R}^n$ et $f\colon]t_0-h,t_0+h[\times B(u_0,r) \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs dérivable en espace dont la dérivée en espace $D_x f$ soit uniformément continue. Si $u :]t_0-h,t_0+h[\to \mathbb{R}^n$ et $v :]t_0-h,t_0+h[\to \mathbb{R}^n$ sont des courbes intégrales de f, alors pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $s,t \in]t_0-h,t_0+h[$ et $\|u(s)-v(s)\| \le \delta$, alors*

$$\|v(t)-u(t)-R(t,s)[v(s)-u(s)]\| \le \varepsilon \|v(s)-u(s)\|,$$

où R est la résolvante associée à $A \in C(]t_0-h,t_0+h[)$ définie par $A(t) = D_x(f(t,u(t)))$.

Démonstration. On note que pour chaque $t \in]t_0-h,t_0+h[$,

$$\begin{aligned}
&v(t)-u(t)-R(t,s)[u(s)-v(s)]\\
&\qquad= \int_s^t f(q,v(q))-f(q,u(q))-A(q)[R(q,s)[u(s)-v(s)]]\,\mathrm{d}q\\
&\qquad= \int_s^t f(q,v(q))-f(q,u(q))-D_x f(q,u(q)))[u(q)-v(q)]\,\mathrm{d}q\\
&\qquad\qquad+\int_s^t D_x f(q,u(q))[u(q)-v(q)-R(q,s)[u(s)-v(s)]]\,\mathrm{d}q.
\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}
&\|v(t)-u(t)-R(t,s)[u(s)-v(s)]\|\\
&\qquad\le \int_{[s,t]} \|f(q,v(q))-f(q,u(q))-D_x f(q,u(q)))[u(q)-v(q)]\|\,\mathrm{d}q\\
&\qquad\qquad+\int_{[s,t]} \|D_x f(q,u(q))\|\|u(q)-v(q)-R(q,s)[u(s)-v(s)]\|\,\mathrm{d}q.
\end{aligned}$$

Puisque la fonction $D_x f$ est continue sur un compact, elle est bornée et donc il existe $M > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
&\int_{[s,t]} \|D_x f(q(t,u(q))\|\|u(q)-v(q)-R(q,s)[u(s)-v(s)]\|\,\mathrm{d}q\\
&\qquad\le M\int_{[s,t]} \|u(q)-v(q)-R(q,s)[u(s)-v(s)]\|\,\mathrm{d}q.
\end{aligned}$$

D'autre part, puisque $D_x f$ est uniformément continue, pour chaque $\bar\varepsilon > 0$, il existe $\bar\delta > 0$ tel que si $\|x-y\| \le \bar\delta$, alors

$$\|f(t,y)-f(t,x)-D_x f(t,x)[y-x]\| \le \bar\varepsilon\|y-x\|.$$

Si nous supposons que $\|u(s)-v(s)\| \leq e^{-2Lh}\bar{\delta}$, alors pour chaque $q \in [t_0-h, t_0+h]$, $\|u(q) - v(q)\| \leq e^{L|q-s|}\|u(s) - v(s)\| \leq \bar{\delta}$, et donc

$$\begin{aligned}\int_{[s,t]} \|f(q, v(q)) - f(q, v(q)) - D_x f(q, u(q)))[u(q) - v(q)]\| \,\mathrm{d}q \\ \leq \bar{\varepsilon} \int_{[s,t]} \|u(q) - v(q)\| \,\mathrm{d}q \leq \bar{\varepsilon}\frac{1}{L}(e^{L|t-s|} - 1)\|u(s) - v(s)\|.\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Grönwall, on en déduit que

$$\|v(t) - u(t) - R(t, s)[v(s) - u(s)]\| \leq \bar{\varepsilon}\frac{e^{L|t-s|} - 1}{L}\|u(s) - v(s)\|\mathrm{e}^{|t-s|M}.$$

La conclusion suit en prenant $\bar{\varepsilon}$ tel que

$$\bar{\varepsilon}\frac{e^{2Lh} - 1}{L}e^{2Mh} = \varepsilon. \qquad \square$$

Proposition 3.12 (Différentiabilité globale) *Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs continu, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $t_0 \in I$. Si $u \colon I \to \mathbb{R}^n$ est une courbe intégrale de f et si f est continûment dérivable, alors pour chaque $a, b \in I$ tels que $t_0 \in]a, b[$ et pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour chaque $v_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $(t_0, v_0) \in \Omega$ et $\|v_0 - u(t_0)\| \leq \delta$, il existe une courbe intégrale $v :]a, b[\to \mathbb{R}^n$ de f telle que $v(t_0) = v_0$ et pour chaque $t \in]a, b[$,*

$$\|v(t) - u(t) - R(t, t_0)[v_0 - u(t_0)]\| \leq \varepsilon\|R(t, t_0)[v_0 - u_0]\|,$$

où $R(t, s)$ est la résolvante associée à la fonction $A : [a, b] \to \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n)$ définie pour $t \in [a, b]$ par $A(t) = D_x f(t, u(t))$.

Ce résultat dit que pour v_0 proche de $u(t_0)$ la solution se comporte comme $u(t) + R(t, t_0)[v_0 - u(t_0)]$. Ce résultat est faux sur des intervalles de temps non bornés. En effet si on considère l'équation

$$u'(t) = u(t)^4$$

et la solution identiquement nulle u. On a alors $D_x f(t, u(t)) = 0$. On observe que si $v : I \to \mathbb{R}$ est une solution non nulle v n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et de plus que si v est maximale, la quantité

$$v(t) - u(t) - R(t, t_0)[v_0 - u(t_0)] = v(t)$$

n'est pas bornée.

Compléments

Itération de Picard

Proposition 3.13 (Cauchy Picard Lipschitz Lindelöf) *Soit* $t_0 \in \mathbb{R}$, $h \in]0, +\infty[$, $r \in]0, \infty[$, $u_0 \in \mathbb{R}^n$ *et* $f\colon]t_0 - h, t_0 + h[\times B(u_0, r) \to \mathbb{R}^n$ *un champ de vecteurs continu et lipschitzien en espace. Si pour chaque* $(t, x) \in]t_0 - h, t_0 + h[\times B(u_0, r)$,

$$h\|f(t, x)\| \leq r,$$

alors il existe $u\colon]t_0 - h, t_0 + h[\to B(u_0, r)$ *qui soit une courbe intégrale de* f *telle que* $u(t_0) = u_0$.

On remarquera que, pour f donné, la valeur de h est limitée. En fait, on veut s'assurer que la solution ne sorte par de l'ensemble $B(u_0, r)$.

Démonstration. Définissons (avec un léger abus de notation) $u_0\colon]t_0 - h, t_0 + h[\to B(u_0, r)$ pour $t \in]t_0 - h, t_0 + h[$ par

$$u_0(t) = u_0.$$

Supposons que nous ayons défini pour $k \in \mathbb{N}$ la fonction $u_k\colon]t_0 - h, t_0 + h[\to B(u_0, r)$. Posons pour $t \in]t_0 - h, t_0 + h[$,

$$u_{k+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f\bigl(s, u_k(s)\bigr) \,\mathrm{d}s.$$

On vérifie que pour chaque $t \in]t_0 - h, t_0 + h[$, on a

$$\|u_{k+1}(t) - u_0\| \leq \int_{[t_0, t]} \|f(s, u_k(s))\| \,\mathrm{d}s \leq \frac{|t - t_0|}{h} r < r.$$

Nous allons montrer que pour chaque $t \in]t_0 - h, t_0 + h[$, la suite $(u_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Pour cela, commençons par montrer que pour chaque $k \in \mathbb{N}$,

$$\|u_{k+1}(t) - u_k(t)\| \leq r \frac{(L|t - t_0|)^k}{k!}, \tag{3.2}$$

où L est la constante donnée par la définition de champ de vecteurs lipschitzien en espace. Pour $k = 0$, la propriété est vraie. Supposons la vraie pour $k \in \mathbb{N}$. On a, pour chaque $t \in]t_0 - h, t_0 + h[$,

$$u_{k+2}(t) - u_{k+1}(t) = \int_{t_0}^{t} f\bigl(s, u_{k+1}(s)\bigr) - f\bigl(s, u_k(s)\bigr) \,\mathrm{d}s.$$

Par l'inégalité triangulaire pour l'intégrale, on en déduit que

$$\|u_{k+2}(t) - u_{k+1}(t)\| \leq \int_{[t_0, t]} \bigl\|f\bigl(s, u_{k+1}(s)\bigr) - f\bigl(s, u_k(s)\bigr)\bigr\| \,\mathrm{d}s.$$

Puisque f est lipschitzienne en espace, on en déduit ques

$$\|u_{k+2}(t) - u_{k+1}(t)\| \le L \int_{[t_0,t]} \|u_{k+1}(s) - u_k(s)\| \,\mathrm{d}s.$$

Par hypothèse de récurrence, on en conclut que

$$\|u_{k+2}(t) - u_{k+1}(t)\| \le L \int_{[t_0,t]} r \frac{(L|s-t_0|)^k}{k!} \,\mathrm{d}s = r \frac{(L|t-t_0|)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Puisque

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{m=0}^{k} r \frac{(L|t-t_0|)^{m+1}}{(m+1)!} = r(\mathrm{e}^{L|t-t_0|} - 1),$$

et que

$$u_k(t) = u_0(t) + \sum_{m=0}^{k-1} (u_{m+1}(t) - u_m(t))$$

nous avons par la proposition B.2, que $(u_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Définissons $u : I \to \mathbb{R}^n$ pour $t \in I$ par

$$u(t) = \lim_{k\to\infty} u_k(t).$$

Nous voulons montrer que u est une solution au problème posé. Nous savons que pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{k+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f\bigl(s, u_k(s)\bigr) \,\mathrm{d}s.$$

Nous désirons passer à la limite dans cette identité par le théorème de convergence dominée.

On note que pour chaque $s \in \,]t_0 - h, t_0 + h[$,

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k(s) - u_0\| \le \frac{|s-t_0|}{h} r < r$$

et que

$$\lim_{k\to\infty} f(s, u_k(t)) = f(s, u(s)).$$

De plus, pour chaque $k \in \mathbb{N}$,

$$\|f(s, u_k(s))\| \le \frac{r}{h}.$$

Par le théorème de convergence dominée (proposition B.12), $t \in \,]t_0 - h, t_0 + h[\, \mapsto f(t, u(t))$ est intégrable et

$$u(t) = \lim_{k\to\infty} u_{k+1}(t) = u_0 + \lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{t} f\bigl(s, u_k(s)\bigr) \,\mathrm{d}s = u_0 + \int_{t_0}^{t} f\bigl(s, u(s)\bigr) \,\mathrm{d}s.$$

On en déduit que u est continue (proposition B.10), et ensuite que u est dérivable (proposition B.11) et satisfait l'équation désirée. □

Solutions maximales sans unicité

La proposition 3.6 reste vraie sans le caractère localement lipschitzien en espace du champ de vecteurs. Cependant, on perd alors l'unicité de la solution maximale et la preuve repose sur l'axiome du choix.

Proposition 3.14 *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et $(t_0, u_0) \in \Omega$. Il existe un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$ tel que $t_0 \in I$ et une courbe intégrale maximale $u : I \to \mathbb{R}^n$ du champ de vecteurs f telle que $u(t_0) = u_0$.*

Démonstration. On pose

$$\mathcal{S} = \{u : I \to \mathbb{R} \mid I \subset \mathbb{R} \text{ est un intervalle ouvert,} \\ t_0 \in I,\ u \text{ est une courbe intégrale de } f \text{ et } u(t_0) = u_0\}.$$

On pose pour $u : I \to \mathbb{R} \in \mathcal{S}$ et $v : J \to \mathbb{R} \in \mathcal{S}$, $u \preceq v$ si $I \subseteq J$ et pour chaque $t \in I$, $u(t) = v(t)$. On vérifie que tout sous-ensemble $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ totalement ordonné pour $\preceq$ possède un majorant dans $\mathcal{S}$ défini par $I = \bigcup\{J \mid v : J \to \mathbb{R}^n \in \mathcal{T}$ et $u : I \to \mathbb{R}$ défini par $u(t) = v(t)$ si $v : J \to \mathbb{R}^n \in \mathcal{T}$ et $t \in J$. Par le lemme de Zorn, il existe $u \in \mathcal{S}$ qui soit maximal. Cette solution est maximale. □

Solutions maximale et solutions dont le graphe est fermé

Tout d'abord, rappelons la définition de graphe.

Définition 3.7 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $u : I \to \mathbb{R}^n$. Le graphe de u est l'ensemble*

$$\big\{(t, u(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid t \in I\big\}.$$

Ensuite, nous définissons la notion d'ensemble fermé dans un autre ensemble.

Définition 3.8 *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$. L'ensemble $F \subseteq \Omega$ est* fermé dans Ω *si pour toute suite de points $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de F qui converge vers $a \in \Omega$, $a \in F$.*

Si Ω est fermé, on montre que F est fermé dans Ω si et seulement si F est fermé. En général, on montre que F est fermé dans Ω si et seulement si on peut trouver un ensemble fermé $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tel que $F = \Omega \cap E$.

Exemple 3.2 L'ensemble

$$\{(t, \mathrm{e}^t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

est fermé dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple 3.3 L'ensemble

$$\{(t, \frac{1}{t}) \mid t \in \mathbb{R}_*\}$$

est fermé dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple 3.4 L'ensemble
$$\{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}_*\}$$
n'est pas fermé dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple 3.5 L'ensemble
$$\{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}_*\}$$
est fermé dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Soit $u : I \to \mathbb{R}^n$ et soit $\bar{t}$ un point adhérent à I. On remarque si u a une limite $\bar{u}$ en $\bar{t}$, alors $(\bar{t}, \bar{u})$ est un point adhérent au graphe de u. Si u est une courbe intégrale qu'il est impossible de prolonger, il faut que $(\bar{t}, \bar{u})$ ne fasse pas partie du domaine du champ de vecteurs.

Proposition 3.15 *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide et $u : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe intégrale de f. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(a) u est une courbe intégrale maximale,

(b) le graphe de u est fermé dans Ω,

(c) si $\sup I < \infty$, $t \mapsto (t, u(t))$ n'a pas de limite en $\sup I$ dans Ω et si $\inf I > -\infty$, $t \mapsto (t, u(t))$ n'a pas de limite en $\inf I$ dans Ω.

Démonstration. Supposons que le graphe de u soit fermé. On vérifie alors immédiatement que si $\sup I < \infty$, $t \in I \mapsto (t, u(t)) \in \Omega$ n'a pas de limite en $\sup I$ dans Ω. En effet, sinon on pourrait prendre une suite $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ telle que pour chaque $m \in \mathbb{N}$, $t_m \in I$ et $\lim_{m \to \infty} t_m = \sup I$. On aurait alors $\lim_{m \to \infty}(t_m, u_m) = (\sup I, \lim_{t \to \sup I} v(t)) \in \Omega$ et u n'aurait pas de graphe fermé. De même, si $\inf I > -\infty$, $t \in I \mapsto (t, u(t))$ n'a pas de limite en $\inf I$ dans Ω.

Supposons maintenant que si $\sup I < \infty$, $t \mapsto (t, u(t))$ n'a pas de limite en $\sup I$ dans Ω et si $\inf I > -\infty$, $t \mapsto (t, u(t))$ n'a pas de limite en $\inf I$ dans Ω et supposons par l'absurde qu'on puisse trouver une courbe intégrale $v : J \to \mathbb{R}^n$ telle que $J \supsetneq I$ et $v = u$ sur I. On a alors soit $\sup J > \sup I$ soit $\inf J < \inf I$. Supposons par exemple que $\sup I < \sup J$. On a alors $\lim_{t \to \sup I} u(t) = v(\sup I)$ et $(\sup I, v(\sup I)) \in \Omega$, en contradiction avec notre hypothèse. Le raisonnement pour $\inf J < \inf I$ est semblable. Donc, u est maximale.

Supposons maintenant que $u : I \to \mathbb{R}^m$ soit maximale. Soit une suite $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ telle que $(t_m, f(t_m))$ converge vers $(\bar{t}, \bar{u}) \in \Omega$. Si $\bar{t} \in I$, par continuité de u, $\bar{u} = u(\bar{t})$ et $(\bar{t}, \bar{u})$ appartient au graphe de u. Sinon, on a soit $\bar{t} = \sup I < \infty$, soit $\bar{t} = \inf I > -\infty$. Supposons que nous soyons dans le premier cas $\bar{t} = \sup I < \infty$. Puisque f est continue et Ω est ouvert, on peut trouver $l > 0$ et $r > 0$ tel que f est lipschitzienne en espace sur $]\bar{t} - l, \bar{t} + l[\times B(\bar{u}, r)$. Puisque $[\bar{t} - l/2, \bar{t} + l/2] \times B[\bar{u}, r/2]$ est compact et f est continue, on peut trouver $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $(t, x) \in [\bar{t} - l/2, \bar{t} + l/2] \times B[\bar{u}, r/2]$,
$$\|f(t, x)\| \leq M.$$

Soit $h \in]0, l/2[$ tel que $4rh \leq M$. Choisissons $m \in \mathbb{N}$ tel que $t_m \geq \bar{t} - h/2$ et $u(t_m) \in B(\bar{u}, r/4)$. Par la proposition 3.1, il existe $\tilde{u}$: $]t_m - h, t_m + h[$ qui soit une courbe intégrale du champ de vecteur f. Si on définit $\bar{u} : I \cup]t_m - h, t_m + h[$ par

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u(t) & \textbf{si } t \in [t_0, t_m[, \\ \tilde{u}(t) & \textbf{si } t \in [t_m, t_m + h[, \end{cases}$$

on vérifie que $\bar{u}$ est une courbe intégrale de f. Puisque $t_m + h \geq \bar{t} + \frac{h}{2}$, nous avons une contradiction avec la maximalité de u. □

Régularité supplémentaire en temps

La définition de courbe intégrale n'assure que la dérivabilité de la courbe intégrale. Si le champ de vecteurs est plus régulier, la courbe intégrale hérite de cette régularité supplémentaire.

Proposition 3.16 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ et $u : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe intégrale de f. Si f est dérivable k fois, alors u est dérivable $k + 1$ fois.*

Dans cette proposition, on suppose que f est dérivable (ou différentiable) comme fonction de Ω. Il ne s'agit pas de dérivabilité par rapport à la variable d'espace, ni de dérivabilité par rapport au variables d'espace et de temps séparément.

Démonstration. Nous allons démontrer la proposition par récurrence sur k. Tout d'abord, remarquons que par définition, u est dérivable. Supposons que u soit dérivable ℓ fois, avec $\ell \in \{1, \dots, k\}$. Alors par le théorème de dérivation de la composée, la fonction

$$t \mapsto f(t, u(t))$$

est dérivable ℓ fois. Puisque u est une courbe intégrale, la fonction u' est donc dérivable ℓ fois, ce qui est équivalent avec le fait que u soit dérivable $\ell + 1$ fois. □

En particulier, la proposition 3.16 implique toute courbe intégrale d'un champ de vecteurs indéfiniment dérivable est indéfiniment dérivable.

Flot d'un champ de vecteurs

Dans cette section, nous allons rassembler en une fonction l'ensemble des courbes intégrales d'un champ de vecteurs.

Définition 3.9 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteur continu localement lipschitzien en espace. Le flot de f est une fonction $\varphi : G \subset \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, tel que pour chaque $(t_0, u_0) \in \Omega$,*

$$I_{t_0,u_0} = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, t_0, u_0) \in G\}$$

est un intervalle ouvert et la fonction $u : I_{t_0,u_0} \to \mathbb{R}^n$ *définie pour* $t \in I_{t_0,u_0}$ *par*

$$u(t) = \varphi(t, t_0, u_0)$$

est une courbe intégrale de f *passant par* (t_0, u_0) *et le graphe de* u *est fermé dans* Ω*.*

En vue de la proposition 3.6, le flot est bien défini. On vérifie les propriétés suivantes

Proposition 3.17 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *un ensemble ouvert,* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *un champ de vecteurs continu localement lipschitzien en espace et soit* $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ *le flot de* f*.*
Pour chaque $(t, x) \in \Omega$*,* $(t, t, x) \in G$ *et* $\varphi(t, t, x) = x$*.*
Si $(s, t, x) \in G$*, alors* $(r, s, \varphi(s, t, x)) \in G$ *si et seulement si* $(r, t, x) \in G$ *et*

$$\varphi\big(r, s, \varphi(s, t, x)\big) = \varphi(r, t, x).$$

On en déduit en particulier que si $(s, t, x) \in G$, alors $(t, s, \varphi(s, t, x)) \in G$ et

$$\varphi\big(t, s, \varphi(s, t, x)\big) = x.$$

Démonstration. La preuve découle de la proposition 3.6 et la définition de courbe intégrale d'un champ de vecteurs. □

Continuité du flot

Proposition 3.18 *Soit* f *un champ de vecteurs localement lipschitzien en espace et* $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ *le flot de* f*. Alors l'ensemble* G *est ouvert et* φ *est localement lipschitzienne.*

Nous allons tout d'abord prouver cet énonce au voisinage d'un point.

Lemme 3.19 *Soit* f *un champ de vecteurs continu et localement lipschitzien en espace et* $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ *le flot de* f*. Soit* $(t, x) \in \Omega$*. Il existe* $h > 0$ *et* $r > 0$*, tel que* $]t-h, t+h[^2 \times B(x, r) \subseteq G$ *et* φ *est lipschitzienne sur* $]t-h, t+h[^2 \times B(x, r)$*.*

Démonstration. Prenons h_0 et r_0 telle que $]t - h_0, t + h_0[\, \times B(s, r_0) \subset \Omega$ et f soit lipschitzienne sur $]t - h_0, t + h_0[\, \times B(s, r_0)$. Par le théorème des bornes atteintes, puisque f est continu, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que si $(s, y) \in\,]t - h_0/2, t + h_0/2[\, \times B(s, r_0/2)$,

$$\|f(s, y)\| \leq M.$$

Soit $r = r_0/4$ et prenons h tel que $hM \leq r/4$ et $h \leq h_0/2$.

Par le théorème d'existence (proposition 3.13), on vérifie que $]t - h, t + h[^2 \times B(x, r) \subset G$. Ensuite, pour $r, s]t - h, t + h[$ et $y, z \in B(x, r)$, on a

$$\varphi(r, s, y) - \varphi(r, s, z) = \|y - z\| + \int_r^s f\big(\tau, \varphi(\tau, s, y)\big) - f\big(\tau, \varphi(\tau, s, z)\big)\, \mathrm{d}\tau.$$

Par l'inégalité triangulaire pour l'intégrale, cela donne :

$$\|\varphi(r,s,y)-\varphi(r,s,z)\| \leq \|y-z\| + L\int_{[r,s]} \|\varphi(\tau,s,y)-\varphi(\tau,s,z)\|\,\mathrm{d}\tau,$$

d'où, par l'inégalité de Grönwall, $r,s \in]t-h,t+h[$ et $y,z \in B(x,r)$

$$\|\varphi(r,s,y)-\varphi(r,s,z)\| \leq \|y-z\|\mathrm{e}^{L|r-s|} \leq \|y-z\|\mathrm{e}^{2Lh}.$$

Ensuite, on note que pour $r,s,p,q \in]t-h,t+h[$ et $z \in B(x,r)$,

$$\|\varphi(r,s,z)-\varphi(p,q,z)\| \leq \int_{[r,p]} \|f(\varphi(\tau,s,z))\|\,\mathrm{d}\tau + \int_{[s,q]} \|f(\varphi(\tau,s,z))\|\,\mathrm{d}\tau \leq M(|r-p|+|s-q|).$$

Nous avons donc montré que pour $(r,s,y) \in]t-h,t+h[^2 \times B(x,r)$ et $(p,q,z) \in]t-h,t+h[^2 \times B(x,r)$,

$$\|\varphi(r,s,y)-\varphi(p,q,z)\| \leq \mathrm{e}^{2Lh}\|y-z\| + |r-p| + |s-q|,$$

la fonction φ est donc lipschitzienne sur $]t-h,t+h[^2 \times B(x,r)$. $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer la continuité sur G tout entier :

Démonstration de la proposition 3.18. Soit $(t,x) \in \Omega$. On considère l'ensemble

$$S_+ = \inf\big\{s > t \mid (s,t,x) \in G,\ G \text{ ne contient pas un voisinage de } (s,t,x) \text{ ou } \varphi \text{ n'est pas localement lipschitzienne en } (s,t,x)\big\}.$$

Supposons par l'absurde que S_+ ne soit pas vide et posons

$$\bar{s} = \inf S_+$$

Par le lemme 3.19, $\bar{s} > t$. Par hypothèse $(\bar{s},t,x) \in G$. Par les propriétés élémentaires du flot (proposition 3.17), $(\bar{s},\bar{s},\varphi(\bar{s},t,x)) \in G$.

Par le lemme 3.19, il existe $h > 0$ et $r > 0$ telle que $]\bar{s}-h,\bar{s}+h[^2 \times B(\varphi(\bar{s},t,x),r) \subset G$ et φ est lipschitzienne sur cet ensemble. Par continuité de $\varphi(\cdot,t,x)$, il existe $\tilde{s} \in]t,s[$ tel que $\tilde{s} > \bar{s}-h$ et $\varphi(\tilde{s},t,x) \in B(\varphi(\bar{s},t,x),r/2)$.

Par définition de $\bar{s}$, il existe h_0, r_0 tel que $]\tilde{s}-h_0,\tilde{s}+h_0[\times]t-h_0,t+h_0[\times B(x,r_0) \subset G$ et si $q \in]t-h_0,t+h_0[$ et $y \in B(x,r_0)$,

$$\varphi(\tilde{s},q,y) \in B(\varphi(\tilde{s},t,x),r/2) \subset B(\varphi(\bar{s},t,x),r).$$

On a donc si $(p,q,y) \in]t-h_0,t+h_0[\times]\bar{s}-h,\bar{s}+h[\times B(x,r_0) \subset G$,

$$(p,\tilde{s},\varphi(\tilde{s},q,y)) \in G.$$

Par les propriétés élémentaires du flot (proposition 3.17), on en déduit que

$$(p,q,y) \in G.$$

De plus, pour $(p,q,y) \in]t-h_0,t+h_0[\times]\bar{s}-h/2,\bar{s}+h/2[\times B(x,r_0)$, on a

$$\varphi(p,q,y) = \varphi(p,\tilde{s},\varphi(\tilde{s},q,y)),$$

on obtient que φ est lipschitzienne. $\square$

Régularité du flot

Proposition 3.20 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs continu. Soit $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ le flot associé à f. Si f est dérivable en espace et si $D_x f$ est une fonction continue, alors pour chaque $(s,t) \in \Omega$, la fonction $\varphi(s,t,\cdot)$ est dérivable et sa dérivée en (s,t,x) est donnée par*

$$L(t),$$

où $L : [s,t] \to \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$ est solution du problème

$$\begin{cases} L'(\tau) = D_x f\big(\tau, \varphi(s,\tau,x)\big)[L(t)] & \text{pour } \tau \in [s,t], \\ L(s) = \operatorname{id}. \end{cases}$$

La fonction φ est dérivable et sa dérivée en (s,t,x) est donnée par

$$D\varphi(s,t,x)[(p,q,v)] = pf\big(s, \varphi(s,t,x)\big) + L(t)\big[v - qf(t,x)\big].$$

Autrement dit, L satisfait

$$\begin{cases} L'(t) = D_x f(t, u(t))[L(t)], \\ L(s) = \operatorname{id}. \end{cases}$$

c'est-à-dire que L la résolvante associée à la fonction $t \mapsto D_x f(t,u(t)) \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 3.21 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs continu. Soit $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ le flot associé à f. Si f est de classe C^k et si sa dérivée en espace $D_x f$ est de classe C^k, alors φ est de classe C^{k+1}.*

On remarquera que la dérivabilité du flot demande plus d'hypothèses de régularité en espace qu'en temps pour le champ de vecteurs.

Proposition 3.22 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs continu. Soit $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ le flot associé à f. Si f est dérivable en espace k fois et si $D_x^k f$ est une fonction continue, alors pour chaque $(s,t) \in \Omega$, la fonction $\varphi(s,t,\cdot)$ est dérivable k fois.*

On remarquera que la dérivabilité en espace du flot ne demande aucune hypothèse sur la dérivabilité en temps du champ de vecteurs.

Flot d'un système autonome

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Nous dirons que f est un *champ de vecteurs autonome*, en assimilant f au champ de vecteurs $\tilde{f} : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ définie par $\tilde{f}(t,x) = f(x)$. Le champ de vecteurs $\tilde{f}$ est localement lipschitzien en espace si et seulement si f est localement lipschitzien. Si $\tilde{\varphi} : \tilde{G} \to \mathbb{R}^n$ est le flot associé à $\tilde{f}$, on a $(s, t, u_0) \in \tilde{G}$ si et seulement si $(s-t, 0, u_0) \in \tilde{G}$ et qu'alors $\varphi(s, t, u_0) = \varphi(s-t, 0, u_0)$. Posons

$$G = \{(s, u_0) \mid (s, 0, u_0) \in \tilde{G}\}$$

et définissons

$$\varphi : G \to \mathbb{R}^n$$

pour $(s, u_0) \in G$.

$$\varphi(s, u_0) = \tilde{\varphi}(s, 0, u_0)$$

On note que pour $(s, u_0) \in G$, on a $(s+t, u_0) \in G$ si et seulement si $(t, \varphi(s, u_0)) \in G$ et qu'alors

$$\varphi(t+s, u_0) = \varphi\big(t, \varphi(s, u_0)\big).$$

Notes

On peut obtenir le théorème d'existence de Piccard par une construction de solutions approchée ressemblant à la méthode d'Euler [1, I.1].

Références

[1] Earl A. Coddington and Norman Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1955.

Exercices

Fonctions lipschitziennes

Exercice 3.1 Démontrez à partir de la définition si les fonctions suivantes sont lipschitziennes en espace et donnez une constante de Lipschitz

1. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par $f(t, x) = \sin t \cos x$,
2. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par $f(t, x) = t|x|$,
3. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par $f(t, x) = t + |x|$,
4. $f : [-2, 2] \times \mathbb{R}$ définie pour $(t, x) \in [-2, 2] \times \mathbb{R}$ par $f(t, x) = t|x|$,
5. $f : [0, 3] \times \mathbb{R}$ définie pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par $f(t, x) = \sqrt{t}|x|$,
6. $f : [-1, 1] \times [0, \infty[$ définie pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par $f(t, x) = t\sqrt{x}$,
7. $f : [-1, 1] \times [0, 1]$ définie pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par $f(t, x) = t\sqrt{x}$,
8. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par

$$f(t, x) = \begin{cases} |x| & \text{si } t \geq 0, \\ -|x| & \text{si } t < 0, \end{cases}$$

9. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par $f(t, x) = \arctan x$

Exercice 3.2 Soit $A \in C(\mathbb{R}; \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n))$. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ par

$$f(t, x) = A(t)[x]$$

est continue. Montrer que f est lipschitzienne en espace si et seulement si A est une fonction bornée.

Exercice 3.3 Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction lipschitzienne en espace et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que la fonction $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ par

$$h(t, x) = g(t) f(t, x)$$

est localement lipschitzienne en espace.

Exercice 3.4 Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction lipschitzienne en espace et $A : \mathbb{R} \to \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$ une fonction bornée. Montrer que la fonction $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ par

$$h(t, x) = A(t)\big[f(t, x)\big]$$

est localement lipschitzienne en espace.

Exercice 3.5 Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction lipschitzienne en espace et $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction localement lipschitzienne en espace. Montrer que la fonction $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ par

$$h(t, x) = g(t, f(t, x))$$

est localement lipschitzienne en espace.

Unicité

Exercice 3.6 Déterminer si les problèmes suivants ont une solution unique au voisinage de 0 :

$$\begin{cases} u'(t) = 0, \\ u(0) = 0, \end{cases} \tag{a}$$

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)^2, \\ u(0) = 0, \end{cases} \tag{b}$$

$$\begin{cases} u'(t) = 1/(\ln u(t)), \\ u(0) = 0, \end{cases} \tag{c}$$

$$\begin{cases} u'(t) = \sin(u(t)), \\ u(0) = 0, \end{cases} \tag{d}$$

$$\begin{cases} u'(t) = |u(t)|^{\frac{2}{3}}, \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{e}$$

Courbes intégrales maximales

Exercice 3.7 Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le champ de vecteurs défini pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par

$$f(t, x) = 1 + x^2.$$

Décrire toutes les courbes intégrales maximales de ce champ de vecteurs.

Exercice 3.8 Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le champ de vecteurs défini pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par

$$f(t, x) = \sqrt{1 + x^2}.$$

Décrire toutes les courbes intégrales maximales de ce champ de vecteurs.

Exercice 3.9 Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le champ de vecteurs défini pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par

$$f(t, x) = \sqrt{|x|}.$$

Décrire toutes les courbes intégrales maximales de ce champ de vecteurs.

Exercice 3.10 Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le champ de vecteurs défini pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par

$$f(t, x) = 1 - x^2.$$

Décrire toutes les courbes intégrales maximales de ce champ de vecteurs.

Exercice 3.11 Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le champ de vecteurs défini pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par

$$f(t, x) = x^2 - 1.$$

Décrire toutes les courbes intégrales maximales de ce champ de vecteurs.

Exercice 3.12 Soit $f : \mathbb{R} \times]0, \infty[\to \mathbb{R}$ le champ de vecteurs défini pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times]0, \infty[$ par

$$f(t, x) = \frac{1}{x}.$$

Décrire toutes les courbes intégrales maximales de ce champ de vecteurs.

Exercice 3.13 Soit $f : \mathbb{R} \times]0, \infty[\to \mathbb{R}$ le champ de vecteurs défini pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times]0, \infty[$ par

$$f(t, x) = \frac{t}{x}.$$

Décrire toutes les courbes intégrales maximales de ce champ de vecteurs.

Exercice 3.14 Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le champ de vecteurs défini pour $(t, x) \in]0, \infty[\times \mathbb{R}$ par

$$f(t, x) = \sin t (\cos x)^2.$$

Décrire toutes les courbes intégrales maximales de ce champ de vecteurs.

Existence globale

Exercice 3.15 Sans calculer les solutions explicitement, pouvez-vous dire si les problèmes suivants ont une solution définie sur $\mathbb{R}$ pour chaque $u_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} u'(t) = \sin\big(u(t)\big) \quad \textbf{si } t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{a}$$

$$\begin{cases} u'(t) = -u(t) - u(t)^5 \quad \textbf{si } t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{b}$$

$$\begin{cases} u'(t) = u(t) + u(t)^5 \quad \textbf{si } t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{c}$$

$$\begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)^5}{u(t)^2+1} \quad \textbf{si } t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{d}$$

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)\ln\big(u(t)^2+1\big) \quad \textbf{si } t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{e}$$

$$\begin{cases} u'(t) = 1 + t^4 + \big(u(t)\big)^2 \quad \textbf{si } t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{f}$$

$$\begin{cases} u'(t) = \tanh\big(u(t)\big) \quad \textbf{si } t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{g}$$

$$\begin{cases} u'(t) = \sinh\big(u(t)\big) \quad \textbf{si } t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{h}$$

$$\begin{cases} u'(t) = -\sinh\big(u(t)\big) \quad \textbf{si } t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{i}$$

Exercice 3.16 Déterminer si le problème suivant a une solution $u : \mathbb{R} \to]0,\infty[$ définie sur $\mathbb{R}$ pour chaque $u_0 \in]0,\infty[$:

$$\begin{cases} u'(t) = \dfrac{1}{u(t)} \quad \textbf{si } t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Exercice 3.17 Les problèmes suivant ont-ils une solution définie sur $\mathbb{R}$ pour chaque $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} u''(t) = \sin\big(u(t)\big) \quad \textbf{si } t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0, \\ u'(0) = v_0. \end{cases} \tag{a}$$

$$\begin{cases} u''(t) = -\sin\big(u(t)\big) & \textbf{si } t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0, \\ u'(0) = v_0. \end{cases} \tag{b}$$

$$\begin{cases} u''(t) = u(t)^3 & \textbf{si } t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0, \\ u'(0) = v_0. \end{cases} \tag{c}$$

$$\begin{cases} u''(t) = -u(t)^3 & \textbf{si } t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0, \\ u'(0) = v_0. \end{cases} \tag{d}$$

$$\begin{cases} u''(t) = -u(t)\big(1 - u(t)^2\big) & \textbf{si } t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0, \\ u'(0) = v_0. \end{cases} \tag{e}$$

Exercice 3.18 Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs localement lipschitzien en espace. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que pour chaque $(t, x) \in \mathbb{R}^n$,

$$|(f(t, x)|x)| \leq M(1 + \|x\|).$$

Montrer que pour chaque $u_0 \in \mathbb{R}^n$, le problème

$$\begin{cases} u'(t) = f\big(t, u(t)\big) & \textbf{pour } t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

admet une solution.

Exercice 3.19 Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs localement lipschitzien. On suppose qu'il existe $M \in [0, \infty[$ continue telle que pour chaque $(t, x) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|f(t, x)\| \leq M(\|x\| + 1)$$

Montrer que pour chaque $u_0 \in \mathbb{R}^n$, le problème

$$\begin{cases} u'(t) = f\big(t, u(t)\big) & \textbf{si } t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

admet une solution.

Exercice 3.20 Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs localement lipschitzien. On suppose qu'il existe $\psi : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que pour chaque $(t, x) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|f(t, x)\| \leq \Psi(\|x\|)$$

et que

$$\int_1^\infty \frac{1}{\Psi(s)} \, \mathrm{d}s.$$

Montrer que pour chaque $u_0 \in \mathbb{R}^n$, le problème

$$\begin{cases} u'(t) = f\big(t, u(t)\big) & \text{si } t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

admet une solution.

Exercices supplémentaires

Exercice 3.21 Étudier le schéma itératif de Picard (défini dans la preuve de la proposition 3.13) pour les problèmes suivants

$$\begin{cases} u'(t) = f(t) & \text{pour } t \in \mathbb{R}, \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad \begin{cases} u'(t) = u(t) & \text{pour } t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} u'(t) = u(t)^2 & \text{pour } t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 3.22 Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, $h \in \,]0, +\infty[$, $r \in \,]0, \infty[$, $u_0 \in \mathbb{R}^n$ et $f\colon]t_0 - h, t_0 + h[\times B(u_0, r) \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs continu. Si pour chaque $(t, x) \in \,]t_0 - h, t_0 + h[\times B(u_0, r)$,

$$h\|f(t, x_0)\| \leq \rho(t),$$

où $\rho :]t_0 - h, t_0 + h[$ est intégrable, $\int_{t_0}^{t_0+h} \rho < r$ et $\int_{t_0-h}^{t_0} \rho < r$ et s'il existe $L :]t_0 - h, t_0 + h[$ telle que pour chaque $x, y \in B(u_0, r)$ et $t \in \,]t_0 - h, t_0 + h[$,

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L(t)\|x - y\|.$$

et L est intégrable sur $]t_0 - h, t_0 + h[$, alors il existe $u\colon]t_0 - h, t_0 + h[\to B(u_0, r)$ qui soit une courbe intégrale de f.

Exercice 3.23 Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Pour étudier le problème

$$\begin{cases} u'(t) = f\big(t, u(t)\big), \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

on propose le schéma itératif suivant :

$$u_{k+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{(t-s)A} \big[f\big(s, u_k(s)\big) - A[u(s)]\big] \,\mathrm{d}s.$$

où $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n)\mathbb{R}^n$. Énoncer et démontrer un théorème d'existence locale basée sur cette itération.

Donné des exemples de champs de vecteurs qui satisfont les hypothèses de votre théorème mais pas celles de la proposition 3.13.

Exercice 3.24 Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \psi(\|x - y)\|).$$

Montrer que si

$$\int_0^1 \frac{1}{\psi(s)}\,\mathrm{d}s = \infty,$$

alors pour chaque $u_0 \in \mathbb{R}^n$, le problème

$$\begin{cases} u'(t) = f(t,u) & \text{pour } t \in I, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

admet au plus une solution.

4. Stabilité de systèmes d'équations différentielles autonomes

Matières

4.1. Introduction 103
4.2. Stabilité 103
4.3. Stabilité asymptotique 106
4.3.1. Méthode de Lyapounov 106
4.3.2. Stabilité asymptotique de problèmes linéaires 109
4.3.3. Stabilité asymptotique par linéarisation 109
4.4. Instabilité 110
4.4.1. Méthode de Lyapounov 110
4.4.2. Instabilité de problèmes linéaires 112
4.4.3. Instabilité par linéarisation 113
Exercices 113

Prérequis

- ☞ Analyse vectorielle : fonctions différentiables
- ☞ Comportement asymptotiques de systèmes d'équations différentielles linéaires autonomes (chapitre 1)
- ☞ Inégalité de Grönwall (chapitre 2)
- ☞ Flot associé à un champ de vecteurs (chapitre 3)

Questionnaire de révision

- ☞ Définir un équilibre stable (au sens de Lyapounov)
- ☞ Donner un exemple d'équilibre stable
- ☞ Donner un contre-exemple d'équilibre stable
- ☞ Énoncer et démontrer une condition suffisante pour qu'un équilibre soit stable
- ☞ Définir un équilibre asymptotiquement stable (au sens de Lyapounov)
- ☞ Donner un exemple d'équilibre asymptotiquement stable

- ☞ Donner un exemple d'équilibre stable non asymptotiquement stable
- ☞ Énoncer et démontrer une condition suffisante pour qu'un équilibre soit asymptotiquement stable
- ☞ Énoncer une condition suffisante et une condition nécessaire sur la dérivée d'un champ de vecteurs pour qu'un équilibre soit stable ou asymptotiquement stable

Exercices prioritaires : 4.1, 4.2, 4.3, 4.4.

4.1. Introduction

Étant donnée une solution d'une équation différentielle, on peut se poser la question de la *stablité* de cette solution : on veut déterminer si, pour des données initiales légèrement différentes, le comportement asymptotique de la solution sera semblable.

Dans le chapitre 3 nous avions étudié une question proche, celle de la continuité du flot. La différence principale est que dans l'étude de la continuité du flot, on se contentait de vérifier si le comportement était proche sur un intervalle de temps fini. Ici, nous nous intéresserons à ce qui se passe sur un intervalle de temps non borné.

Ce chapitre se veut une introduction à la stabilité. Dans cette optique, nous étudierons la stabilité de solutions constantes pour des systèmes autonomes.

4.2. Stabilité

Notre premier résultat est un théorème d'existence globale de solution. Il permet de déduire qu'une fonction n'explose pas de ce qu'une fonction décroît le long des trajectoires.

Proposition 4.1 (Solution globale et fonction de Lyapounov) *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs localement lipschitzien. Supposons qu'il existe $V \in C(\Omega, \mathbb{R})$ telle que pour toute courbe intégrale $u : I \to \mathbb{R}^n$ de f,*

$$V \circ u \textit{ est décroissante},$$

alors pour tout $x \in \Omega$ tel que $\{y \in \Omega \mid V(y) \leq V(x)\}$ est compact, il existe $u : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^n$ solution de

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)) & \textit{pour chaque } t \in [0, +\infty[, \\ u(0) = x. \end{cases}$$

La fonction V est appelée fonction de Lyapounov. Si on veut appliquer la proposition, on peut toujours restreindre le champ de vecteurs à un domaine plus petit afin de rendre possible la construction de V. On peut ainsi généraliser la proposition en supposant qu'il existe un ensemble ouvert $U \subseteq \Omega$ tel que $x \in U$ et que $\{y \in U \mid V(y) \leq V(x)\}$ soit compact.

L'hypothèse de compacité est à mettre en lien avec l'énoncé de la proposition 3.7 sur la caractérisation des courbes intégrales maximales.

Démonstration. Par la proposition 3.6, on peut trouver une courbe intégrale maximale $u : I \to \mathbb{R}^n$ de f. Autrement dit, on a

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)) & \text{pour chaque } t \in [0, +\infty[, \\ u(0) = x. \end{cases}$$

L'intervalle I est ouvert. Par hypothèse pour chaque $t \in I \cap [0, +\infty[$,

$$V(u(t)) \leq V(x).$$

Posons

$$K = \{y \in \Omega \mid V(y) \leq V(x)\}.$$

L'ensemble K est compact et pour tout $t \in I$, $\{t\} \times K \subset \mathbb{R} \times \Omega$

$$\{t \in I \mid u(t) \in K\} = I \cap [0, +\infty[.$$

Par la proposition 3.7, on en déduit que $\sup I = \infty$. $\square$

Définition 4.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs localement lipschitzien. Le point $u_0 \in \Omega$ est* un équilibre stable *(au sens de Lyapounov) si pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour chaque $x \in B(u_0, \delta)$, il existe une fonction dérivable $u : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^n$ telle que pour chaque $t \geq 0$ $u(t) \in B(u_0, \epsilon)$ et*

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)), & \text{pour chaque } t \in [0, +\infty[, \\ u(0) = x. \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant déduire de la proposition précédente un résultat de stabilité.

Proposition 4.2 (Stabilité et fonction de Lyapounov) *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs localement lipschitzien et soit $u_0 \in \Omega$. Supposons qu'il existe $V \in C(\Omega, \mathbb{R})$ telle que u_0 soit un point de minimum local strict de V et que pour toute courbe intégrale $u : I \to \mathbb{R}^n$ de f,*

$$V \circ u \text{ est décroissante},$$

alors le point u_0 est un équilibre stable.

Rappelons que u_0 est un point de minimum local strict s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in B[u_0, \varepsilon] \cap \Omega$, $V(x) > V(u_0)$.

Démonstration de la proposition 4.2. Soit $\epsilon > 0$. Comme l'ensemble Ω est ouvert, on peut supposer sans perte de généralité que $B[u_0, \epsilon] \subset \Omega$ et que u_0 est un point de minimum strict de la restriction $V|_{B[u_0,\epsilon]}$ de la fonction V à l'ensemble $B[u_0, \epsilon]$. Puisque la fonction V est continue sur l'ensemble compact $\partial B(u_0, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - u_0\| = \epsilon\}$, par le théorème des bornes atteintes (théorème B.4), on peut trouver $y \in \partial B(u_0, \epsilon)$ tel que pour tout $x \in \partial B(u_0, \epsilon)$, $V(x) \geq V(y)$. Posons $\mu = V(y)$ et notons que par hypothèse, $\mu = V(y) > V(u_0)$.

Étant donné que la fonction V est continue et que $V(u_0) < \mu$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que pour chaque $x \in B(u_0, \delta)$, $V(x) < \mu$. On vérifie immédiatement que pour chaque $x \in B(u_0, \delta)$, l'ensemble

$$\{z \in B(u_0, \epsilon) \mid V(z) \leq V(x)\}$$

est compact. En effet, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^n$ telle que pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on ait $x_n \in B(u_0, \epsilon)$ et $V(x_n) \le V(x)$. Par la propriété de Bolzano-Weierstraß (proposition B.3), on peut trouver une sous-suite $(x_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un point $x_* \in \mathbb{R}^n$. On vérifie que $\|x_* - u_0\| \le \epsilon$ et que puisque la fonction V est continue, $V(x_*) = \lim_{k\to\infty} V(x_{n_k}) \le V(x)$. Puisque $V(x_*) \ge \mu > V(x)$ si $\|x_* - u_0\| = \epsilon$, on a que $x_* \in B(u_0, \epsilon)$.

Nous pouvons donc appliquer la proposition 4.1 pour déduire que le problème

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)) & \text{pour chaque } t \in [0, +\infty[, \\ u(0) = x \end{cases}$$

a une solution et que pour chaque $t \ge 0$, $u(t) \in B(u_0, \epsilon)$. □

Exemple 4.1 Prenons la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$f(x) = 0$$

et définissons la fonction $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pour $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$V(x) = \|x\|^2.$$

On observe que le point 0 est un point de minimum global, et donc local, strict. On vérifie que si la fonction $u : I \to \mathbb{R}^n$ est une courbe intégrale de f, alors, par la règle de composition de fonctions différentiables, pour chaque $t \in I$,

$$(V \circ u)'(t) = DV(u(t))[u'(t)] = DV(u(t))[f(u(t))] = -2(u(t)|0) = 0,$$

d'où on déduit que la fonction $V \circ u$ est décroissante sur l'intervalle I. Le point 0 est un donc un équilibre stable.

Exemple 4.2 Prenons le champ de vecteurs $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = -x - \sin x$$

et définissons la fonction $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$ par

$$V(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x.$$

Le point 0 est un point de minimum globale strict de V : pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a $V(x) > -1$. On vérifie que si I est un intervalle et la fonction $u : I \to \mathbb{R}$ est une courbe intégrale, on a pour tout $t \in I$

$$(V \circ u)'(t) = (-u(t) - \sin u(t))(u(t) + \sin u(t)) \le 0.$$

On en déduit que 0 est un point d'équilibre stable.

Exemple 4.3 (Pendule conservatif) On considère le champ de vecteurs défini pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x) = (x_2, -\sin x_1)$ et on prend comme fonction de Lyapounov la fonction $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$V(x) = \frac{x_2^2}{2} - \cos x_1.$$

Le point $(0, 0)$ est un point de minimum local strict de la fonction V : si $x \in \left]-2\pi, 2\pi\right[\times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$, on a $V(x) > -1$. On calcule que si la fonction $u : I \to \mathbb{R}^2$ est une solution, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(V \circ u)'(t) = DV(u(t))[u'(t)] = u_2(t)\big(-\sin(u_1(t))\big) + \big(\sin(u_1(t))\big) = 0.$$

Puisque I est un intervalle, on en déduit que la fonction $V \circ u$ est constante, et donc en particulier décroissante. Le point $(0, 0)$ est donc un point d'équilibre stable.

On peut observer qu'en fait tout point $(2k\pi, 0)$, avec $k \in \mathbb{Z}$ est un point de minimum local strict, et est donc un point d'équilibre stable de l'équation. Ces points d'équilibre stable supplémentaires correspondent tous physiquement à la position basse du pendule, mais avec des mesures d'angle différentes. Mathématiquement on pourrait éviter ce problème en paramétrant le pendule avec un point du cercle au lieu d'un angle.

4.3. Stabilité asymptotique

4.3.1. Méthode de Lyapounov

En renforçant légèrement les hypothèses de la proposition 4.1, nous pouvons calculer la limite d'une solution.

Proposition 4.3 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs localement lipschitzien et soit $u_0 \in \mathbb{R}^n$. Supposons qu'il existe une fonction $V \in C(\Omega, \mathbb{R})$ telle que le point u_0 soit un point de minimum global strict de V, et que pour chaque courbe intégrale $u : I \to \mathbb{R}^n$ dans $\Omega \setminus \{u_0\}$, la fonction*

$$V \circ u \text{ est strictement décroissante},$$

alors pour tout $x \in \Omega$, si $\{y \in \Omega \mid V(y) \leq V(x)\}$ est compact, il existe $u : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^n$ solution de

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)) & \text{pour chaque } t \in [0, +\infty[, \\ u(0) = x, \end{cases}$$

et cette solution satisfait

$$\lim_{t \to \infty} u(t) = u_0.$$

Démonstration. Nous démontrerons cette proposition dans le cas sous l'hypothèse plus forte que $V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ et que pour chaque point $z \in \Omega \setminus \{u_0\}$ on a $DV(z)[f(z)] < 0$. Par la proposition 4.2, il existe une solution $u : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ du problème

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)) & \text{pour chaque } t \in [0, +\infty[, \\ u(0) = x. \end{cases}$$

Nous allons commencer par montrer que $\lim_{t\to\infty} V(u(t)) = V(u_0)$. Soit $\eta > 0$ tel que $\eta \leq V(x) - V(u_0)$. Puisque l'ensemble $\{y \in \Omega \mid V(u_0) + \eta \leq V(y) \leq V(x)\}$ est compact et ne contient pas le point u_0, par le théorème des bornes atteintes, il existe $\nu > 0$ tel que si $y \in \Omega$ et $V(u_0) + \eta \leq V(y) \leq V(x)$, alors

$$DV(y)[f(y)] \leq -\nu.$$

Montrons qu'il existe $\bar{t} \in [0, +\infty[$ tel que $V(u(\bar{t})) < V(u_0) + \eta$. Sinon, on aurait pour chaque $t \in [0, +\infty[$, $V(u_0) + \eta \leq V(u(t)) \leq V(x)$, et donc

$$(V \circ u)'(t) = DV(u(t))[f(u(t))] \leq -\nu,$$

d'où on déduirait que pour chaque $t \in [0, +\infty[$,

$$V(u(t)) \leq V(x) - \nu t.$$

Puisque $\nu > 0$, on aurait une contradiction. On vérifie alors que pour chaque $t \in [\bar{t}, +\infty[$, $V(u(t)) \leq V(u_0) + \eta$.

Soit $\epsilon > 0$. Puisque $\{y \in \Omega \mid V(y) \leq V(x)\}$ est compact et V est continue, par le théorème des bornes atteintes, il existe $\eta > 0$ tel que si $y \in \Omega$, $V(y) \leq V(x)$ et $\|y - u_0\| \geq \epsilon$, alors $V(y) \geq V(u_0) + \eta$. Par ce qui précède, il existe $\bar{t} \in [0, +\infty[$ tel que pour chaque $t \in [\bar{t}, +\infty[$, $V(u(t)) < V(x) + \eta$. Par définition de η, on a alors

$$\|u(t) - u_0\| < \epsilon,$$

ce qui prouve la convergence demandée. □

Une définition un peu plus forte de stabilité est la suivante :

Définition 4.2 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs localement lipschitzien. Le point $u_0 \in \Omega$ est* asymptotiquement stable *(au sens de Lyapounov) s'il est stable et s'il existe $\delta > 0$ tel que pour chaque $x \in B(u_0, \delta)$, si u est solution de*

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)) & \textit{pour chaque } t \in [0, +\infty[, \\ u(0) = x, \end{cases}$$

alors

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = u_0.$$

Proposition 4.4 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs localement lipschitzien. Soit $u_0 \in \mathbb{R}^n$. Supposons qu'il existe $V \in C(\Omega, \mathbb{R})$ telle que u_0 soit un point de minimum local strict de la fonction V, et pour chaque courbe intégrale $u : I \to \mathbb{R}^n$ dans $\Omega \setminus \{u_0\}$,*

$$V \circ u \text{ est strictement décroissante},$$

alors u_0 est asymptotiquement stable.

Par rapport à la proposition 4.2, on a renforcé les hypothèses, en supposant que la fonction de Lyapounov V décroisse *strictement* le long de toute courbe intégrale u, et on a obtenu une conclusion plus forte, que le point u_0 est *asymptotiquement* stable.

En pratique, on cherche à construire une fonction de Lyapounov. Selon qu'elle décroit strictement ou pas le long de toute trajectoire, on applique la proposition 4.4 ou 4.2.

Démonstration de la proposition 4.4. La preuve est semblable à la preuve de la proposition 4.2. □

Exemple 4.4 Prenons $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ défini pour $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$f(x) = -x.$$

Et posons

$$V(x) = \|x\|^2.$$

On vérifie que si $u : I \to \mathbb{R}$ est une solution,

$$(V \circ u)'(t) = 2(u(t)|u'(t)) = -2(u(t)|u(t)).$$

Si $u(t) \neq 0$, on en déduit que $V \circ u$ est strictement décroissante. Le point 0 est donc un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Exemple 4.5 (Pendule amorti) On considère $f(x) = (x_2, -\sin x_1 - bx_2)$ avec $b > 0$ et on prend comme fonction de Lyapounov la fonction $V : \Omega \to \mathbb{R}$ définie pour $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ par

$$V(x) = \frac{x_2^2}{2} - \cos x_1,$$

où $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$. On calcule que si $u : I \to \mathbb{R}^2$ est une solution telle que $u(I) \subset \Omega \setminus \{0\}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(V \circ u)'(t) = -b(u_2(t))^2. \tag{4.1}$$

On en déduit que la fonction $V \circ u$ est décroissante. Supposons par l'absurde que la fonction $V \circ u$ ne soit pas strictement décroissante. Il existe alors $t_1, t_2 \in I$ tels que $t_1 < t_2$ et $V(u(t_1)) = V(u(t_2))$. Par (4.1) et par continuité de u_2, on a donc $u_2(t) = 0$ pour tout $t \in [t_1, t_2]$. En vue de l'équation cela implique que $\sin u_1(t) = u_2'(t) = 0$, et donc $u_1(t) = k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, en contradiction avec notre hypothèse. La fonction donc $V \circ u$ est strictement décroissante, de sorte que par la proposition 4.4 le point $(0, 0)$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

4.3.2. Stabilité asymptotique de problèmes linéaires

Nous allons maintenant étudier en détail la stabilité des problèmes linéaires autonomes.

Proposition 4.5 *Soit* $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n)$*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *pour tout* $\lambda \in \operatorname{spec} A$*, on a* $\mathrm{Re}\lambda < 0$*,*
2. *il existe une forme bilinéaire* B *sur* $\mathbb{R}^n$ *telle que pour tout* $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*,* $B(v,v) > 0$ *et* $2B(v, A[v]) = -\|v\|^2$*,*
3. 0 *est un équilibre asymptotiquement stable.*

Démonstration. Supposons que pour chaque $\lambda \in \operatorname{spec} A$, on ait $\mathrm{Re}\lambda < 0$. Par la proposition 1.9, il existe alors $C \in [1, +\infty[$ et $\sigma > 0$ tel que pour chaque $t \in [0, +\infty[$, $\|e^{tA}\| \le Ce^{-\sigma t}$. On peut alors poser

$$B(v,w) = \int_0^\infty (e^{tA}[v] | e^{tA}[w]) \,\mathrm{d}t.$$

On a clairement $B(v,v) > 0$ pour $v \neq 0$. On observe que par la propriété de commutation entre un opérateur et son exponentielle (proposition 1.2) et par le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral (proposition B.7),

$$\begin{aligned} 2B(v, A[v]) &= 2\int_0^\infty (e^{tA}[v] | e^{tA}[A[v]]) \,\mathrm{d}t = 2\int_0^\infty (e^{tA}[v] | A[e^{tA}[v]]) \,\mathrm{d}t \\ &= \|e^{tA}[v]\|^2 \big|_{t=0}^\infty = -\|v\|^2. \end{aligned}$$

Si on suppose qu'un tel B existe, on pose $V(x) = B(x,x)$, et on applique le théorème de Lyapounov.

Enfin, on observe que si 0 est asymptotiquement stable, on doit avoir par la proposition 1.7 que pour tout $\lambda \in \operatorname{spec} A$, $\mathrm{Re}\lambda < 0$. □

4.3.3. Stabilité asymptotique par linéarisation

Si un champ de vecteur est différentiable, on s'attend à ce que ses courbes intégrales se comportent comme celles de sa linéarisation en un équilibre. C'est en tous cas ce qui se passe en des points d'équilibre asymptotiquement stables de la linéarisation.

Proposition 4.6 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert,* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *un champ de vecteurs localement lipschitzien. Soit* $u_0 \in \Omega$ *tel que* $f(u_0) = 0$ *et* f *est dérivable en* u_0*. Si pour tout* $\lambda \in \operatorname{spec} Df(u_0)$*,* $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$*, alors* u_0 *est asymptotiquement stable.*

Démonstration. Par la proposition 4.5 appliquée à l'application linéaire $Df(u_0)$, il existe B forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$ telle que pour chaque $v \in \mathbb{R}^n$,

$$2B(v, Df(u_0)[v]) \le -\|v\|^2.$$

et, pour $v \neq 0$,

$$B(v, v) > 0.$$

Posons $V : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par

$$V(x) = B(x - u_0, x - u_0).$$

On vérifie que pour tout $x \in \Omega$, $V(x) \geq 0$ et $V(x) = 0$ si et seulement si $x = u_0$. Ensuite V est de classe C^1 et pour chaque $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} DV(x)[f(x)] &= 2B(x - u_0, f(x)) \\ &= 2B(x - u_0, f(x) - Df(u_0)[x - x_0]) + 2B(x - u_0, Df(u_0)[x - u_0]) \\ &\leq 2B(x - u_0, f(x) - f(u_0) - Df(u_0)[x - u_0]) - 2\|x - u_0\|^2. \end{aligned}$$

Puisque B est bilinéaire, il existe $C > 0$ tel que

$$DV(x)[f(x)] \leq C\|x - u_0\|\|f(x) - f(u_0) - Df(u_0)[x - u_0]\| - 2\|x - u_0\|^2.$$

Puisque f est différentiable en u_0, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in B(u_0, \delta) \cap \Omega$,

$$\|f(x) - f(u_0) - Df(u_0)[x - u_0]\| \leq \frac{\|x - u_0\|}{C}.$$

On a donc pour tout $x \in B(u_0, \delta) \cap \Omega$,

$$DV(x)[f(x)] \leq -\|x - u_0\|^2 < 0.$$

On peut donc appliquer la proposition 4.5 et conclure. □

Par rapport à la proposition 4.3, on note que le bassin d'attraction de u_0 est en général nettement plus petit, puisqu'il ne comportera que les points où le champ de vecteurs est proche de sa linéarisation.

4.4. Instabilité

4.4.1. Méthode de Lyapounov

Proposition 4.7 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs localement lipschitzien. Soit $u_0 \in \mathbb{R}^n$. Supposons qu'il existe $V \in C(\Omega, \mathbb{R})$ telle que pour tout $\delta > 0$, il existe $x \in \Omega \cap B(u_0, \delta)$ tel que $V(x) < V(u_0)$, et pour toute courbe intégrale $u : I \to \mathbb{R}^n$ telle que pour chaque $t \in I$, $V(u(t)) < V(u_0)$, $V \circ u$ est strictement décroissante, alors u_0 n'est pas stable.*

Démonstration. Nous allons prouver cette proposition dans le cas où $V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ et pour tout $x \in \Omega$ tel que $V(x) < V(u_0)$, $DV(x)[f(x)] < 0$. Soit $\epsilon > 0$

tel que $B[u_0, \epsilon] \subset \Omega$. Pour chaque $\delta > 0$, on peut trouver $x \in B(u_0, \delta)$ tel que $V(x) < V(u_0)$. Supposons que $u : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ satisfasse

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)) & \text{pour chaque } t \in [0, +\infty[, \\ u(0) = x, \end{cases}$$

et pour chaque $t \in [0, +\infty[$, $u(t) \in B[u_0, \epsilon]$. Tout d'abord on remarque que pour chaque $t \in [0, +\infty[$, $V(u(t)) \leq V(x)$. Si ce n'est pas le cas, posons

$$\bar{t} = \inf\{t \in [0, +\infty[\mid V(u(t)) > V(x)\} < \infty.$$

Par continuité de $V \circ u$, on observe que $\bar{t} > 0$ et $V(u(\bar{t})) = V(x)$. D'autre part, pour chaque $t \in [0, \bar{t}[$,

$$(V \circ u)'(t) = DV(u(t))[f(u(t))] < 0,$$

ce qui mène à une contradiction.

Puisque l'ensemble $\{y \in B[u_0, \epsilon] \mid V(y) \leq V(x)\}$ est compact et que V est continu, par le théorème des bornes atteintes on peut trouver $\mu > 0$ tel que pour chaque $y \in B[u_0, \epsilon]$ tel que $V(y) \leq V(x)$,

$$V(y) \geq \mu$$

De même puisque DV et f sont continus, on peut trouver $\nu > 0$ tel que pour chaque $y \in B[u_0, \epsilon]$ tel que $V(y) \leq V(x)$,

$$DV(y)[f(y)] \leq -\nu$$

Nous avons donc pour chaque $t \in [0, +\infty[$,

$$(V \circ u)'(t) = DV(u(t))[f(u(t))] \leq -\nu,$$

et donc

$$\mu \leq V(u(t)) \leq V(x) - \nu t,$$

ce qui nous donne une contradiction si $\nu t \geq V(x) - \mu$. □

Exemple 4.6 (Pendule dissipatif) On considère $f(x) = (x_2, -\sin x_1 - bx_2)$ et on prend la fonction de Lyapounov

$$V(x) = \frac{x_2^2}{2} - \cos x_1.$$

On vérifie que $V \circ u$ est strictement décroissante si $\sin u_1(t) \neq 0$ et que $(\pi, 0)$ n'est pas un minimum local de V. Le point $(\pi, 0)$ n'est donc pas un équilibre stable.

4.4.2. Instabilité de problèmes linéaires

Proposition 4.8 *Soit $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *il existe $\lambda \in \operatorname{spec} A$ tel que $\mathrm{Re}\lambda > 0$,*
2. *il existe une forme bilinéaire B sur $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, avec $B(v,v) \leq 0$, on a $2B(v, A[v]) \leq -\|v\|^2$ et il existe $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $B(v,v) < 0$.*

De plus, dans ces cas, 0 est n'est pas stable.

Démonstration. Supposons qu'il existe $\lambda \in \operatorname{spec} A$ tel que $\mathrm{Re}\lambda < 0$. On peut alors décomposer $\mathbb{R}^n = V_+ \oplus V_-$, où $V_+ \neq 0$ et V_- sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que pour tout $\lambda \in \operatorname{spec} A|_{V_+}$, $\mathrm{Re}\lambda > 0$ et pour tout $\lambda \in \operatorname{spec} A|_{V_-}$, $\mathrm{Re}\lambda \leq 0$. (Pour construire de tels espaces on considère les parties réelles des sous-espaces vectoriels complexes engendré par les vecteurs propres généralisés à partie réelle strictement positive et engendré par les vecteurs propres généralisés à partie réelle négative.) De plus on peut définir $P_+ \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n)$ et $P_- \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n)$ tels que $P_+ + P_- = \mathrm{id}$, $P_+|_{V_+} = \mathrm{id}_{V_+}$ et $P_-|_{V_-} = \mathrm{id}_{V_-}$. On vérifie que $P_+ \circ A = A \circ P_+$ et $P_- \circ A = A \circ P_-$.

Par la proposition 4.5 appliquée à $-A|_{V_+}$, il existe une forme bilinéaire B_+ sur $\mathbb{R}^n$ tel que pour chaque $v_+ \in V_+$

$$-2B_+(v_+, A[v_+]) = -\|v\|^2.$$

De même pour chaque $\epsilon > 0$, par la proposition 4.5 appliquée à $A|_{V_-} - \epsilon\, \mathrm{id}_{V_-}$, il existe une forme bilinéaire B_-^ϵ sur $\mathbb{R}^n$ tel que pour chaque $v_- \in V_-$

$$2B_-^\epsilon(v_-, A[v_-] - \epsilon v_-) = -\|v\|^2.$$

Posons pour chaque $v \in \mathbb{R}^n$,

$$B^\epsilon(v,v) = B_-^\epsilon(P_-[v], P_-[v]) - B_+(P_+[v], P_+[v]).$$

Notons que pour chaque $v \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} 2B^\epsilon(v, A[v]) &= 2B_-^\epsilon(P_-[v], P_-[A[v]]) - 2B_+(P_+[v], P_+[A[v]]) \\ &= 2B_-^\epsilon(P_-[v], A[P_-[v]]) - 2B_+(P_+[v], A[P_+[v]]) \\ &\leq -\|P_+[v]\|^2 - \|P_-[v]\|^2 + 2\epsilon B_-^\epsilon(P_-[v], P_-[v]). \end{aligned}$$

Si $B^\epsilon(v,v) \leq 0$, on a $B_-^\epsilon(P_-[v], P_-[v]) \leq B_+(P_+[v], P_+[v])$. De plus, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour chaque $v_+ \in V_+$,

$$B_+(v_+, v_+) \leq C\|v_+\|^2.$$

On a alors

$$2B^\epsilon(v, A[v]) \leq -(1 - C\epsilon)\|P_+[v]\|^2 - \|P_-[v]\|^2.$$

On obtient la conclusion en prenant $B = \sigma B^\epsilon$ avec $C\epsilon < 1$ et σ suffisament grand. □

4.4.3. Instabilité par linéarisation

Proposition 4.9 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs localement lipschitzien et $u_0 \in \Omega$. Si $f(u_0) = 0$, f est dérivable en u_0 et s'il existe $\lambda \in \operatorname{spec} Df(u_0)$ tel que $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, alors u_0 n'est pas stable.*

Démonstration. La preuve est semblable à la preuve de la proposition 4.6, en utilisant la proposition 4.8 à la place de la proposition 4.5 et la proposition 4.7 à la place de la proposition 4.4. □

Si on compare les propositions 4.6 et 4.9, on observe que dans le cas où pour chaque $\lambda \in \operatorname{spec} Df(u_0)$, $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ et il existe $\lambda \in \operatorname{spec} Df(u_0)$ tel que $\operatorname{Re}\lambda = 0$, aucune des propositions ne donne de résultat. En effet, dans ce cas-là on peut avoir stabilité asymptotique ou instabilité.

Exemple 4.7 On considère le champ de vecteurs $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3$. On observe que f est dérivable et $f'(0) = 0$. On vérifie en prenant comme fonction de Lyapounov $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $V(x) = x^2$ que 0 est un équilibre stable.

Exemple 4.8 On considère le champ de vecteurs $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. On observe que f est dérivable et $f'(0) = 0$. On vérifie en prenant comme fonction de Lyapounov $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $V(x) = -x^2$ que 0 est un équilibre instable.

Notes

On trouvera des preuves des propositions 4.6 et 4.9 dans le cas où f (mais pas sa linéarisation) dépend de t chez Coddington et Levinson [1].

Références

[1] Earl A. Coddington and Norman Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1955.

Exercices

Exercice 4.1 Le point $(0, 0)$ est-il un équilibre stable du sytème

$$\begin{cases} u_1'(t) = -2u_1(t) - 3u_2(t) + u_1(t)^5 \\ u_2'(t) = u_1(t) + u_2(t) - u_2(t)^2 ? \end{cases}$$

Exercice 4.2 Le point $(0,0)$ est-il un équilibre stable du sytème

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_1(t) + \mathrm{e}^{u_2(t)} - \cos u_2(t) \\ u_2'(t) = 3u_1(t) - u_2(t) - \sin u_2(t)? \end{cases}$$

Exercice 4.3 Considérons le système

$$\begin{cases} x' = 2y(z-1), \\ y' = -x(z-1), \\ z' = -z^3. \end{cases} \tag{4.2}$$

(a) Déterminez des réels a, b et c tels que

$$V(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$$

soit une fonction de Liapounov pour (4.2).

(b) L'origine est-elle stable pour (4.2) ?

(c) Montrez que l'origine n'est pas asymptotiquement stable pour (4.2).

Exercice 4.4 Trouvez une fonction de Liapounov pour l'équation

$$x' = -x^3.$$

L'origine est-elle stable ?

Exercice 4.5 Pour chacun des deux systèmes suivants, cherchez les points d'équilibre, écrivez la linéarisation du système en ces points et étudiez leur type et leur stabilité. Esquissez le plan de phase autour des points d'équilibre.

$$\begin{cases} x' = x(1-x^2), \\ y' = y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x(1 - y - \frac{x}{3}), \\ y' = y(x - 1 - \frac{y}{3}). \end{cases}$$

Exercice 4.6 Considérons l'équation

$$u'' - \epsilon(1-u^2)u' + u = 0$$

d'un oscillateur avec frottement (paramétré par ϵ). Ecrivez cette équation sous la forme d'un système planaire, trouvez les points d'équilibre de ce système, écrivez la linéarisation du système en ces points et étudiez le type et la stabilité des points d'équilibre en fonction de $\epsilon \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.7 (a) On considère le système autonome

$$\begin{cases} x' = -y + x(x^2+y^2), \\ y' = x + y(x^2+y^2), \end{cases} \tag{$S1$}$$

et son linéarisé

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x. \end{cases} \tag{L}$$

Montrez que l'origine est stable pour (L) et instable pour ($S1$).

(b) On considère le système

$$\begin{cases} x' = -y - x(x^2+y^2), \\ y' = x - y(x^2+y^2). \end{cases} \tag{$S2$}$$

Montrez que l'origine est asymptotiquement stable pour ($S2$) (alors qu'elle n'est pas attractive pour (L)).

(c) On considère le système

$$\begin{cases} x' = -y + e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) x, \\ y' = x + e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) y. \end{cases} \tag{$S3$}$$

Montrez que l'origine est stable mais pas asymptotiquement stable.

Deuxième partie

Problèmes aux limites

5. Problèmes aux limites pour les systèmes d'équations différentielles linéaires

Matières

5.1. Introduction 120
5.2. Condition de résolubilité 120
5.3. Condition d'unicité 123
Compléments 124
Exercices 132

Prérequis

- ☞ Problèmes linéaires à coefficients variables (chapitre 2) : structure de l'espace de solutions et représentations par la résolvante.
- ☞ Adjoint d'une application linéaire (algèbre linéaire)

Questionnaire de révision

- ☞ Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante de résolvabilité pour une donnée fixée de problèmes aux limites pour une équation différentielle linéaire.
- ☞ Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante d'unicité pour un problème aux limites pour une équation différentielle linéaire.

Exercices prioritaires : 5.3.

5.1. Introduction

Dans la première partie du cours, nous avons étudié des problèmes de valeurs initiales (ou de Cauchy), dans lesquels on cherche une solution dont on connaît la valeur en un point.

Dans certaines situations, on a des informations partielles sur la valeur de la solution en plusieurs points. Un premier exemple est le problème de tir : on cherche à trouver si un système mécanique possède une trajectoire qui au temps t_0 est en u_0 et est au point u_1 au temps t_1. Pour un problème de valeur initiale, on aurait imposé *la position et la vitesse* en un des deux temps.

Une autre situation est la recherche de solutions périodiques : on impose que la solution prenne la même valeur au temps t_0 et au temps t_1.

Un dernier type d'exemples est celui de situations dans laquelle la variable indépendante des solutions de l'équation différentielle représente physiquement une variable d'espace. Cela arrive lorsqu'on étudie des solutions stationnaires pour l'équation des ondes ou l'équation de la chaleur à une dimension d'espace. Ainsi, dans le cas de l'équation de la chaleur qui décrit la conduction thermique, il est assez naturel de prescrire les flux de chaleurs ou les températures aux extrémités du milieu qu'on modélise.

5.2. Condition de résolubilité

On se demande pour quelles fonctions $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ le problème

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)[u(t)] + f(t) & \text{si } t \in [a, b], \\ B_a[u(a)] = B_b[u(b)], \end{cases}$$

où $A \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$ et $B_a, B_b \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ a une solution.

Remarquons pour commencer que si u est une solution et si on considère une fonction dérivable $v : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, on a, par intégration par partie

$$\begin{aligned} \int_a^b (v(t)|f(t))\,\mathrm{d}t &= \int_a^b (v(t)|u'(t) - A(t)[u(t)])\,\mathrm{d}t \\ &= (v(b)|u(b)) - (v(a)|u(a)) - \int_a^b (v'(t) + A(t)^*[v(t)]|u(t))\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

où pour chaque $t \in [a, b]$ fixé, $A(t)^*$ est l'opérateur adjoint de $A(t)$ (définition A.1). Si

$$v'(t) = -A(t)^*[v(t)],$$

et si pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ tel que $B_a[\alpha] = B_b[\beta]$, on a $(v(a)|\alpha) = (v(b)|\beta)$, on a alors

$$\int_a^b (v(t)|f(t))\,\mathrm{d}t = 0.$$

Nous avons donc une relation satisfaite par f, qui va nous donner en fait une condition nécessaire et suffisante de résolubilité d'un problème aux limites.

Proposition 5.1 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $A \in C([a,b]; \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n))$, $f \in C([a,b]; \mathbb{R}^n)$, $B_a \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $B_b \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Le problème*

$$\begin{cases} \quad u'(t) = A(t)[u(t)] + f(t) & \textit{pour } t \in [a,b], \\ B_a[u(a)] = B_b[u(b)], \end{cases}$$

possède une solution si et seulement si pour chaque $v\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ tel que

$$\begin{cases} \quad v'(t) = -A(t)^*[v(t)] & \textit{pour } t \in [a,b], \\ (v(a)|\alpha) = (v(b)|\beta) & \textit{pour chaque } \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n \textit{ tels que } B_a[\alpha] = B_b[\beta] \end{cases}$$

on a

$$\int_a^b (v(s)|f(s))\,\mathrm{d}s = 0.$$

Cette proposition nous indique qu'un problème aux limites a une solution pourvu que certaines *conditions de compatibilité* soient satisfaites. En général, ces conditions ont une interprétation dans le phénomène qu'on modélise par l'équation. Par exemple, pour un oscillateur harmonique cette condition empêche le système d'entrer en résonance avec le terme de forçage. Si on s'intéresse à un état stationnaire de la diffusion de la chaleur dans un milieu isolé en présence de sources, la quantité totale de chaleur injectée par unité de temps doit être nulle.

Démonstration. Supposons que la fonction u soit une solution et la fonction v satisfasse les hypothèses. On a alors, par intégration par parties et par définition de l'opérateur adjoint

$$\begin{aligned} \int_a^b (v(t)|f(t))\,\mathrm{d}t &= \int_a^b (v(t)|u'(t) - A(t)[u(t)])\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b (v(t)|u'(t))\,\mathrm{d}t - \int_a^b (v(t)|A(t)[u(t)])\,\mathrm{d}t \\ &= (v(b)|u(b)) - (v(a)|u(a)) - \int_a^b (v'(t)|u(t))\,\mathrm{d}t - \int_a^b (A(t)^*[v(t)]|u(t))\,\mathrm{d}t \\ &= (v(b)|u(b)) - (v(a)|u(a)) - \int_a^b (v'(t) + A(t)^*[v(t)]|u(t))\,\mathrm{d}t = 0 \end{aligned}$$

et la condition nécessaire est donc satisfaite.

Dans l'autre sens, supposons que la donnée f satisfasse l'hypothèse. Pour $u_0 \in \mathbb{R}^n$, nous allons écrire

$$u(t) = R(t,a)[u_0] + \int_a^t R(t,s)\big[f(s)\big]\,\mathrm{d}s.$$

Nous voulons montrer que pour un certain vecteur $u_0 \in \mathbb{R}^n$, on a

$$B_a[u_0] = B_b\Big[R(b,a)[u_0] + \int_a^b R(b,s)\big[f(s)\big]\,\mathrm{d}s\Big].$$

Nous allons vérifier que

$$B_b\Big[\int_a^b R(b,s)\big[f(s)\big]\,\mathrm{d}s\Big] \in (B_a - B_b \circ R(b,a))[\mathbb{R}^n].$$

Pour cela, soit $w \in (B_a - B_b \circ R(b,a))[\mathbb{R}^n]^\perp$ autrement dit, supposons que pour chaque $u_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$(w|B_a[u_0]) = (w|B_b[R(b,a)[u_0]]).$$

Nous voulons vérifier que

$$\int_a^b (w|B_b[R(b,s)[f(s)]])\,\mathrm{d}s = 0.$$

Par les propriétés de l'adjointe, on a

$$\int_a^b (w|B_b[R(b,s)[f(s)]])\,\mathrm{d}s = \int_a^b (R(b,s)^*[B_b^*[w]]|f(s))\,\mathrm{d}s.$$

Définissons la fonction $v : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ pour chaque $t \in [a,b]$ par $v(t) = R(b,t)^*[B_b^*[w]]$. On vérifie que pour chaque $t \in [a,b]$,

$$v'(t) = -A(t)^*[v(t)].$$

Soient maintenant $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ tels que $B_a[\alpha] = B_b[\beta]$. On a

$$(\alpha|v(a)) - (\beta|v(b)) = (\alpha|R(b,a)^*[B_b^*[w]]) - (\beta|B_b^*[w]) = (B_b[R(b,a)[\alpha]] - B_b[\beta]|w).$$

Par hypothèse sur w, on a

$$(B_b[R(b,a)[\alpha]] - B_b[\beta]|w) = (B_a[\alpha] - B_b[\beta]|w) = 0$$

par hypothèse sur (α,β), d'où on conclut que notre problème a une solution. $\square$

Si on considère le problème

$$\begin{cases} u''(t) = -\lambda^2 u(t) + f(t) & \text{pour } t \in [0,T],\\ u(0) = 0, \\ u(T) = 0, \end{cases}$$

On veut vérifier quelles sont les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ et de $f \in C([0,T])$ pour lesquelles ce problème admet une solution. En réécrivant ce problème sous forme d'un système du premier ordre,

$$\begin{cases} v_1'(t) = v_2(t), & \text{pour } t \in [0,T], \\ v_2'(t) = -\lambda^2 v_1(t) + f(t) & \text{pour } t \in [0,T], \\ v_1(0) = 0, \\ v_1(T) = 0, \end{cases}$$

nous devons étudier les solutions du système

$$\begin{cases} w_1'(t) = \lambda^2 w_2(t), & \text{pour } t \in [0,T], \\ w_2'(t) = -w_1(t) & \text{pour } t \in [0,T], \\ w_2(0) = 0, \\ w_2(T) = 0, \end{cases}$$

On vérifie à l'aide de l'équation et la première conditions aux limites, que toute solution s'écrit sous la forme de

$$w(t) = K(-\cos \lambda t, \sin \lambda t).$$

Pour avoir

$$w_2(T) = 0,$$

il faut que soit $K = 0$ soit $\sin \lambda T = 0$, c'est-à-dire λT soit un multiple de π. Si $\lambda = \frac{k\pi}{T}$ avec $k \in \mathbb{Z}_*$, le problème a une solution si et seulement si

$$\int_0^T f(s) \sin(\lambda t) \,\mathrm{d}s = 0.$$

5.3. Condition d'unicité

En général, la solution d'un problème aux limites n'est pas unique. Par exemple, le problème

$$\begin{cases} u'(t) = 0, \\ u(a) = u(b). \end{cases}$$

a une infinité de solutions constantes. La linéarité permet d'écrire un critère simple d'unicité de la solution d'un problème aux limites.

Proposition 5.2 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $A \in C([a,b]; \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n))$, $B_a \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$ et $B_b \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$. Si le problème*

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)[u(t)] & \textit{pour } t \in [a,b], \\ B_a[u(a)] = B_b[u(b)], \end{cases}$$

ne possède que la solution nulle, alors le problème

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)[u(t)] + f(t) & \textit{pour } t \in [a, b], \\ B_a[u(a)] = B_b[u(b)], \end{cases}$$

possède au plus une solution.

Démonstration. On considère u et v solutions de l'équation et on vérifie que $w = v - u$ satisfait

$$\begin{cases} w'(t) = A(t)[w(t)] & \text{pour } t \in [a, b], \\ B_a[w(a)] = B_b[w(b)], \end{cases}$$

d'où on conclut par hypothèse que $w = 0$ et donc $u = v$. $\square$

Compléments

Condition de résolubilité sur l'équation

Étant donnés $A \in C([a, b]; \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n))$ et $f \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$, nous cherchons $u\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ qui satisfasse pour chaque $t \in [a, b]$ l'équation différentielle

$$u'(t) = A(t)[u(t)] + f(t)$$

sous les conditions

$$B_a[u(a)] = B_b[u(b)].$$

Ici, $B_a \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n)$ et $B_b \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n)$ sont des opérateurs linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Nous cherchons à savoir si ce problème possède une solution unique.

Proposition 5.3 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $A \in C([a, b]; \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n))$, $B_a \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n)$ et $B_b \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n)$. Si le problème*

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)[u(t)] & \textit{pour } t \in [a, b], \\ B_a[u(a)] = B_b[u(b)], \end{cases}$$

ne possède que la solution nulle, alors le problème

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)[u(t)] + f(t) & \textit{pour } t \in [a, b], \\ B_a[u(a)] = B_b[u(b)], \end{cases}$$

possède une solution pour chaque $f \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$

Notons que par linéarité, la seconde condition peut se réexprimer en disant que le problème

$$\begin{cases} \quad u'(t) = A(t)[u(t)] + f(t) & \text{pour } t \in [a, b], \\ B_a[u(a)] = B_b[u(b)], \end{cases}$$

possède au plus une solution pour chaque $f \in C([a, b])$. Nous avons donc, dans cette classe de problème, une équivalence entre l'existence d'une solution pour chaque donnée et l'unicité de la solution pour chaque donnée.

L'énoncé de cette proposition rappelle l'énoncé qui dit que pour chaque $L \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^p)$, si L est injectif, alors L est surjectif. Ce résultat ne s'étend malheureusement pas aux espaces vectoriels de dimension infinie. On a des opérateurs linéaires injectifs non surjectifs. Si on prend $L \in \mathrm{Lin}\,(C^\infty(\mathbb{R}))$ défini pour $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$ par $(Lu)(t) = \int_0^t u(t)\,\mathrm{d}t$, on a un opérateur injectif mais non surjectif (son image est l'ensemble des fonctions $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ telles que $u(0) = 0$).

Remarquons aussi que la réciproque n'est pas vraie dans la proposition 5.3 : si on prend $B_a = B_b = 0$, on vérifie que le problème a une solution mais que cette solution n'est pas unique.

Démonstration de la proposition 5.3. Soit $u_0 \in \mathbb{R}^n$. Si nous posons

$$u(t) = R(t, a)[u_0] + \int_a^t R(t, s)[f(s)]\,\mathrm{d}s,$$

on a par la proposition 2.12,

$$u'(t) = A(t)[u(t)] + f(t).$$

Il reste à vérifier qu'on satisfait la conditions aux limites. On vérifie que $B_a[u(a)] = B_b[u(b)]$ si et seulement si on peut trouver $u_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$B_a[u_0] - B_b\big[R(b, a)[u_0]\big] = \int_a^b B_b \circ R(t, s)[f(s)]\,\mathrm{d}s.$$

Puisque $B_a - B_b \circ R(b, a)$ est une application linéaire entre espaces vectoriels de même dimension, il est équivalent de montrer que $B_a - B_b \circ R(b, a)$ est injective. Supposons que $u_0 \in \ker(B_a - B_b \circ R(b, a))$. On a alors que la fonction $v \colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ est une solution du problème

$$\begin{cases} \quad v'(t) = A(t)[v(t)] & \text{pour } t \in [a, b], \\ B_a[v(a)] = B_b[v(b)], \end{cases}$$

par hypothèse, on a $v \equiv 0$ et donc $u_0 = v(a) = 0$. $\square$

Corollaire 5.4 *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$ *avec* $a < b$, $A \in C([a,b]; \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n))$, $B_a \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n)$ *et* $B_b \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n)$. *Si le problème*

$$\begin{cases} \quad u'(t) = A(t)[u(t)] & \text{pour } t \in [a,b], \\ B_a[u(a)] = B_b[u(b)], \end{cases}$$

ne possède que la solution nulle, alors pour chaque $t \in [a,b]$,

$$B_a \circ R(a,t) - B_b \circ R(b,t)$$

est inversible.

Démonstration. On note que, par la preuve de la proposition 5.3, l'opérateur $B_a - B_b \circ R(b,a)$ est inversible. Puisque par la proposition 2.8

$$B_a \circ R(a,t) - B_b \circ R(b,t) = \big(B_a - B_b \circ R(b,a)\big) \circ R(a,t),$$

et $R(a,t)$ est inversible, on a la conclusion. □

Pour la réciproque on a la proposition suivante

Proposition 5.5 *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$ *avec* $a < b$, $A \in C([a,b]; \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n))$, $B_a \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n)$ *et* $B_b \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n)$. *Si le problème*

$$\begin{cases} \quad u'(t) = A(t)[u(t)] + f(t) & \text{pour } t \in [a,b], \\ B_a[u(a)] = B_b[u(b)], \end{cases}$$

possède une solution pour chaque $f \in C([a,b]; \mathbb{R}^n)$ *et si*

$$\dim\{(u_a, u_b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid B_a[u_a] = B_b[u_b]\} = n$$

alors le problème

$$\begin{cases} \quad u'(t) = A(t)[u(t)] & \text{pour } t \in [a,b], \\ B_a[u(a)] = B_b[u(b)], \end{cases}$$

ne possède que la solution nulle,

Démonstration. Si $f_0 \in \mathbb{R}^n$, on remarque tout d'abord que par hypothèse, il existe $u_a \in \mathbb{R}^n$ et $u_b \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$B_a[u_a] - B_b[u_b] = f_0.$$

Prenons $t_0 \in \,]a,b[$ et posons

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t-a}{2(t_0-a)^2} R(t,a)[u_a] & \text{si } t \in [a, t_0[, \\ 0 & \text{si } t = t_0, \\ \frac{(t-b)}{2(t_0-b)^2} R(t,a)[u_b] & \text{si } t \in]t_0, b] \end{cases}$$

Soit u une solution du problème

$$\begin{cases} \quad u'(t) = A(t)[u(t)] + f(t) & \text{pour } t \in [a,b], \\ B_a[u(a)] = B_b[u(b)], \end{cases}$$

On vérifie que

$$u(t) = R(t,t_0)[u(t_0)] + \int_{t_0}^{t} R(t,s)[f(s)]\,\mathrm{d}s.$$

En particulier, on a

$$\begin{aligned} B_a[u(a)] - B_b[u(a)] &= \int_a^t \frac{s-a}{2(t_0-a)^2} R(a,s) \circ R(s,a) \circ B_a[u_a]\,\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_t^b \frac{b-t}{2(t_0-b)^2} R(b,s) \circ R(s,b) \circ B_b[u_b] \\ &= \int_a^t \frac{t-a}{2(t_0-a)^2} B_a[u_a]\,\mathrm{d}s + \int_t^b \frac{b-t}{2(t_0-b)^2} B_b[u_b]\,\mathrm{d}s = f_0. \end{aligned}$$

On en conclut que $B_a \circ R(a,t_0) - B_b \circ R(b,t_0)$ est injectif pour tout $t_0 \in]a,b[$. Cela signifie que si u est une solution de

$$\begin{cases} \quad u'(t) = A(t)[u(t)] & \text{pour } t \in [a,b], \\ B_a[u(a)] = B_b[u(b)], \end{cases}$$

alors puisque

$$(B_a \circ R(a,t_0) - B_b \circ R(b,t_0))[u(t_0)] = 0,$$

on a $u(t_0) = 0$. □

Comme exemple d'application nous allons considérer le problème suivant :

$$\begin{cases} u''(t) = -\lambda^2 u(t) + f(t) & \text{pour } t \in [0,1], \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0, \end{cases}$$

On veut vérifier pour quels $\lambda \in \mathbb{R}$ ce problème admet une solution pour chaque $f \in C([0,1])$. En réécrivant ce problème sous forme d'un système du premier ordre,

$$\begin{cases} v_1'(t) = v_2(t), & \text{pour } t \in [0,T], \\ v_2'(t) = -\lambda^2 v_1(t) + f(t) & \text{pour } t \in [0,T], \\ v_1(0) = 0, \\ v_1(T) = 0, \end{cases}$$

nous devons vérifier si le système

$$\begin{cases} v_1'(t) = v_2(t), & \text{pour } t \in [0, T], \\ v_2'(t) = -\lambda^2 v_1(t) & \text{pour } t \in [0, T], \\ v_1(0) = 0, \\ v_1(T) = 0, \end{cases}$$

n'admet que la solution nulle. Cela est équivalent à considérer le système

$$\begin{cases} u''(t) = -\lambda^2 u(t) & \text{pour } t \in [0, T], \\ u(0) = 0, \\ u(T) = 0. \end{cases}$$

On observe que, par l'équation différentielle, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pour chaque $t \in [0, 1]$,

$$u(t) = \alpha \cos \lambda t + \beta \sin \lambda t.$$

On déduit de la première condition aux limites que $\alpha = 0$. De la seconde condition aux limites, on déduit que $\beta \sin \lambda T = 0$. Si λT n'est pas un multiple entier de 2π, on en déduit que le problème possède une solution pour chaque $f \in C([0, T])$.

Formule de représentation de solution

Derrière les preuves précédentes, on remarque que quand on construit une solution d'un problèmes aux limites linéaires, on calcule la solution à l'aide d'une formule intégrale et d'inversions d'opérateurs linéaires.

Définition 5.1 *Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, soit $A \in C([a, b]; \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n))$, $B_a \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n)$ et $B_b \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n)$. Sous l'hypothèse de la proposition 5.3, on définit la* fonction de Green *: $G : [a, b] \times [a, b] \setminus \{(s, s) \mid s \in [a, b]\}$ par*

$$G(t, s) = \begin{cases} \big(B_a \circ R(a, t) - B_b \circ R(b, t)\big)^{-1} \circ B_b \circ R(b, s) & \textit{si } t < s, \\ \big(B_a \circ R(a, t) - B_b \circ R(b, t)\big)^{-1} \circ B_a \circ R(a, s) & \textit{si } t > s. \end{cases}$$

On démontre

Proposition 5.6 *Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, soit $A \in C([a, b]; \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n))$, $B_a \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n)$ et $B_b \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n)$. Sous l'hypothèse de la proposition 5.3, si $f \in C([a, b])$, on a*

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)[u(t)] + f(t) & \textit{pour } t \in [a, b], \\ B_a[u(a)] = B_b[u(b)], \end{cases}$$

si et seulement si pour chaque $t \in [a, b]$,

$$u(t) = \int_a^b G(t, s) f(s) \, \mathrm{d}s.$$

Démonstration. Par la proposition 5.3, nous savons que le problème a une solution unique. Il nous reste à la calculer. Soit $t \in [a, b]$. Puisque u est une solution, on a pour chaque $r \in [a, b]$, par la proposition 2.12

$$u(r) = R(r,t)[u(t)] + \int_t^r R(r,s)\big[f(s)\big]\,\mathrm{d}s.$$

On calcule donc

$$\begin{aligned}B_a[u(a)] - B_b[u(b)] = B_a \circ R(a,t)[u(t)] + \int_t^a B_a \circ R(a,s)\big[f(s)\big]\,\mathrm{d}s \\ - B_b \circ R(b,t)[u(t)] - \int_t^b B_b \circ R(b,s)\big[f(s)\big]\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

d'où on déduit, puisque $B_a[u(a)] + B_b[u(b)] = 0$, que

$$\big(B_a \circ R(a,t) - B_b \circ R(b,t)\big)\big[u(t)\big] = \int_a^t B_a \circ R(a,s)\big[f(s)\big]\,\mathrm{d}s + \int_t^b B_b \circ R(b,s)\big[f(s)\big]\,\mathrm{d}s.$$

On en déduit qu'on a bien la formule désirée. □

La fonction de Green nous permet donc de calculer des solutions de problèmes aux limites. Cependant la formule que nous avons donnée ci-dessus est peu commode pour les calculs : il faut calculer la résolvante, composer avec les opérateurs de conditions aux limites et inverser un opérateur linéaire. On peut caractériser la fonction de Green de la manière suivante :

Proposition 5.7 *Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, soit $A \in C([a,b]; \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n))$, $B_a \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n)$ et $B_b \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n)$. Sous l'hypothèse de la proposition 5.3, la fonction de Green $G \in C([a,b] \times]a,b[\setminus \{(s,s) \mid s \in [a,b]\} \mapsto \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ satisfait pour chaque $s, t \in]a,b[$ avec $s \neq t$,*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} G(\tau, s)|_{\tau=t} = A(t) \circ G(t,s)$$

et pour chaque $s \in]a,b[$,

$$\lim_{t \searrow s} G(t,s) - \lim_{t \nearrow s} G(t,s) = \mathrm{id},$$

et

$$B_a \circ G(a,s) = B_b \circ G(b,s).$$

Démonstration. Pour l'équation différentielle, on note que si $r, t \in]s, b[$,

$$\begin{aligned}G(r,s) &= \big(B_a \circ R(a,r) - B_b \circ R(b,r)\big)^{-1} \circ B_a \circ R(a,s) \\ &= \big(B_a \circ R(a,t) \circ R(t,r) - B_b \circ R(b,t) \circ R(t,r)\big)^{-1} \circ B_a \circ R(a,s) \\ &= R(t,r)^{-1} \circ \big(B_a \circ R(a,t) - B_b \circ R(b,t)\big)^{-1} \circ B_a \circ R(a,s) \\ &= R(r,t) \circ G(t,s).\end{aligned}$$

On déduit de la proposition 2.10 que G satisfait l'équation désirée pour $t \in \,]s,b[$. La preuve pour $t \in \,]a,s[$ est semblable.

Pour la limite, on part de la définition 5.1 et on note que

$$\lim_{t \searrow s} G(t,s) = \big(B_a \circ R(a,t) - B_b \circ R(b,t)\big)^{-1} \circ B_a \circ R(a,t)$$

et que

$$\lim_{t \nearrow s} G(t,s) = \big(B_a \circ R(a,t) - B_b \circ R(b,t)\big)^{-1} \circ B_b \circ R(b,t).$$

Pour la condition aux frontières, d'après la définition 5.1, on a

$$\begin{aligned} B_a \circ G(a,s) &= B_a \circ \big(B_a \circ R(a,a) - B_b \circ R(b,a)\big)^{-1} \circ B_b \circ R(b,s) \\ &= B_a \circ \big(B_a - B_b \circ R(b,a)\big)^{-1} \circ B_b \circ R(b,a) \circ R(a,s) \\ &= B_a \circ \big(B_a - B_b \circ R(b,a)\big)^{-1} \circ B_a \circ R(a,s) - B_a \circ R(a,s). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B_b \circ G(b,s) &= B_b \circ \big(B_a \circ R(a,b) - B_b \circ R(b,b)\big)^{-1} \circ B_a \circ R(a,s) \\ &= B_b \circ R(b,a) \circ \big(B_a - B_b \circ R(b,a)\big)^{-1} \circ B_a \circ R(a,s) \\ &= B_a \circ \big(B_a - B_b \circ R(b,a)\big)^{-1} \circ B_a \circ R(a,s) - B_a \circ R(a,s). \end{aligned}$$

□

On considère le problème

$$\begin{cases} v''(t) = -\lambda^2 v(t) + f(t) \\ v(a) = 0, \\ v(b) = 0. \end{cases}$$

On peut étudier le problème

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_2(t) & \text{pour } t \in [a,b] \\ u_2'(t) = -\lambda^2 v(t) + f(t) & \text{pour } t \in [a,b] \\ u_1(a) = 0, \\ u_1(b) = 0. \end{cases}$$

et calculer la fonction de Green sur le vecteur $(0,1)$. Posons pour $s \in]a,b[$ fixé,

$$w(t) = G(t,s)[(0,1)].$$

On a alors

$$\begin{cases} w_1'(t) = w_2(t) & \text{pour } t \in [a,b] \setminus \{s\} \\ w_2'(t) = -\lambda^2 w(t) & \text{pour } t \in [a,b] \setminus \{s\} \\ w_1(a) = 0, \\ w_1(b) = 0, \\ \lim_{t \nearrow s} w_1(s) = \lim_{t \searrow s} w_1(s) \\ \lim_{t \nearrow s} w_2(s) = \lim_{t \searrow s} w_2(s) - 1. \end{cases}$$

On trouve donc, à partir des quatre premières équations

$$w(t) = \alpha(\sin(\lambda(t-a)), \lambda\cos(\lambda(t-a)))$$

pour $t < s$ et

$$w(t) = \beta(\sin(\lambda(b-t)), -\lambda\cos(\lambda(b-t))).$$

Les deux dernières conditions donnent

$$\begin{cases} \alpha\sin(\lambda(s-a)) - \beta\sin(\lambda(b-s)) = 0, \\ \alpha\lambda\cos(\lambda(s-a)) + \beta\lambda\cos(\lambda(b-s)) = 1. \end{cases}$$

d'où on calcule que

$$\alpha = \frac{\sin\lambda(b-s)}{\lambda(\cos(\lambda(s-a))\sin(\lambda(b-s)) + \sin(\lambda(s-a))\cos(\lambda(b-s)))} = \frac{\sin\lambda(b-s)}{\sin(\lambda(b-a))}.$$

et

$$\beta = \frac{\sin\lambda(s-a)}{\lambda(\cos(\lambda(s-a))\sin(\lambda(b-s)) + \sin(\lambda(s-a))\cos(\lambda(b-s)))} = \frac{\sin(\lambda(s-a))}{\sin(\lambda(b-a))}.$$

On a donc

$$w_1(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\lambda(b-s))\sin(\lambda(t-a))}{\lambda\sin(\lambda(b-a))} & \text{si } t < s, \\ \frac{\sin(\lambda(b-t))\sin(\lambda(s-a))}{\lambda\sin(\lambda(b-a))} & \text{si } t > s. \end{cases}$$

On a donc

$$u(t) = \int_a^b H(t,s) f(s)\,\mathrm{d}s,$$

où

$$H(t,s) = \begin{cases} \frac{\sin(\lambda(b-s))\sin(\lambda(t-a))}{\lambda\sin(\lambda(b-a))} & \text{si } t < s \\ \frac{\sin(\lambda(b-t))\sin(\lambda(s-a))}{\lambda\sin(\lambda(b-a))} & \text{si } t > s \end{cases}$$

Fonction de Green et problème adjoint

Proposition 5.8 *Soit* $a, b \in \mathbb{R}$ *avec* $a < b$*, soit* $A \in C([a,b]; \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n))$*,* $B_a \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n)$ *et* $B_b \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n)$*. Sous l'hypothèse de la proposition 5.3, si* $f \in C([a,b])$ *et* $v\colon]a,b[\to \mathbb{R}$*, on a que* v *est dérivable et*

$$\begin{cases} v'(t) = A(t)[v(t)] + f(t) & \textit{pour } t \in [a,b], \\ (u_a|v(a)) = (u_b|v(b)) & \textit{pour chaque } u_a, u_b \in \mathbb{R}^n \textit{ avec } B_a[u_a] = B_b[u_b] \end{cases}$$

si et seulement si pour chaque $t \in [a,b]$*,*

$$u(t) = \int_a^b G(t,s)[f(s)]\,\mathrm{d}s.$$

Relation entre dégénérescence et surdétermination

Proposition 5.9 *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$ *avec* $a < b$, $A \in C([a,b]; \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n))$, $f \in C([a,b]; \mathbb{R}^n)$, $B_a \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n)$, $B_b \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. *La dimension de l'ensemble des fonction* $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *telles que*

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)[u(t)] + f(t) & \text{pour } t \in [a,b], \\ B_a[u(a)] = B_b[u(b)], \end{cases}$$

est égale à la dimension des fonctions $v \in [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *telles que*

$$\begin{cases} v'(t) = -A(t)^*[v(t)] & \text{pour } t \in [a,b], \\ (\alpha|v(a)) = (\beta|v(b)) & \text{pour chaque } \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } B_a[\alpha] + B_b[\beta] = 0 \end{cases}$$

augmenté de $n - \dim(B_a[\mathbb{R}^n] + B_b[\mathbb{R}^n])$.

Dans le cas où $\dim(B_a[\mathbb{R}^n] + B_b[\mathbb{R}^n]) = n$, on dit que les conditions aux limites sont non dégénérées. Notons que cette condition ne fait intervenir que les opérateurs de conditions au limites. Cette condition de non-dégénérescencen n'est malheureusement pas mentionnée explicitement chez certains auteurs.

Notes

On trouvera une discussion générale des équations adjointes et des conditions aux limites adjointes chez C. Lánczos [1].

Références

[1] Cornelius Lanczos, *Linear differential operators*, D. Van Nostrand Co. Ltd., London-Toronto-New York-Princeton, N.J., 1961.

Exercices

Exercice 5.1 Généraliser la proposition 5.3 au cas où on a trois points auxquels on prescrit des conditions.

Exercice 5.2 Soit $A \in C([a,b]; \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n))$. Soient $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ et $v : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ telles que pour $t \in [a,b]$

$$u'(t) = A(t)\bigl[u(t)\bigr]$$

et

$$v'(t) = -A(t)^*\bigl[v(t)\bigr].$$

Prouver que $(u|v)$ est constant sur $[a,b]$.

Exercice 5.3 Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur la fonction continue f (en fonction éventuellement de $\lambda \in \mathbb{R}$) pour que les problèmes suivants aient une solution.

$$\begin{cases} w''(t) + \lambda^2 w(t) = f(t) & \text{pour } t \in [-1, 1], \\ w(1) = w'(1), \\ w(-1) = w'(-1), \end{cases} \tag{a}$$

$$\begin{cases} w''(t) - \lambda^2 w(t) = f(t) & \text{pour } t \in [-1, 1], \\ w(1) = w'(1), \\ w(-1) = -w'(-1), \end{cases} \tag{b}$$

$$\begin{cases} w''(t) + \dfrac{\lambda}{t} w'(t) = f(t) & \text{pour } t \in [1, 2], \\ w'(1) = 0, \\ w'(2) = 0, \end{cases} \tag{c}$$

$$\begin{cases} w''(t) = f(t) & \text{pour } t \in [-1, 1], \\ w'(1) = 0, \\ w'(-1) = 0, \end{cases} \tag{d}$$

$$\begin{cases} w''(t) = f(t) & \text{pour } t \in [-1, 1], \\ w(1) = w'(-1), \\ w(-1) = -w'(1), \end{cases} \tag{e}$$

$$\begin{cases} w''(t) = f(t) & \text{pour } t \in [-1, 1], \\ w(1) = w'(-1), \\ w(-1) = w'(1), \end{cases} \tag{f}$$

6. Problèmes aux limites pour des équations différentielles non linéaires

Matières

6.1. Introduction 135
6.2. Méthode de tir 136
6.3. Méthode des approximations successives 138
6.4. Méthode de monotonie 141
Exercices 145

Prérequis

- ☞ Problèmes aux limites pour les systèmes nonlinéaires : existence, ,méthode des itérations successives , unicité et continuité par rapport à la donnée initiale (chapitre 3)
- ☞ Problèmes aux limites pour des équations différentielle linéaires (chapitre 5)
- ☞ Calcul intégral : théorèmes de convergence monotone et dominée

6.1. Introduction

Nous poursuivons l'étude de problèmes aux limites en étudiant des équations différentielles non linéaires. La théorie des problèmes aux limites non linéaires est doublement délicate : elle traite de problèmes aux limites, dont la théorie linéaire est déjà plus subtile que celle des problèmes de valeur initiale et aussi d'équations non linéaires. Nous devons nous attendre à rencontrer les problèmes de non-existence due à des conditions de compatibilité non satisfaites, ainsi que des problèmes reliés aux solutions de problèmes non linéaires qui explosent en temps fini.

Nous montrerons différents résultats partiels d'existence de solutions pour des problèmes aux limites.

6.2. Méthode de tir

Nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u''(t) = f\big(t, u(t)\big) & \text{si } t \in [a,b], \\ u(a) = 0, \\ u(b) = 0. \end{cases}$$

Une première méthode pour obtenir une solution consiste à choisir la valeur de $u'(a)$ de manière à obtenir une solution du problème posé :

Proposition 6.1 *Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f \in C([a,b] \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$. Si f est localement lispschitzienne en espace et si f est bornée, alors il existe une fonction $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable deux fois telle que*

$$\begin{cases} u''(t) = f\big(t, u(t)\big) & \textit{si } t \in [a,b], \\ u(a) = 0, \\ u(b) = 0. \end{cases}$$

Démonstration. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Nous allons tout d'abord montrer que le problème

$$\begin{cases} u''(t) = f\big(t, u(t)\big) & \text{si } t \in [a,b], \\ u(a) = 0, \\ u'(a) = \theta. \end{cases} \tag{6.1}$$

a une solution. Soit $u : I \to \mathbb{R}$ la courbe intégrale maximale donnée par la proposition 3.6, où I est l'intersection d'un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ avec $[a,b]$: on a

$$\begin{cases} u''(t) = f\big(t, u(t)\big) & \text{si } t \in I, \\ u(a) = 0, \\ u'(a) = \theta, \end{cases}$$

et le graphe de (u, u') est fermé dans $[a,b] \times \mathbb{R}^2$. Nous allons montrer que $I = [a,b]$. Supposons par l'absurde que $I = [a,c[$, avec $c \in [a,b]$, on aurait pour chaque $t \in [a,c[$,

$$u(t) = u(a) + u'(a)(t-a) + \int_a^t (t-s) f\big(s, u(s)\big) \,\mathrm{d}s,$$

et

$$u'(t) = \theta + \int_a^t f\big(s, u(s)\big) \,\mathrm{d}s,$$

d'où, en supposant que f soit bornée par M, pour chaque $t \in [a,c[$,

$$|u(t)| \leq |\theta||c-a| + M\frac{(c-a)^2}{2} \tag{6.2}$$

et

$$|u'(t)| \leq \theta + M(c-a)\ .$$

Si $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de $[a,c[$ convergeant vers c, cette suite est bornée. Et donc, a une sous-suite près, $(u(t_m), u'(t_m))$, converge vers $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}$, ce qui contredit le fait que la graphe de (u, u') soit fermé.

Le problème (6.1) a une solution $u : [a,b] \to \mathbb{R}$. Puisque cette solution est unique par la proposition 3.5, on peut définir $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$ par

$$\Psi(\theta) = u(b),$$

où u est la solution du problème (6.1).

On observe que pour chaque $\theta \in \mathbb{R}$, par (6.2),

$$|\Psi(\theta) - \theta(b-a)| \leq M\frac{(b-a)^2}{2}.$$

On a donc,

$$\Psi(M\tfrac{b-a}{2}) \geq 0$$

et

$$\Psi(-M\tfrac{b-a}{2}) \leq 0.$$

Puisque Ψ est continue (proposition 3.18), on peut appliquer le théorème de la valeur intermédiaire à Ψ, par lequel il existe $\theta_0 \in [-M\frac{b-a}{2}, M\frac{b-a}{2}]$ tel que

$$\Psi(\theta_0) = 0.$$

Par définition de Ψ, la solution $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ de

$$\begin{cases} u''(t) = f\big(t, u(t)\big) & \textbf{si } t \in [a,b], \\ u(a) = 0, \\ u'(a) = \theta_0, \end{cases}$$

est bien une solution du problème posé. □

Comme exemple d'application, on montre que le problème

$$\begin{cases} u''(t) = -\sin(u(t)) + (\sin t)^3 & \textbf{si } t \in [a,b], \\ u(a) = 0, \\ u(b) = 0. \end{cases}$$

a au moins une solution.

6.3. Méthode des approximations successives

Proposition 6.2 *Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f \in C([a,b] \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$. S'il existe $L < \frac{\pi^2}{(b-a)^2}$ tel que pour chaque $t \in [a,b]$ et $x, y \in \mathbb{R}$, on a*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le L|x-y|,$$

alors le problème

$$\begin{cases} u''(t) = f\bigl(t, u(t)\bigr) & \textbf{si } t \in [a,b], \\ u(a) = 0, \\ u(b) = 0, \end{cases}$$

a une solution.

La preuve s'inspire de la preuve de la proposition 3.13. Pour cela nous utiliserons une formule de représentation de solutions pour le problème aux limites :

Proposition 6.3 *Soit $f \in C([a,b], \mathbb{R}$ et $u : [a,b] \to \mathbb{R}$. La fonction u est dérivable deux fois et*

$$\begin{cases} u''(t) = f(t) & \textbf{si } t \in [a,b], \\ u(a) = 0, \\ u(b) = 0. \end{cases}$$

si et seulement si

$$u(t) = \int_a^b G(t,s) f(s) \, \mathrm{d}s,$$

où pour chaque $s, t \in [a,b]$,

$$G(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{(t-a)(b-s)}{b-a} & \textbf{si } t < s, \\ -\dfrac{(s-a)(b-t)}{b-a} & \textbf{si } t \ge s. \end{cases}$$

Démonstration de la proposition 6.2. Nous allons définir une suite de solutions approximatives. Définissons $u_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ pour $t \in [a,b]$ par $u_0(t) = 0$. Supposons que $u_m : [a,b] \to \mathbb{R}$ ait déjà été définie. Nous allons alors poser

$$u_{m+1}(t) = \int_a^b G(t,s) f\bigl(s, u_m(s)\bigr) \, \mathrm{d}s. \tag{6.3}$$

Nous allons montrer que la suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge. Puisque f est continue, on peut trouver $M \in \mathbb{R}$ tel que pour chaque $s \in [a,b]$,

$$|f(s,0)| \le M.$$

On a donc
$$|u_1(t)| \leq M \int_a^b |G(t,s)|\,\mathrm{d}s \leq M\frac{(t-a)(b-t)}{2}.$$
On peut démontrer que pour chaque $r \in [0,1]$,
$$\pi r(1-r) \leq \sin(\pi r).$$
On a donc pour chaque $t \in [a,b]$,
$$|u_1(t)| \leq \frac{M(b-a)^2}{2\pi}\sin\Bigl(\pi\frac{t-a}{b-a}\Bigr).$$
On en déduit que pour chaque $t \in [a,b]$,
$$|u_1(t)-u_0(t)| \leq \frac{M(b-a)^2}{2\pi}\sin\Bigl(\pi\frac{t-a}{b-a}\Bigr).$$
Supposons maintenant que pour chaque $t \in [a,b]$ et pour $m \in \mathbb{N}$, on ait
$$|u_{m+1}(t)-u_m(t)| \leq \frac{M(b-a)^2}{2\pi}\Bigl(\frac{L(b-a)^2}{\pi^2}\Bigr)^m\sin\Bigl(\pi\frac{t-a}{b-a}\Bigr). \tag{6.4}$$
On a alors, par (6.3)
$$u_{m+2}(t)-u_{m+1}(t) = \int_a^b G(t,s)\Bigl(f\bigl(s,u_{m+1}(s)\bigr)-f\bigl(s,u_m(s)\bigr)\Bigr)\,\mathrm{d}s,$$
et donc, par hypothèse sur f
$$|u_{m+2}(t)-u_{m+1}(t)| \leq L\int_a^b |G(t,s)|\,|u_{m+1}(s)-u_m(s)|\,\mathrm{d}s,$$
En notant que
$$\int_a^b |G(t,s)|\sin\Bigl(\pi\frac{s-a}{b-a}\Bigr)\,\mathrm{d}s = \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\sin\Bigl(\pi\frac{t-a}{b-a}\Bigr),$$
et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on en déduit que pour chaque $t \in [a,b]$,
$$|u_{m+2}(t)-u_{m+1}(t)| \leq \frac{M(b-a)^2}{2\pi}\Bigl(\frac{L(b-a)^2}{\pi^2}\Bigr)^{m+1}\sin\Bigl(\pi\frac{t-a}{b-a}\Bigr).$$
Nous avons donc montré par récurrence que pour chaque $t \in [a,b]$ et pour $m \in \mathbb{N}$, on (6.4).

Soient maintenant $k, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $k < \ell$. On a pour chaque $t \in [a, b]$,

$$\begin{aligned}|u_\ell(t) - u_k(t)| &\leq \sum_{i=k}^{\ell-1} |u_{i+1}(t) - u_i(t)| \\ &\leq \sum_{i=k}^{\ell-1} \frac{M(b-a)^2}{2\pi} \Big(\frac{L(b-a)^2}{\pi^2}\Big)^i \sin\Big(\pi \frac{t-a}{b-a}\Big) \\ &\leq \kappa^k \frac{1-\kappa^{\ell-k}}{1-\kappa} \frac{M(b-a)^2}{2\pi} \sin\Big(\pi \frac{t-a}{b-a}\Big).\end{aligned}$$

où nous avons posé

$$\kappa = \frac{L(b-a)^2}{\pi^2}.$$

Puisque $\kappa < 1$ par hypothèse, on a

$$|u_\ell(t) - u_k(t)| \leq \frac{\kappa^k}{1-\kappa} \frac{M(b-a)^2}{2\pi}. \tag{6.5}$$

On peut trouver m_0 tel que si $m_0 \leq k < \ell$, pour chaque $t \in [a, b]$, on a

$$|u_\ell(t) - u_k(t)| \leq \epsilon.$$

La suite $(u_m(t))_{m \in \mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy pour chaque $t \in [a, b]$. Posons $u(t) = \lim_{m\to\infty} u_m(t)$.

Pour conclure, nous voulons montrer que u satisfait l'équation. Pour cela, nous voulons passer à la limite dans (6.3). Nous aurons besoin d'appliquer le théorème de convergence dominée. On remarque tout d'abord que pour chaque $t \in [a, b]$ et $m \in \mathbb{N}$, on a par (6.5)

$$|u_m(t)| = |u_m(t) - u_0(t)| \leq \frac{1}{1-\kappa} \frac{M(b-a)^2}{2\pi}.$$

Puisque f est continue, on peut trouver N telle que si $t \in [a, b]$ et

$$|x| \leq \frac{1}{1-\kappa} \frac{M(b-a)^2}{2\pi},$$

alors

$$|f(t, x)| \leq M.$$

De plus, on a pour chaque $s, t \in [a, b]$,

$$|G(t, s)| \leq \frac{b-a}{4}.$$

Nous avons donc, pour chaque $m \in \mathbb{N}$ et $s, t \in [a, b]$,

$$|f(t, u_m(t))| \leq N \frac{b-a}{4}.$$

Par le théorème de convergence dominée en déduit que la fonction $s \mapsto f(s, u(s))$ est intégrable et que

$$u(t) = \int_a^b G(t,s) f(s, u(s)) \, \mathrm{d}s.$$

Si on considère maintenant une suite $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{m\to\infty} t_m = t$, on a, appliquant encore le théorème de convergence dominée, que

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} u(t_m).$$

Puisque f est continue et u est continue, on en déduit que $s \in [a,b] \mapsto f(s, u(s))$ est continue. Par la proposition 6.3, on en conclut que u est une solution du problème posé. □

Comme exemple d'application, on montre que le problème

$$\begin{cases} u''(t) = \sqrt{1 + u(t)^2} & \textbf{si } t \in [a,b], \\ u(a) = 0, \\ u(b) = 0. \end{cases}$$

a au moins une solution si

$$b - a < \pi \, .$$

Si $[a,b] = [0,\pi]$, le problème n'a pas de solution. En effet, par

$$\int_0^\pi \sin t u(t) \, \mathrm{d}t = -\int_0^\pi \sin t u''(t) \, \mathrm{d}t = -\int_0^\pi \sin t \sqrt{1 + u(t)^2} \, \mathrm{d}t,$$

d'où on déduit que

$$\int_0^\pi \sin t (\sqrt{1 + u(t)^2} + u(t)) \, \mathrm{d}t = 0.$$

Or, on a pour chaque $t \in]0,\pi[$,

$$\sin t (\sqrt{1 + u(t)^2} + u(t)) > 0,$$

ce qui amène une contradiction.

6.4. Méthode de monotonie

Proposition 6.4 *Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f \in C([a,b] \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$. Suppposons que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \leq y$, on a*

$$f(t,x) \geq f(t,y),$$

qu'il existe $\underline{u} : [a,b] \to \mathbb{R}$ *dérivable deux fois telle que*

$$\begin{cases} \underline{u}''(t) \geq f\big(t, \underline{u}(t)\big) & \textit{si } t \in [a,b], \\ \underline{u}(a) \leq 0, \\ \underline{u}(b) \leq 0. \end{cases}$$

qu'il existe $\bar{u} : [a,b] \to \mathbb{R}$ *dérivable deux fois telle que*

$$\begin{cases} \bar{u}''(t) \leq f(t, \bar{u}(t)) & \textit{si } t \in [a,b], \\ \bar{u}(a) \geq 0, \\ \bar{u}(b) \geq 0, \end{cases}$$

et que pour chaque $t \in [a,b]$*,*

$$\underline{u}(t) \leq \bar{u}(t).$$

alors le problème

$$\begin{cases} u''(t) = f\big(t, u(t)\big) & \textit{si } t \in [a,b], \\ u(a) = 0, \\ u(b) = 0. \end{cases}$$

a au moins une solution telle que pour chaque $t \in [a,b]$*,*

$$\underline{u}(t) \leq u(t) \leq \bar{u}(t).$$

Nous utiliserons comme outil la proposition suivante, qui permet d'obtenir une information sur le signe d'une fonction à l'aide d'une information sur le signe de sa dérivée seconde et sont signe aux deux extrémités :

Proposition 6.5 (Principe de positivité) *Soit* $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable deux fois sur* $]a,b[$ *et continue en* a *et en* b*. Si pour chaque* $t \in]a,b[$*,* $u''(t) \geq 0$*,* $u(a) \leq 0$ *et* $u(b) \leq 0$*, alors pour chaque* $t \in]a,b[$*,*

$$u(t) \leq 0.$$

Démonstration. Pour $\epsilon > 0$, on pose

$$u_\epsilon(t) = u + \epsilon\Big(t - \frac{b+a}{2}\Big)^2.$$

Puisque u_ϵ est continue sur $[a,b]$ elle atteint son maximum en un point $t \in [a,b]$. Si $d \in]a,b[$, on devrait avoir $u_\epsilon''(d) \leq 0$. Or, on a $u_\epsilon''(d) \geq 2\epsilon$. Le maximum est donc atteint en $d \in \{a,b\}$. Par hypothèse, on a $u(d) \geq \epsilon$. On en déduit que pour chaque $t \in [a,b]$

$$u(t) \leq u_\epsilon(t) \leq u_\epsilon(t) \leq \epsilon\Big(\frac{b-a}{2}\Big)^2.$$

Puisque $\epsilon > 0$ est arbitraire, on en conclut que pour chaque $t \in]a,b[$,

$$u(t) \leq 0. \qquad \square$$

La preuve est semblable à la preuve de la proposition 6.2, où au lieu d'utiliser le critère de Cauchy, nous allons montrer que nous avons des suites croissantes bornées.

Démonstration de la proposition 6.4. Posons pour $t \in [a, b]$, $u_0(t) = \underline{u}(t)$. Si $u_m : [a, b] \to \mathbb{R}$ est définie, nous pouvons définir

$$u_{m+1}(t) = \int_a^b G(t, s) f\big(t, u_m(t)\big) \, \mathrm{d}t.$$

Remarquons que par la proposition 6.5, u_{m+1} est dérivable deux fois et pour chaque $t \in [a, b]$,

$$u''_{m+1}(t) = f\big(t, u_m(t)\big).$$

Nous allons démontrer par récurrence que pour chaque $t \in [a, b]$ et $m \in \mathbb{N}$,

$$u_{m+1}(t) \geq u_m(t).$$

Tout d'abord, pour $m = 0$, on note que pour $t \in \,]a, b[$,

$$u''_1(t) - u''_0(t) \leq f\big(t, u_0(t)\big) - f\big(t, u_0(t)\big) = 0$$

ainsi que

$$u_1(a) - u_0(a) = -u_0(a) \geq 0$$

et

$$u_1(b) - u_0(b) = -u_0(b) \geq 0.$$

Par la proposition 6.5, on en déduit que pour chaque $t \in [a, b]$,

$$u_0(t) \leq u_1(t).$$

Supposons maintenant que pour $t \in [a, b]$ et $m \in \mathbb{N}$, on ait $u_{m+1}(t) \geq u_m(t)$. On a alors

$$u''_{m+2}(t) - u''_{m+1}(t) = f\big(t, u_{m+1}(t)\big) - f\big(t, u_m(t)\big).$$

Par hypothèse de récurence et par hypothèse de décroissance sur f, on en déduit que

$$u''_{m+2}(t) - u''_{m+1}(t) \leq 0.$$

Puisque $u_{m+2}(a) - u_{m+1}(a) = 0$ et $u_{m+2}(b) - u_{m+1}(b) = 0$, on en déduit par la proposition 6.5 que pour chaque $t \in [a, b]$,

$$u_{m+2}(t) \geq u_{m+1}(t).$$

Nous allons maintenant montrer que pour chaque $t \in [a, b]$ et $m \in \mathbb{N}$,

$$u_m(t) \leq \bar{u}(t).$$

Tout d'abord, on note que par hypothèse, pour chaque $t \in [a, b]$, on a

$$u_0(t) = \underline{u}(t) \leq \bar{u}(t).$$

Supposons qu'on ait pour $m \in \mathbb{N}$ et $t \in [a, b]$, $u_m(t) \leq \bar{u}(t)$. On vérifie que pour chaque $t \in [a, b]$,

$$\bar{u}''(t) - u''_{m+1}(t) \leq f\big(t, \bar{u}(t)\big) - f\big(t, u_m(t)\big).$$

Par hypothèse de décroissance sur f et par notre hypothèse de récurrence, on en déduit que

$$\bar{u}''(t) - u_{m+1}(t) \leq 0.$$

Puisque $\bar{u}(t) - u_{m+1}(t) \geq 0$ et $\bar{u}(t) - u_{m+1}(t) \geq 0$, par la proposition 6.5, on en déduit que pour chaque $t \in [a, b]$,

$$\bar{u}(t) \geq u_{m+1}(t).$$

Pour chaque $t \in [a, b]$, la suite $(u_m(t))_{m \in \mathbb{N}}$ est croissante et bornée par $\bar{u}(t)$. Elle possède donc une limite. Posons

$$u(t) = \lim_{m \to \infty} u_m(t).$$

On note aussi que pour chaque $s, t \in [a, b]$, par hypothèse de croissance sur f

$$G(t, s) f(s, u_m(s)) \leq G(t, s) f\big(s, u_{m+1}(s)\big)$$

et

$$\int_a^b G(t, s) f(s, u_m(s)) \leq \int_a^b G(t, s) f\big(s, \bar{u}(s)\big) \, \mathrm{d}s.$$

Par le théorème de convergence monotone (proposition B.13),

$$\lim_{m \to \infty} \int_a^b G(t, s) f(s, u_m(s)) \, \mathrm{d}s = \int_a^b G(t, s) f\big(s, u(s)\big) \, \mathrm{d}s,$$

Nous avons donc montré que

$$u(t) = \int_a^b G(t, s) f(s, u(s)) \, \mathrm{d}s.$$

On montre enfin comme dans la proposition 6.2 que u est bien une solution du problème posé. □

Comme exemple d'application, on montre que le problème

$$\begin{cases} u''(t) = u(t)^2 - 1 & \text{si } t \in [a, b], \\ u(a) = 0, \\ u(b) = 0. \end{cases}$$

a au moins une solution. On prend $\underline{u}(t) = -1$ et $\bar{u}(t) = -1$ pour chaque $t \in [a, b]$.

Exercices

Exercice 6.1 Soit $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue en a et en b et dérivable deux fois sur $]a, b[$. Montrer que si pour chaque $t \in \,]a, b[$

$$u''(t) \geq u(t)$$

et si $u'(a) \geq 0$ et $u'(b) \leq 0$, alors pour chaque $t \in \,]a, b[$,

$$u(t) \leq 0.$$

A. Éléments d'algèbre linéaire

Matières

A.1. Norme d'applications linéaires 147
A.2. Vecteurs propres généralisées 150
A.3. Opérateur adjoint 152
A.4. Spectre d'un opérateur autoadjoint 153
A.5. Trace 154
A.6. Déterminant 156
A.6.1. Déterminant de n vecteurs 158

A.1. Norme d'applications linéaires

Soit $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. La norme de A est définie par

$$\|A\| = \sup\bigl\{\|A[v]\| \mid v \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|v\| \leq 1\bigr\}.$$

On vérifie que la norme de toute application linéaire est finie :

Proposition A.1 *Soit $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, alors, pour tout $v \in \mathbb{R}^m$,*

$$\|L(v)\| \leq \Bigl(\sum_{i=1}^n \|A[e_i]\|^2\Bigr)^{\frac{1}{2}} \|v\|.$$

Démonstration. Si $e_1, \dots, e_n$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, on a

$$v = \sum_{i=1}^n (e_i|v) e_i,$$

et donc, puisque A est linéaire,

$$A[v] = \sum_{i=1}^n (e_i|v) A[e_i].$$

On a donc

$$\|A[v]\|^2 = \sum_{i=1}^n (e_i|v)(A[e_i]|A[v]).$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\|A[v]\|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |(e_i|v)| \|A[e_i]\| \|A[v]\|.$$

En appliquant encore l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\begin{aligned}
\|A(v)\|^2 &\leq \Big(\sum_{j=1}^{n} |(e_j|v)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k=1}^{n} \|A[e_k]\|^2 \|A[v]\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \Big(\sum_{j=1}^{n} |(e_j|v)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k=1}^{n} \|A(e_i)\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \|A[v]\|.
\end{aligned}$$

ce qui donne l'inégalité désirée si $A[v] \neq 0$. Si $A[v] = 0$, l'inégalité qu'on voulait démontrer est trivialement satisfaite. $\square$

La norme d'opérateur peut être caractérisée d'autres manières.

Proposition A.2 (Caractérisation de la norme d'applications linéaires) *Soit* $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$*. Alors, pour tout* $v \in \mathbb{R}^n$*,*

$$\|A[v]\| \leq \|A\| \|v\|.$$

De plus, si $n \geq 1$*, on a*

$$\begin{aligned}
\|A\| &= \sup\big\{\|A[v]\| \mid v \in \mathbb{R}^n \textit{ et } \|v\| = 1\big\} \\
&= \sup\Big\{\frac{\|A[v]\|}{\|v\|} \mid v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\Big\}.
\end{aligned}$$

Démonstration. L'inégalité est vérifiée imédiatement si $v = 0$. Si $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, définissons $w = v/\|v\|$. On a alors $\|w\| = 1$ et donc par définition de norme,

$$\|A[w]\| \leq \|A\|.$$

On a donc, par linéarité de l'application A et par homogénéité de la norme

$$\|A[v]\| = \|A[\|v\|w]\| = \|\|v\|A[w]\| = \|v\|\|A[w]\| \leq \|A\|\|v\|.$$

Ce raisonnement démontre que

$$\sup\big\{\|A[w]\| \mid w \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|w\| = 1\big\} = \sup\Big\{\frac{\|A[v]\|}{\|v\|} \mid v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\Big\}.$$

Il nous reste à démontrer que ces quantités sont égales à la norme $\|A\|$. Pour cela, on commence par remarquer immédiatement que, par définition de $\|A\|$ et par la monotonie du suprémum par rapport à l'inclusion,

$$\sup\big\{\|A[w]\| \mid w \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|w\| = 1\big\} \leq \|A\|.$$

D'autre part

$$\sup\Big\{\frac{\|A[v]\|}{\|v\|} \mid v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\} \geq \sup\Big\{\|A[v]\| \mid v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ et } \|v\| \leq 1\}$$
$$= \sup\Big\{\|A[v]\| \mid v \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|v\| \leq 1\Big\} = \|A\|,$$

et la conclusion suit. □

La norme d'opérateur a les propriétés d'une norme.

Proposition A.3 *(i) Pour chaque* $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$*,* $\|A\| \geq 0$*.*

(ii) Pour tout $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$*, si* $\|A\| = 0$ *alors* $A = 0$*.*

(iii) Pour tout $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ *et pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$*,* $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$*.*

(iv) Pour tout $A, B \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$*,* $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$*.*

Démonstration. Pour (i), puisque $0 \in \mathbb{R}^n$ et $\|0\| = 0 \leq 1$, il est clair que $\|A\| = 0$.

Pour (ii), si $\|A\| = 0$, alors par la proposition A.2 pour tout $v \in \mathbb{R}^n$

$$\|A[v]\| \leq \|A\|\|v\| = 0$$

et donc $A[v] = 0$, c'est-à-dire $A = 0$.

Pour (iii), on observe que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\|(\lambda A)[v]\| = \|\lambda A[v]\| = |\lambda|\|A[v]\|,$$

et la formule suit de la définition de la norme d'application linéaire.

Pour (iv) enfin, on observe que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|v\| \leq 1$, on a par l'inégalité triangulaire et la définition de la norme d'application linéaire,

$$\|(A + B)[v]\| = \|A[v] + B[v]\| \leq \|A[v]\| + \|B[v]\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

On en déduit l'inégalité désirée en prenant le supremum. □

Proposition A.4 *Si* $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *et* $B \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$*, on a*

$$\|B \circ A\| \leq \|B\|\|A\|.$$

Démonstration. Soit $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|v\| \leq 1$. On a, par la proposition A.2,

$$\|(B \circ A)[v]\| = \|B[A[v]]\| \leq \|B\|\|A[v]\| \leq \|B\|\|A\|,$$

On en déduit l'inégalité désirée en prenant le suprémum. □

On en déduit en particulier par récurrence que si $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, alors pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k.$$

A.2. Vecteurs propres généralisées

Soit $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{C}^n)$. Le nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A si $\ker(A-\lambda\,\mathrm{id}) \neq \{0\}$. L'ensemble des valeurs propres de A est le *spectre* de A

$$\operatorname{spec} A = \bigl\{\lambda \in C \mid \ker(A-\lambda\,\mathrm{id}) \neq \{0\}\bigr\}.$$

Proposition A.5 (Existence d'une valeur propre et d'un vecteur propre) *Pour tout* $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{C}^n)$, $\operatorname{spec} A \neq \emptyset$*.*

Cette proposition est fausse si on considère des opérateurs sur le corps des réels et des valeurs propres réelles. Par exemple l'opérateur défini par la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ n'a pas de valeur propre *réelle*. (Ses valeurs propres complexes sont $\imath$ et $-\imath$.)

Le vecteur $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ est un vecteur propre généralisé de $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{C}^n)$ si on peut trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $v \in \ker(A-\lambda\,\mathrm{id})^k$.

Proposition A.6 *Soit* $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{C}^n)$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$*. Il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $\ell \geq k$*,*

$$\ker(A-\lambda\,\mathrm{id})^\ell = \ker(A-\lambda\,\mathrm{id})^k.$$

Démonstration. On note que pour chaque $k \in \mathbb{N}$,

$$\ker(A-\lambda\,\mathrm{id})^k \subseteq \ker(A-\lambda\,\mathrm{id})^{k+1}.$$

On a donc

$$\dim\ker(A-\lambda\,\mathrm{id})^k \leq \dim\ker(A-\lambda\,\mathrm{id})^{k+1}.$$

De plus, pour chaque $k \in \mathbb{N}$,

$$\dim\ker(A-\lambda\,\mathrm{id})^k \leq n.$$

Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que pour chaque $\ell \geq k$,

$$\dim\ker(A-\lambda\,\mathrm{id})^\ell = \dim\ker(A-\lambda\,\mathrm{id})^k.$$

Puisque

$$\ker(A-\lambda\,\mathrm{id})^\ell \supseteq \ker(A-\lambda\,\mathrm{id})^k,$$

on obtient la conclusion. □

Proposition A.7 *Soit* $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{C}^n)$*. Il existe* $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ *et* $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ *tel que les espaces* $\ker(A-\lambda_i\,\mathrm{id})^{k_i}$ *engendrent* $\mathbb{C}^n$*.*

Démonstration. Nous allons prouver cette propriété par induction sur n. Supposons-la démontrée pour toutes les dimensions strictement inférieures à n. Par la proposition A.5, il existe $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ tel que $\ker(A - \lambda_1 \operatorname{id}) \neq \{0\}$. Par la proposition A.6, il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $\ell \geq k$, $\ker(A - \lambda_1 \operatorname{id})^\ell = \ker(A - \lambda_1 \operatorname{id})^k$. Nous allons montrer que

$$\mathbb{C}^n = \ker(A - \lambda_1 \operatorname{id})^{k_1} \oplus (A - \lambda_1 \operatorname{id})^{k_1}[\mathbb{C}^n]. \tag{A.1}$$

Supposons que $v \in \ker(A - \lambda_1 \operatorname{id})^{k_1} \cap (A - \lambda_1 \operatorname{id})^{k_1}[\mathbb{C}^n]$. Puisque $v \in (A - \lambda_1 \operatorname{id})^{k_1}[\mathbb{C}^n]$, il existe donc $w \in \mathbb{C}^n$ tel que $v = (A - \lambda_1 \operatorname{id})^{k_1}[w]$. D'autre part, comme $v \in \ker(A - \lambda_1 \operatorname{id})^{k_1}$

$$(A - \lambda_1 \operatorname{id})^{k_1+k_1}[w] = (A - \lambda_1 \operatorname{id})^{k_1}[v] = 0,$$

d'où $w \in \ker(A - \lambda_1 \operatorname{id})^{k_1+k_1} = \ker(A - \lambda_1 \operatorname{id})^{k_1}$. On en conclut que $v = 0$. Nous avons donc montré que $\ker(A - \lambda_1 \operatorname{id})^{k_1} \cap (A - \lambda_1 \operatorname{id})^{k_1}[\mathbb{C}^n] = \{0\}$. Puisque $\dim \ker(A - \lambda_1 \operatorname{id})^{k_1} + \dim(A - \lambda_1 \operatorname{id})^{k_1}[\mathbb{C}^n] = n$, ceci montre (A.1).

Soit maintenant $v \in (A - \lambda_1 \operatorname{id})^{k_1}[\mathbb{C}^n]$. Par définition, il existe $w \in \mathbb{C}^n$ tel que $v = (A - \lambda_1 \operatorname{id})^{k_1}[w]$. On a alors $A[v] = A\big[(A - \lambda_1 \operatorname{id})^{k_1}[w]\big] = (A - \lambda_1 \operatorname{id})^{k_1}\big[A[w]\big] \in (A - \lambda_1 \operatorname{id})^{k_1}[\mathbb{C}^n]$. Puisque λ_1 est une valeur propre, $\dim(A - \lambda_1)^{k_1}[\mathbb{C}^n] < n$. Par hypothèse de récurrence, il existe $\lambda_2, \dots, \lambda_m$ et $k_1, \dots, k_n$ tel que $(A - \lambda_1)^{k_1}[\mathbb{C}^n]$ est engendré par $\ker(A - \lambda_i)^{k_i} \cap (A - \lambda_1)^{k_1}[\mathbb{C}^n]$ pour $i \in \{2, \dots, m\}$. On en conclut que $\mathbb{C}^n$ est engrendré par $\ker(A - \lambda_i)^{k_i}$ pour $i \in \{1, \dots, m\}$. $\square$

Proposition A.8 *Soit* $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{C}^n)$*, soit* $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ *et* $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$*. Si pour tout* $i, j \in \{1, \dots, m\}$ *avec* $i \neq j$*,* $\lambda_i \neq \lambda_j$*, alors les espaces* $\ker(A - \lambda_i \operatorname{id})^{k_i}$ *sont en somme directe.*

Démonstration. Nous allons démontrer cette proposition par induction sur $\sum_{i=1}^m k_i$. Remarquons tout d'abord que si $\sum_{i=1}^m k_i = 0$, pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$, $k_i = 0$ et $\ker(A - \lambda_i \operatorname{id})^{k_i} = \ker \operatorname{id} = \{0\}$. La proposition est donc démontrée dans ce cas.

Supposons que nous ayons $v_i \in \ker(A - \lambda_i \operatorname{id})^{k_i}$ tels que $\sum_{i=1}^m v_i = 0$. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $k_i > 0$ pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$. Puisque $\sum_{i=1}^m v_i = 0$, on a

$$\sum_{i=1}^m (A - \lambda_1 \operatorname{id})[v_i] = 0.$$

On note que $(A - \lambda_1 \operatorname{id})[v_1] \in \ker(A - \lambda_1 \operatorname{id})^{k_1 - 1}$ et $(A - \lambda_1 \operatorname{id})[v_i] \in \ker(A - \lambda_i \operatorname{id})^{k_i}$. Par hypothèse de récurrence, on a pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$, $(A - \lambda_1 \operatorname{id})[v_i] = 0$. On en déduit que $v_1 \in (\ker(A - \lambda_1 \operatorname{id})$ et $v_i = (\lambda_1 - \lambda_i)^{-1}(A - \lambda_i \operatorname{id})[v_i] \in \ker(A - \lambda_i)^{k_i - 1}$. Par hypothèse de récurrence, on en conclut que $v_1 = \dots = v_m = 0$. $\square$

Proposition A.9 *Soit* $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$*,* $\lambda \in \mathbb{C}$ *et* $k \in \mathbb{N}$*. On a*

$$\dim \ker(A - \lambda \operatorname{id})^{k+2} - \dim \ker(A - \lambda \operatorname{id})^{k+1} \leq \dim \ker(A - \lambda \operatorname{id})^{k+1} - \dim \ker(A - \lambda \operatorname{id})^k$$

Démonstration. Soit $V \subset \ker(A - \lambda\,\mathrm{id})^{k+1}$ tel que

$$\ker(A - \lambda\,\mathrm{id})^{k+2} = V \oplus \ker(A - \lambda\,\mathrm{id})^{k+1}.$$

On a en particulier,

$$\dim V = \dim\ker(A - \lambda\,\mathrm{id})^{k+2} - \dim\ker(A - \lambda\,\mathrm{id})^{k+1}.$$

Il est clair que $(A-\lambda\,\mathrm{id})$ est injectif sur V. De plus, si $(A-\lambda\,\mathrm{id})[v] \in \ker(A-\lambda\,\mathrm{id})^k$, on a on a $v \in \ker(A - \lambda\,\mathrm{id})^{k+1}$ et donc $v = 0$. Les sous-espaces de $\ker(A - \lambda\,\mathrm{id})^{k+1}$ $(A - \lambda\,\mathrm{id})[V]$ et $\ker(A - \lambda\,\mathrm{id})^k$ sont linéairement indépendants et on conclut que

$$\dim\ker(A - \lambda\,\mathrm{id})^{k+1} \geq \dim V + \dim\ker(A - \lambda\,\mathrm{id})^k,$$

ce qui donne la conclusion désirée. □

Corollaire A.10 *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et $k \geq n$*

$$\ker(A - \lambda\,\mathrm{id})^k = \ker(A - \lambda\,\mathrm{id})^n.$$

Démonstration. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(A - \lambda\,\mathrm{id})^{k+1} \neq \ker(A - \lambda\,\mathrm{id})^k$. On a alors pour tout $j \in \{0, \dots, k\}$,

$$\dim\ker(A - \lambda\,\mathrm{id})^{j+1} - \dim\ker(A - \lambda\,\mathrm{id})^j \geq 1.$$

En additionnant, on obtient

$$\dim\ker(A - \lambda\,\mathrm{id})^{k+1} \geq (k+1)(\dim\ker(A - \lambda\,\mathrm{id})^{k+1} - \dim\ker(A - \lambda\,\mathrm{id})^k).$$

Si $k \geq n$, on arrive à une contradiction. □

A.3. Opérateur adjoint

Définition A.1 *Soit $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. L'adjoint de A est l'opérateur A^* telle que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ et $w \in \mathbb{R}^p$,*

$$(A^*[w]|v) = (w|A[v]).$$

On remarque que $(A^*)^* = A$, de plus les noyaux et images d'une application et de son adjointe sont reliées par des relations de perpendicularité.

Proposition A.11 *Soit $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. On a*

$$(\ker A)^\perp = A^*[\mathbb{R}^p]$$

et

$$A[\mathbb{R}^n] = (\ker A^*)^\perp.$$

On en déduit notamment qu'une application linéaire est injective si et seulement si son adjointe est surjective.

A.4. Spectre d'un opérateur autoadjoint

Proposition A.12 *Soit* $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$*. Si pour tout* $v, w \in \mathbb{R}^n$*,*

$$(w|A[v]) = (A[w]|v),$$

alors il existe $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^n$ *et* $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *tels que pour chaque* $i, j \in \{1, \dots, n\}$*,*

$$(q_i|q_j) = \delta_{ij}$$

et pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$

$$A[q_i] = \lambda_i q_i.$$

Une conséquence importante de cette proposition est qu'on peut écrire

$$v = \sum_{i=1}^{n} (q_i|v) q_i$$

et donc

$$A[v] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (q_i|v) q_i.$$

Si Q désigne la matrice de changement de base de la base $q_1, \dots, q_n$ vers la base canonique, on a

$$\mathrm{QAQ}^t = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

où Λ est une matrice diagonale.

Démonstration. Supposons que nous ayons déjà défini pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$ $q_1, \dots, q_{k-1}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ tels que pour $i \in \{1, \dots, k\}$, $A[q_i] = \lambda_i q_i$ et pour $i, j \in \{1, \dots, k-1\}$, $(q_i|q_j) = \delta_{ij}$. Posons

$$S^k = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\|^2 = 1 \text{ et pour chaque } i \in \{1, \dots, k\} \ (q_i|v) = 0\}.$$

Définissons $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pour $v \in \mathbb{R}^n$ par $f(v) = (v|Av)$. Puisque S^k est compact, par le théorème des bornes atteintes, il existe $q_k \in S^k$ tel que pour tout $v \in S^k$,

$$f(v) \geq f(q_k).$$

et posons $\lambda_k = f(q_k)$. On a immédiatement que $(q_i|q_k) = \delta_{ik}$ pour $i \in \{1, \dots, k\}$. Nous allons maintenant calculer $A[q_k]$. Notons tout d'abord que pour chaque $i \in \{1, \dots, k-1\}$,

$$(q_i|A[q_k]) = (A[q_i]|q_k) = \lambda_i (q_i|q_k) = 0.$$

On a donc que pour chaque $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t|\|A[q_k]\| \leq 1$, posons

$$g(t) = \frac{q_k + tA[q_k]}{\|q_k + tA[q_k]\|}$$

On a $g(t) \in S^k$ et pour chaque t in $\mathbb{R}^n$,

$$f(g(t)) \geq f(0).$$

On calcule que

$$f(g(t)) = \frac{\lambda_k + t\|A[q_k]\|^2}{\sqrt{1 + 2t\lambda_k + t^2\|A[q_k]\|^2}},$$

On voit dont que $f \circ g$ est dérivable en 0 et que

$$(f \circ g)'(0) = \|A[q_k]\|^2 - \lambda_k.$$

Finalement, on en déduit que

$$\|A[q_k] - \lambda_k q_k\|^2 = \|A[q_k]\|^2 - 2\lambda_k^2 + \lambda_k^2 = 0. \qquad \square$$

A.5. Trace

Définition A.2 *Soit $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ une application linéaire et soit $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soient $\alpha_i^j \in \mathbb{R}^n$ avec $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$,*

$$A[e_i] = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j e_j.$$

La trace dans v est

$$\mathrm{tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^i.$$

On a les propriétés élémentaires suivantes : $\mathrm{tr}\,\mathrm{id} = n$, si $A, B \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, alors $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}\, A + \mathrm{tr}\, B$ et si $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda\, \mathrm{tr}\, A$.

Proposition A.13 *Soit $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ et $B \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Alors*

$$\mathrm{tr}(A \circ B) = \mathrm{tr}(B \circ A).$$

Démonstration. Soit $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $f_1, \dots, f_m$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$. Supposons qu'on ait pour $i \in \{1, \dots, n\}$

$$A[e_i] = \sum_{j=1}^{m} \alpha_i^j f_j.$$

et pour $j \in \{1, \dots, m\}$

$$B[f_j] = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^j e_i.$$

On a alors pour $j \in \{1, \dots, m\}$

$$(A \circ B)[f_i] = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \beta_i^k \alpha_k^j f_j$$

et pour $i \in \{1, \dots, n\}$

$$(B \circ A)[e_i] = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \alpha_i^k \beta_k^j e_j$$

On a donc

$$\operatorname{tr}(A \circ B) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \beta_j^k \alpha_k^j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \alpha_j^k \beta_k^j = \operatorname{tr}(B \circ A).$$

□

Proposition A.14 *Soit $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ une application linéaire et soit $v_1, \dots, v_n$ une base de $\mathbb{R}^n$. Soient $\alpha_i^j \in \mathbb{R}^n$ avec $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$,*

$$A[v_i] = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j v_j.$$

On a alors

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^i.$$

Démonstration. Soit $T \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ l'application linéaire telle que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$T[e_i] = v_i.$$

On alors

$$A\big[T[e_i]\big] = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j T[e_j],$$

et donc

$$\operatorname{tr}\big(T^{-1} \circ A \circ T\big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^i.$$

Par la proposition A.13, on a

$$\operatorname{tr}\big(T^{-1} \circ A \circ T\big) = \operatorname{tr}\big(T \circ T^{-1} \circ A\big) = \operatorname{tr} A.$$ □

A.6. Déterminant

Définition A.3 *L'application $\omega : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ est une forme n–linéaire alternée si*

— *pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ et $y_i \in \mathbb{R}^n$,*

$$\omega(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + y_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \omega(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ + \omega(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

— *pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\omega(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \lambda\omega(x_1, \dots, x_n),$$

— *pour chaque $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$, s'il existe $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$ et $x_i = x_j$, alors*

$$\omega(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

On montre que si $\omega : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ est une forme n–linéaire alternée, alors ω est antisymétrique : pour chaque $i, j \in \{1, \dots, n\}$ avec $i < j$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$,

$$\omega(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n) = -\omega(x_1, \dots, x_n).$$

On montre que si $x_1, \dots, x_n$ sont linéairement dépendants et $\omega : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ est une forme n–linéaire alternée, alors

$$\omega(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

On a la proposition

Proposition A.15 *Si $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ sont linéairement indépendants, il existe une forme n–linéaire alternée $\omega : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\omega(x_1, \dots, x_n) = 1.$$

On a aussi la proposition

Proposition A.16 *Soient $\omega : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ et $\eta : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ des formes n–linéaires alternées. Si $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ et $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}^n$,*

$$\omega(x_1, \dots, x_n)\eta(y_1, \dots, y_n) = \eta(x_1, \dots, x_n)\omega(y_1, \dots, y_n).$$

Une conséquence importante de cette proposition est que si $\eta(y_1, \dots, y_n) \neq 0$, on peut écrire pour chaque $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$

$$\omega(x_1, \dots, x_n) = \frac{\omega(y_1, \dots, y_n)}{\eta(y_1, \dots, y_n)}\eta(x_1, \dots, x_n),$$

ou encore

$$\omega = \frac{\omega(y_1, \dots, y_n)}{\eta(y_1, \dots, y_n)}\eta,$$

c'est-à-dire que ω est un multiple de η.

On remarque que si $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$ est un opérateur linéaire et $\omega : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ est une forme n–linéaire alternée, l'application

$$(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^n)^n \mapsto \omega(A[x_1], \ldots, A[x_n])$$

est une forme n–linéaire alternée.

On pose

Définition A.4 *Soit $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$. Le* déterminant *de A est l'unique nombre réel $\det A$ tel que pour chaque forme n–linéaire alternée $\omega : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$\omega(A[x_1], \ldots, A[x_n]) = \det A \omega(x_1, \ldots, x_n).$$

On démontre

Proposition A.17 *Pour tout $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$ et $B \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$\det(A \circ B) = \det A \det B.$$

Proposition A.18 *Si pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$, $\|Ax\| = \|x\|$, alors*

$$|\det A| = 1.$$

Proposition A.19 *Une application $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$ est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. De plus,*

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}.$$

Proposition A.20 *Si*

$$\mathbb{C}^n = \ker(A - \lambda_1 \operatorname{id})^{k_1} \oplus \cdots \ker(A - \lambda_m)^{k_m},$$

alors

$$\det(A - \lambda \operatorname{id}) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda_i - \lambda)^{\ell_i},$$

où

$$\ell_i = \dim \ker(A - \lambda_i \operatorname{id})^{k_i}.$$

Démonstration. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, m\}$, on construit une base $v_1^i, \ldots, v_{\ell_i}^i$ de $\ker(A - \lambda_i \operatorname{id})^{k_i}$, en prenant une base de $\ker(A - \lambda_i)$, que l'on complète en une base de $\ker(A - \lambda_i)^2$, et ainsi de suite jusqu'à obtenir une base de $\ker(A - \lambda_i)^{k_i}$. On observe que pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, \ell_i\}$ on peut trouver $\alpha_{j,r}^i \in \mathbb{C}^n$ tels que

$$A[v_j^i] = \lambda_i v_j^i + \sum_{r=1}^{j-1} \alpha_{j,r}^i v_r^i.$$

On en déduit que

$$\det((A - \lambda \operatorname{id})[v_1^1], \ldots, (A - \lambda \operatorname{id})[v_{\ell_1}^1], (A - \lambda \operatorname{id})[v_1^2], \ldots, (A - \lambda \operatorname{id})[v_{\ell_m}^m]) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda_i - \lambda)^{\ell_i}.$$

□

A.6.1. Déterminant de n vecteurs

Définition A.5 *Le déterminant (sur $\mathbb{R}^n$) est l'unique forme n–linéaire alternée* $\det : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ *telle que*

$$\det(e_1, \ldots, e_n) = 1,$$

où $e_1, \ldots, e_n$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Le déterminant défini à l'aide d'une base orthormée satisfait des inégalités avec cette norme.

Proposition A.21 *Pour tout $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$|\det(x_1, \ldots, x_n)| \leq \|x_1\| \cdots \|x_n\|.$$

Notes

L'approche pour la théorie spectrale des opérateurs est inspirée de S. Axler [1, 2].

Références

[1] Sheldon Axler, *Down with determinants !*, Amer. Math. Monthly **102** (1995), no. 2, 139–154.

[2] ______, *Linear algebra done right*, 2nd ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1997.

B. Éléments d'analyse

Matières

B.1. Intervalles 159
B.2. Topologie et convergence dans l'espace euclidien 159
B.2.1. Définition de convergence 159
B.2.2. Critère de Cauchy 160
B.2.3. Convergence de série 160
B.2.4. Propriété de Bolzano–Weierstraß 161
B.2.5. Ensembles compacts 161
B.2.6. Topologie de l'espace euclidien 162
B.3. Inégalité des accroissements finis 162
B.4. Intégrale de fonctions vectorielles sur un intervalle 163
B.4.1. Inégalité triangulaire pour l'intégrale 163
B.4.2. Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral . 163
B.4.3. Formule intégrale du reste du développement de Taylor . 163
B.4.4. Propriétés de l'intégrale indéfinie 164
B.4.5. Théorèmes de convergences dominée et monotone 165

B.1. Intervalles

Définition B.1 *L'ensemble $I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle si pour tout $s, t \in I$ et $r \in \mathbb{R}$, si $s \le r \le t$, alors $r \in I$.*

Tout intervalle s'écrit comme $]a, b[$, $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$, $]-\infty, b]$, $]-\infty, b[$, $[a, \infty[$, $]a, \infty$, $\mathbb{R}$, $\emptyset$ et $\{a\}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.

B.2. Topologie et convergence dans l'espace euclidien

B.2.1. Définition de convergence

Définition B.2 *Soit $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. La suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in \mathbb{R}^n$ si pour chaque $\epsilon > 0$, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que pour chaque $m \in \mathbb{N}$, si $m \ge N$, alors*

$$\|x_m - x\| \le \epsilon.$$

B.2.2. Critère de Cauchy

Le critère de Cauchy pour la convergence d'une suite est le suivant :

Proposition B.1 *Soit $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. La suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si pour chaque $\epsilon > 0$, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que pour chaque $k, \ell \in \mathbb{N}$, si $k > \ell \geq N$, alors*

$$\|x_k - x_\ell\| \leq \epsilon.$$

B.2.3. Convergence de série

Définition B.3 *Soit $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. La série de terme $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge (ou la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est sommable) si la suite $(\sum_{m=0}^{k} x_m)_{k\in\mathbb{N}}$ converge. On note*

$$\sum_{m=0}^{\infty} x_m = \lim_{k\to\infty} \sum_{m=0}^{k} x_m.$$

Proposition B.2 (Sommabilité d'une suite de vecteurs par comparaison) *Soit $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Si pour chaque $m \in \mathbb{N}$,*

$$\|x_m\| \leq u_m$$

et que la suite $(\sum_{m=0}^{k} u_m)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$, alors la suite $(\sum_{m=0}^{k} x_m)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}^n$ et

$$\Big\| \lim_{k\to\infty} \sum_{m=0}^{k} x_m \Big\| \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{m=0}^{k} u_m.$$

Démonstration. Soit $k, \ell \in \mathbb{N}$ avec $\ell > k$. On a

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{m=0}^{\ell} x_m - \sum_{m=0}^{k} x_m \Big\| &= \Big\| \sum_{m=k+1}^{\ell} x_m \Big\| \\
&\leq \sum_{m=k+1}^{\ell} \|x_m\| \\
&\leq \sum_{m=k+1}^{\ell} u_m \\
&\leq \sum_{m=0}^{\ell} u_m - \sum_{m=0}^{k} u_m.
\end{aligned}$$

Puisque la suite $(\sum_{m=0}^{k} u_m)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, par le critère de Cauchy, pour chaque $\epsilon > 0$, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que si $k \geq N$,

$$\Big| \sum_{m=0}^{\ell} u_m - \sum_{m=0}^{k} u_m \Big| \leq \epsilon.$$

On a alors par l'inégalité précédente,

$$\Big\| \sum_{m=0}^{\ell} x_m - \sum_{m=0}^{k} x_m \Big\| \le \epsilon,$$

ce qui prouve la convergence.

Pour l'inégalité, on passe à la limite sur l'inégalité

$$\Big\| \sum_{m=0}^{k} x_m \Big\| \le \sum_{m=0}^{k} \|x_m\| \le \sum_{m=0}^{k} u_m. \qquad \square$$

B.2.4. Propriété de Bolzano–Weierstraß

Définition B.4 *Soit $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. La suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est bornée si on peut trouver $M \in [0, \infty[$ tel que pour chaque $m \in \mathbb{N}$,*

$$\|x_m\| \le M.$$

La propriété de Bolzano-Weierstraß permet d'extraire une suite convergente de toute suite bornée de $\mathbb{R}^n$.

Proposition B.3 *Soit $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Si $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors on peut trouver une sous-suite $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge.*

B.2.5. Ensembles compacts

Définition B.5 *L'ensemble $K \subset \mathbb{R}^m$ est* compact *si toute suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que $u_m \in K$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ admet une sous-suite $(u_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément de K.*

Théorème B.4 (Théorème des bornes atteintes) *Soient $K \subset \mathbb{R}^m$ et $f \colon A \to \mathbb{R}$. Si K est compact et non vide et si f est continue, alors il existe $a \in K$ et $b \in K$ tels que pour tout $x \in A$,*

$$f(a) \le f(x) \le f(b).$$

Démonstration. Par définition d'infimum, pour tout $m \in \mathbb{N}_*$, il existe $x_n \in K$ tel que

$$f(x_n) \le \inf f(K) + \frac{1}{m}.$$

Puisque A est compact, la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $a \in K$. Par continuité de f, on a $f(a) = \lim_{k\to\infty} f(x_{m_k})$. D'autre part, puisque

$$\inf f(K) \le f(x_{m_k}) \le \inf f(K) + \frac{1}{n_k}.$$

par la propriété de l'étau pour les suites réelles,
$lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \inf f(K)$. La preuve de l'existence de b est semblable. $\square$

B.2.6. Topologie de l'espace euclidien

Définition B.6 *Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $\rho > 0$. La boule ouverte de centre x et de rayon ρ est l'ensemble*

$$B(x,\rho) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < \rho\}.$$

Définition B.7 *Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $\rho > 0$. La boule fermée de centre x et de rayon ρ est l'ensemble*

$$B[x,\rho] = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| \leq \rho\}.$$

Définition B.8 *L'ensemble $U \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert si pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que $B(0,\delta) \subset U$.*

Définition B.9 *Un point $a \in \mathbb{R}^n$ est un point frontière d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ si pour tout $\varepsilon > 0$, $B[a,\varepsilon] \cap A \neq \emptyset$ et $B[a,\varepsilon] \setminus A \neq \emptyset$.*

De manière équivalente, un point est un point frontière de A s'il est à la fois la limite d'une suite de points de A et d'une suite de points de $\mathbb{R}^n \setminus A$. L'ensemble des points frontières est noté ∂A.

La frontière est toujours un ensemble fermé. Elle peut être vide : $\partial\emptyset = \partial\mathbb{R}^n = \emptyset$. Elle peut être l'espace tout entier : $\partial\mathbb{Q}^n = \mathbb{R}^n$.

B.3. Inégalité des accroissements finis

Proposition B.5 (Inégalité des accroissements finis) *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$ et $f : I \to \mathbb{R}^n$. Si f est continue en a et en b et si f est dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in\ ]a,b[$ tel que*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(c)\||b - a|.$$

Démonstration. On définit la fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ pour $x \in [a,b]$ par

$$g(x) = (f(b) - f(a)|f(x)).$$

Par l'inégalité des accroissements finis, il existe $c \in\ ]a,b[$ tel que

$$g(b) - g(a) = g'(c)(b - a).$$

À l'aide de la définition de g, on calcule

$$\|f(b) - f(a)\|^2 = (f(b) - f(a)|f'(c))(b - a).$$

Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on conclut que

$$\|f(b) - f(a)\|^2 \leq \|f(b) - f(a)\|\|f'(c)\||b - a|,$$

d'où on conclut. □

B.4. Intégrale de fonctions vectorielles sur un intervalle

Nous utiliserons l'intégrale de Lebesgue pour une fonction à valeurs vectorielle, en suivant la définition d'E. McShane [1] :

Définition B.10 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}^n$. La fonction f est intégrable s'il existe $S \in \mathbb{R}$ tel que pour chaque $\epsilon > 0$, on peut trouver une fonction $\delta : I \to]0, \infty[$ et $J \subset I$ un intervalle compact tel que pour chaque $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$, $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ et $c_1, \dots, c_m \in I$ tels que pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$, $c_i - \delta(c_i) \le a_i \le b_i \le c_i + \delta(c_i)$ et pour chaque $i \in \{1, \dots, m-1\}$, $b_i \le a_{i+1}$, on a*

$$\Big|\sum_{i=1}^{m} (b_i - a_i) f(c_i) - S\Big| \le \epsilon.$$

On montre que le nombre S est unique et on note

$$S = \int_I f = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$$

B.4.1. Inégalité triangulaire pour l'intégrale

Proposition B.6 *Soient $I \subset \mathbb{R}$. Si la fonction $f : I \to \mathbb{R}^n$ est intégrable, alors $\|f\| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour $t \in I$ par*

$$\|f\|(t) = \|f(t)\|$$

est intégrable, et

$$\Big\|\int_I f\Big\| \le \int_I \|f\|.$$

B.4.2. Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

Proposition B.7 (Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral) *Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$, soit $t_0 \in I$ et $t \in I$. Si f est dérivable sur $[t_0, t]$ et si f' est intégrable sur $[t_0, t]$, alors*

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^{t} f'(s)\,\mathrm{d}s.$$

B.4.3. Formule intégrale du reste du développement de Taylor

Proposition B.8 (Reste intégral du développement de Taylor) *Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$, soit $t_0 \in I$ et $t \in I$. Si f est dérivable k fois sur $[t_0, t]$ et si $f^{(k)}$ est intégrable sur $[t_0, t]$, alors*

$$f(t) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(t_0)}{i!}(t - t_0)^i + \int_{t_0}^{t} \frac{f^{(k+1)}(s)}{k!}(t - s)^k\,\mathrm{d}s.$$

En application, on démontre

Proposition B.9 *Pour chaque* $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^t = \lim_{k\to\infty} \sum_{m=0}^{k} \frac{t^m}{m!}.$$

Démonstration. Pour chaque $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathrm{e}^t = \sum_{m=0}^{k} \frac{t^m}{m!} + \int_0^t \mathrm{e}^s \frac{(t-s)^k}{k!}\,\mathrm{d}s$$

On observe que

$$\Big| \int_0^t \mathrm{e}^s \frac{(t-s)^k}{k!}\,\mathrm{d}s \Big| \le \mathrm{e}^{|t|} \int_{[0,|t|]} \frac{|t-s|^k}{k!}\,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{|t|} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!},$$

et la dernière quantité tend vers 0 quand k tend vers l'infini. □

B.4.4. Propriétés de l'intégrale indéfinie

Définition B.11 *Soit* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle. La fonction* $f : I \to \mathbb{R}$ *est* localement intégrable *sur* I *si pour chaque* $a, b \in \mathbb{R}$ *avec* $a < b$, f *est intégrable sur* $[a, b]$.

Soit $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable et $a, b \in I$. On pose

$$\int_a^b f = \begin{cases} \displaystyle\int_{[a,b]} f & \text{si } a < b, \\ 0 & \text{si } a = b, \\ \displaystyle -\int_{[b,a]} f & \text{si } a > b. \end{cases}$$

Proposition B.10 (Continuité de l'intégrale indéfinie) *Soient* $I \subset \mathbb{R}$ *et* $t_0 \in I$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$. *Si* f *est localement intégrable, la fonction* $F : I \to \mathbb{R}$ *définie pour* $t \in I$ *par*

$$F(t) = \int_{t_0}^t f(s)\,\mathrm{d}s$$

est continue.

En général, F n'est pas dérivable. Par exemple, on peut prendre

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t = 0, \\ -1 & \text{si } t < 0, \end{cases}$$

et calculer pour chaque $t \in \mathbb{R}$,

$$F(t) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s = |t|,$$

qui *n'est pas dérivable en* 0.

Proposition B.11 (Dérivabilité de l'intégrale indéfinie) *Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, $t_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est continue sur I, alors la fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie pour $t \in I$ par*

$$F(t) = \int_{t_0}^t f(s)\,\mathrm{d}s$$

est dérivable et pour chaque $t \in \mathbb{R}$,

$$F'(t) = f(t).$$

Puisque f est continue, F' est continue et F est donc de classe C^1.

L'étude de la dérivabilité d'ordre supérieur découle aussi de la proposition précédente : on montre immédiatement à partir de la formule $F' = f$ que si f est dérivable k fois, alors F est dérivable $k+1$ fois et $F^{(k+1)} = f^{(k)}$.

B.4.5. Théorèmes de convergences dominée et monotone

Proposition B.12 (Théorème de convergence dominée) *Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, $f_m : I \to \mathbb{R}^n$, $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $g : I \to \mathbb{R}^+$. Supposons que pour chaque $m \in \mathbb{N}$, f_m soit intégrable sur I et que pour tout $t \in I$, on a*

$$\|f_m(t)\| \le g(t),$$

que pour chaque $t \in I$,

$$\lim_{m\to\infty} f_m(t) = f(t)$$

et que g est intégrable. Alors f est intégrable, et

$$\lim_{m\to\infty} \int_I f_m = \int_I f.$$

Proposition B.13 (Théorème de convergence monotone) *Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, $f_m : I \to \mathbb{R}^n$ et $f : I \to \mathbb{R}^n$. Supposons que pour chaque $m \in \mathbb{N}$, f_m soit intégrable sur I et que pour tout $t \in I$,*

$$f_m(t) \le f_{m+1}(t),$$

que pour chaque $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{m\to\infty} f_m(t) = f(t).$$

Alors f est intégrable si et seulement si $(\int_I f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est bornée, et

$$\int_I f = \lim_{m\to\infty} \int_I f_m.$$

Références

[1] E. J. McShane, *Unified integration*, Pure and Applied Mathematics, vol. 107, Academic Press, New York, 1983.

C. Solutions types d'exercices

Cet appendice reprend des exercices résolus comme attendu à l'examen. Ces exercices ne sont pas une indication de quels exercices sont matière d'examen, mais de comment les réponses doivent être rédigées.

Pour commencer, voici quelques conseils généraux :

— toute lettre doit être déclarée avant d'être utilisée,

— toute lettre ne peut être utilisée que pour une seule chose dans un exercice,

— distinguer la fonction u de sa valeur $u(t)$ au point t.

En général, la partie de la résolution qui est un *prérequis* (résolution d'un système d'équations linéaires, intégration d'une équation différentielle par séparation de variable), si elle doit être correcte, ne doit pas être détaillée.

De même, s'il est fortement conseillé de *vérifier* sa solution en l'injectant dans l'équation et si le correcteur évaluera les erreurs de calculs en fonction de la possibilité de vérifier facilement les calculs, il n'est pas nécessaire de rédiger cette vérification. Par contre, si votre solution ne passe pas l'épreuve de la vérification, il est important de le mentionner.

Exercice 1. *Calculer pour* $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{tA},$$

où A *est donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solution. Soit $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ et, pour $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = e^{tA}[v]$. On sait par le lien entre exponentielle de matrice et systèmes différentiels que $u = (u_1, u_2)$ est la solution unique du problème

$$\begin{cases} u'(t) = A[u(t)] & \text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = v. \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{cases} u_1'(t) = 5u_1(t) + 7u_2(t) & \text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \\ u_2'(t) = 2u_2(t) & \text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \\ u_1(0) = v_1, \\ u_2(0) = v_2. \end{cases}$$

On calcule alors que

$$u_2(t) = v_2 e^{2t},$$

et donc u_1 satisfait :

$$\begin{cases} u_1'(t) = 5u_1(t) + 7v_2 e^{2t} & \text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \\ u_1(0) = v_1, \end{cases}$$

d'où on déduit que

$$u_1(t) = v_1 e^{5t} - v_2 \tfrac{7}{3}(e^{2t} - e^{5t}).$$

On a donc

$$e^{tA}[v] = (v_1 e^{5t} - v_2 \tfrac{7}{3}(e^{2t} - e^{5t}), v_2 e^{2t})$$

et donc

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{5t} & \frac{7}{3}(e^{2t} - e^{5t}) \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

□

L'important dans cette résolution est de
— bien montrer le lien entre exponentielle d'opérateur et résolution d'équation linéaire.

Exercice 2. *Soit* $u :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ *une fonction qui satisfait pour tout* $t \in]0, \infty[$,

$$u''(t) = \frac{u'(t)}{t} - \frac{u(t)}{t^2} + f(t).$$

Écrire une formule intégrale pour u *en fonction de* $u(1)$, $u'(1)$ *et* f, *sachant que* u_1 *et* u_2 *définies pour* $t \in \mathbb{R}$ *par*

$$u_1(t) = t, \qquad \text{et} \qquad u_2(t) = t \ln t$$

sont des solutions.

Solution. Nous allons chercher $\alpha :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ et $\beta :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables telles que $u = \alpha u_1 + \beta u_2$ soit une solution. On a pour chaque $t \in]0, \infty[$,

$$u'(t) = (\alpha'(t)t + \beta'(t)t \ln t) + \alpha(t) + \beta(t)(\ln t + 1).$$

Si nous imposons pour chaque $t \in]0, \infty[$,

$$\alpha'(t)t + \beta'(t)t \ln t = 0, \tag{$*$}$$

nous avons alors pour chaque $t \in]0, \infty[$,

$$u'(t) = \alpha(t) + \beta(t)(\ln t + 1),$$

d'où

$$u''(t) = \alpha'(t) + \beta'(t)(\ln t + 1) + \beta(t)\frac{1}{t}.$$

L'équation se réduit donc à

$$\alpha'(t) + \beta'(t)(\ln t + 1) + \beta(t)\frac{1}{t} = \frac{\alpha(t) + \beta(t)(\ln t + 1)}{t} - \frac{\alpha(t)t + \beta(t)t\ln t}{t^2} + f(t).$$

qui est équivalent à

$$\alpha'(t) + \beta'(t)(\ln t + 1) = f(t).$$

Puisque nous avons aussi imposé $(*)$ dans nos calculs, α et β satisfont

$$\begin{cases} \alpha'(t) + \beta'(t)\ln t = 0 & \text{pour chaque } t \in \,]0,\infty[, \\ \alpha'(t) + \beta'(t)(\ln t + 1) = f(t) & \text{pour chaque } t \in \,]0,\infty[, \\ \alpha(1) = u(1), \\ \alpha(1) + \beta(1) = u'(1). \end{cases}$$

Par résolution de systèmes linéaires, nous avons

$$\begin{cases} \alpha'(t) = -f(t)\ln t & \text{pour chaque } t \in \,]0,\infty[, \\ \beta'(t) = f(t) & \text{pour chaque } t \in \,]0,\infty[, \\ \alpha(1) = u(1), \\ \beta(1) = u'(1) - u(1), \end{cases}$$

d'où on calcule que pour chaque $t \in \,]0,\infty[$,

$$\alpha(t) = u(1) - \int_1^t f(s)\ln s\,ds$$
$$\beta(t) = u'(1) - u(1) + \int_1^t f(s)\,ds$$

et donc

$$u(t) = u(1)t(1 - \ln t) + u'(1)t\ln t + \int_1^t f(s)t\ln\frac{t}{s}\,ds. \qquad \square$$

L'important dans cette résolution est :

— bien distinguer ce que l'on impose de ce qu'on calcule en écrivant explicitement *on veut*, *on impose* ou *on calcule*, *on déduit*,

— veiller à ne pas écrire d'expressions vides de sens (division par 0),

Comme d'habitude, veillez à indiquer le domaine de validité de vos formules (pour chaque $t \in \dots$, et à ne pas utiliser une lettre pour deux choses différentes (en particulier dans les formules intégrales, ne pas intégrer par rapport à une variable apparaissant en dehors de l'intégrale).

Dans votre résolution, vous ne devez pas expliquer comment vous résolvez un système de deux équations linéaires à deux inconnues ou comment vous résolvez une équation différentielle élémentaire par primitivation. De même, il est utile de vérifier votre réponse (en calculant u' et u'') pour identifier des erreurs de calcul, cette vérification ne doit pas figurer dans votre réponse (le correcteur supposera que vous l'avez faite).

Exercice 3. *Sans calculer les solutions explicitement, le problème suivant a-t-il une solution définie sur* $\mathbb{R}$ *tout entier :*

$$\begin{cases} u'(t) = \sqrt{1 + u(t)^4} & \textit{\textbf{si}}\ t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 1? \end{cases}$$

Solution. Soit $u : I \to \mathbb{R}$ une solution maximale. On vérifie que pour chaque $t \in I$,

$$u'(t) \geq 1,$$

et donc, si $t \in I$ et $t \geq 0$,

$$u(t) \geq 1 + t \geq 1 > 0.$$

D'autre part on a pour chaque $t \in I$,

$$u'(t) \geq u(t)^2.$$

On a donc pour chaque $t \in I$ tel que $t \geq 0$,

$$\frac{u'(t)}{u(t)^2} \geq 1.$$

En intégrant pour $t \in [0, s]$, on trouve

$$\int_0^s \frac{u'(t)}{u(t)^2}\, dt \geq \int_0^s 1\, dt.$$

On calcule

$$\int_0^s \frac{u'(t)}{u(t)^2}\, dt = \int_{u(0)}^{u(s)} \frac{1}{x^2}\, dx = 1 - \frac{1}{u(s)}$$

et

$$\int_0^s 1\, dt = s.$$

Nous avons donc, pour chaque $s \in I$ tel que $s \geq 0$,

$$\frac{1}{u(s)} \leq 1 - s.$$

Puisque $u(s) \geq 0$, on a une contradiction si $s \geq 1$. On a donc que $I \subset]-\infty, 1[$. $\square$

Dans cette résolution il est important de :
- avant de diviser, montrer que le dénominateur n'est pas nul,
- veiller au signe quand on intègre une inégalité,
- donner une borne supérieure sur le temps d'explosion (mais pas le temps d'explosion exact).

Exercice 4. *Sans calculer les solutions explicitement, le problème suivant a-t-il une solution définie sur* $\mathbb{R}$ *tout entier :*

$$\begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{1+u(t)^2} & \textbf{\textit{si}}\ t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 1? \end{cases}$$

Solution. Soit $u : I \to \mathbb{R}$ une solution. On vérifie que pour chaque $x \in \mathbb{R}$,

$$\Big|\frac{x}{1+x^2}\Big| \leq \frac{1}{2}.$$

On a donc pour chaque $t \in I$,

$$|u'(t)| \leq \frac{1}{2}.$$

On en déduit donc que pour chaque $t \in I$

$$|u(t) - 1| \leq \frac{|t|}{2}. \tag{$*$}$$

Soit $t_* \in \partial I$. Posons

$$K = \Big\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| \leq \frac{|t_*|}{2}\Big\}.$$

On vérifie que K est compact et que pour chaque $t \in I \cap [0, t_*]$, $u(t) \in K$. Par la caractérisation des courbes intégrales maximales, $\inf([-L, L] \cap I) \in I$ et $\sup([-L, L] \cap I) \in I$, d'où on déduit que $I = \mathbb{R}$. $\square$

Dans cette résolution il est important :
— établir le lien entre solution maximale et image inverse de compact,
— établir rigoureusement l'inégalité qui permet de définir le compact,
— conclure l'argument en manipulant les différents intervalles.

Exercice 5. *Étudiez la stabilité de* 0 *pour l'équation*

$$x' = -x^3.$$

Solution. On définit la fonction $V(x) = x^2$. On vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$V'(x) = 2x,$$

et donc

$$V'(x)(-x^3) = -2x^4 < 0$$

si $x \neq 0$. De plus pour $x \neq 0$,

$$V(x) > 0.$$

Par la condition suffisante de stabilité de Lypounov, 0 est asymptotiquement stable. $\square$

Dans cette résolution il est important :
— vérifier la décroissance le long du flot,
— vérifier la minimalité de 0.

Exercice 6. *Étudiez la stabilité de* 0 *pour l'équation*

$$w'' = -\sin(w) - w'.$$

Solution. Posons $u(t) = (w(t), w'(t))$. L'équation est équivalente au système

$$u'(t) = f(u(t)),$$

avec $f(x) = (x_2, -\sin(x_1) - x_2)$. On vérifie que f est de classe C^1, que $f(0) = 0$ et que

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & -1 \end{pmatrix}$$

En particulier,

$$Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On calcule que

$$\operatorname{spec} Df(0) = \left\{ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \right\}$$

et donc 0 est un équilibre asymptotiquement stable du système. □

Dans cette résolution il est important :
— vérifier l'hypothèse sur $f(0)$,
— vérifier l'hypothèse sur le spectre de $Df(0)$.

S'il est recommandé de ne pas se tromper dans le calcul du spectre, les détails du calcul du spectre (calcul des valeurs propres) ne doivent pas figurer.

Exercice 7. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur* $g \in C([1,2], \mathbb{R})$ *pour que le problème suivant ait une solution*

$$\begin{cases} w''(t) + \dfrac{1}{t} w'(t) = g(t) \quad \textit{pour } t \in [1,2], \\ w'(1) = 0, \\ w'(2) = 0. \end{cases}$$

Solution. On pose

$$u(t) = (w(t), w'(t))$$

On a

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_2(t), \\ u_2'(t) = -\dfrac{u_2(t)}{t} + g(t), \\ u_2(1) = 0, \\ u_2(2) = 0, \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \quad u'(t) = A(t)[u(t)] + f(t), \\ B_1[u(1)] = B_2[u(2)], \end{cases}$$

où

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{pmatrix},$$

et

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'opérateur $-A(t)^*$ est représenté par

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}$$

et que

$$\begin{aligned} &\{(\gamma, \delta) \mid \text{pour tout } \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n, \text{ si } B_1[\alpha] = B_2[\alpha], (\gamma|\alpha) = (\delta|\beta)\} \\ &\quad = \{(\gamma, \delta) \mid \text{pour tout } \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n, \text{ si } \alpha_2 = 0 \text{ et } \beta_2 = 0, (\gamma|\alpha) = (\delta|\beta)\} \\ &\quad = \{(\gamma, \delta) \mid \gamma_1 = 0 \text{ et } \delta_1 = 0\}. \end{aligned}$$

On cherche les solutions de

$$\begin{cases} v_1'(t) = 0, \\ v_2'(t) = -v_1(t) + \dfrac{v_2(t)}{t}, \\ v_1(1) = 0, \\ v_1(2) = 0, \end{cases}$$

On en déduit que pour $t \in [1, 2]$, $v_1(t) = 0$ et $v_2(t) = Ct$ avec $C \in \mathbb{R}$ fixé.

Par un résultat du cours, le problème a donc une solution si et seulement si

$$\int_1^2 ((0, t)|f(t))\,\mathrm{d}t = 0,$$

ou encore

$$\int_1^2 g(t)t\,\mathrm{d}t = 0\,. \qquad \square$$

Dans cette résolution il est important :

— bien établir les liens différents objets pour une équation d'ordre supérieur et un système,

— identifier l'endroit où on utilise un résultat du cours,

— rédiger la conclusion sur les données du problème initial (ici sur g et non sur f).

D. Solutions d'exercices

Matières

Chapitre 1 — Systèmes linéaires à coefficients constants 175
Chapitre 2 — Systèmes linéaires à coefficients variables 180
Chapitre 3 — Systèmes d'équations différentielles ordinaires non linéaires 183
Chapitre 4 — Stabilité de systèmes d'équations différentielles autonomes 187
Chapitre 5 — Problèmes aux limites pour les systèmes d'équations différentielles linéaires 187
Chapitre 6 — Problèmes aux limites pour des équations différentielles non linéaires 188

Chapitre 1 — Systèmes linéaires à coefficients constants

Exercice 1.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.2 On a pour chaque $k \in \mathbb{N}$, $P^k = P$. On en déduit que pour chaque $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{e}^{tP}[v] = v - P[v] + \mathrm{e}^t P[v].$$

Exercice 1.3 On a pour chaque $k \in \mathbb{N}$, $S^{2k} = \mathrm{id}$ et $S^{2k+1} = S$. On en déduit que

$$\mathrm{e}^{tP}[v] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m} v}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m+1} S[v]}{(2m+1)!}.$$

On en déduit que

$$\mathrm{e}^{tP}[v] = (\cosh t) v + (\sinh t) S[v].$$

Exercice 1.4 On a

$$\mathrm{e}^{tN}[v] = v + tN[v].$$

Exercice 1.5 On a

$$\mathrm{e}^{tN}[v] = \sum_{j=0}^{k} t^k N^k[v].$$

Exercice 1.6 On a $\mathrm{e}^{A^*} = (\mathrm{e}^A)^*$.

Exercice 1.7

$$\begin{pmatrix} \cosh(2t) & \sinh(2t) \\ \sinh(2t) & \cosh(2t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(3t) & \sin(3t) \\ -\sin(3t) & \cos(3t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} & \mathrm{e}^{4t} - \mathrm{e}^{3t} \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} & t\mathrm{e}^{3t} \\ 0 & \mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t} & \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t} \\ \frac{2}{3}\mathrm{e}^{2t} - \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t} & \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t} + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t}. \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.8 Par définition de l'exponentielle d'opérateur et par linéarité, on a successivement

$$e^{tA} \circ B = \Big(\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{(tA)^n}{n!}\Big) \circ B = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{(tA)^n}{n!} \circ B = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{t^n}{n!} A^n \circ B$$

Par un argument de récurrence, si $A \circ B = B \circ A$, alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on a $A^n \circ B = B \circ A^n$. En repartant de la dernière égalité ci-dessus, on obtient le résultat souhaité.

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{t^n}{n!} A^n \circ B = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{t^n}{n!} B \circ A^n = B \circ \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{(tA)^n}{n!} = B \circ e^{tA}$$

Pour $v \in \mathbb{R}^n$ fixé nous définissons la fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ pour $t \in \mathbb{R}$ par $u(t) = (e^{tA} \circ e^{tB})[v]$. On remarque que $u(0) = v$. Par la proposition 1.4 (dérivée de l'exponentielle d'opérateur) et le résultat démontré ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} u'(t) &= \big(e^{tA} \circ e^{tB}\big)'[v] = \big(A \circ e^{tA} \circ e^{tB} + e^{tA} \circ B \circ e^{tB}\big)[v] \\ &= \big(A \circ e^{tA} \circ e^{tB} + B \circ e^{tA} \circ e^{tB}\big)[v] \\ &= (A + B) \circ (e^{tA} \circ e^{tB})[v] = (A + B)[u(t)] \end{aligned}$$

La proposition 1.5 implique que $u(t) = e^{t(A+B)}[v]$ On a donc pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $(e^{tA} \circ e^{tB})[v] = e^{t(A+B)}[v]$. Puisque cette égalité doit être vérifiée pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, on conclut que $e^{t(A+B)} = e^{tA} \circ e^{tB}$.

Exercice 1.9 Si A est diagonalisable, avec des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, et si $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^2$ sont les vecteurs propres associés, on a

$$e^{tA}[v_i] = e^{\lambda_i} v_i.$$

Pour que $e^{tA} = \mathrm{id}$ il est nécessaire et suffisant que $e^{\lambda_i} = 1$, c'est à dire que toutes les valeurs propres soient des multiples de $2\pi\imath$. L'exemple le plus simple est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.10 On calcule que pour chaque $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathrm{e}^{tA}[v]\|^2 = 2(A[\mathrm{e}^{tA}[v]]|\mathrm{e}^{tA}[v]) = ((A + A^*)[\mathrm{e}^{tA}[v]]|\mathrm{e}^{tA}[v]).$$

Si $A = -A^*$, on a pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $\|\mathrm{e}^{tA}\| = 1$ et donc $\|\mathrm{e}^{A}\| = 1$. D'autre part, si pour chaque $t \in \mathbb{R}$, on a $\|e^{tA}\| = 1$, alors pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et pour chaque $v \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathrm{e}^{tA}[v]\| = \|v\|$. On en déduit que $(A[v]|v) = 0$ et donc $A = -A^*$.

Exercice 1.11 On observe que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathrm{e}^{tA}[v]\|^2 = 2(A[\mathrm{e}^{tA}[v]]|\mathrm{e}^{tA}[v]) \leq 2\alpha\|\mathrm{e}^{tA}[v]\|^2.$$

Exercice 1.12 Il suffit respectivement que A soit triangulaire inférieure, triangulaire supérieure et diagonale.

Exercice 1.13 La première et la troisième proposition sont équivalentes. Dans un sens, par récurrence, on observe que pour chaque $k \in \mathbb{N}$, $A^k[V] \subseteq V$. On déduit de la définition d'exponentielle que $\mathrm{e}^{tA}[V] \subset [V]$. Dans l'autre sens, on utilise le fait que

$$A[v] = \lim_{t \to 0} \frac{\mathrm{e}^{tA}[v] - v}{t},$$

pour déduire que $A[V] \subseteq V$.

Ces deux propositions impliquent clairement la seconde. La seconde n'implique pas les autres, comme on peut voir avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix},$$

pour laquelle on a $\mathrm{e}^A = I$, et donc pour tout $V \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathrm{e}^A[V] = V$. Par contre, si $V = \{(t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, on a $A[V] = \{(t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, et on a clairement $A[V] \not\subseteq V$.

On observe que v est un vecteur propre si et seulement si $e^A[\langle v \rangle] \subset \langle v \rangle$. De même A est une matrice triangulaire supérieure si et seulement si pour chaque $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $A[\mathbb{R}^k \times \{0\}] \subset \mathbb{R}^k \times \{0\}$.

Exercice 1.14 Non. On sait que A a au moins un vecteur propre. Soit $v \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $A[v] = \lambda v$. On a alors $B[v] = \mathrm{e}^{\lambda} v$, et donc $\lambda = -1$ et v est un multiple de $(0, 1)$. On a alors $\lambda = (2k+1)\pi\imath$, avec $k \in \mathbb{Z}$. On a alors $A[(0, 1)] = (0, (2k+1)\pi\imath)$, ce qui n'est pas possible puisque A est un opérateur réel.

Exercice 1.15 L'exponentielle de l'opérateur est représentée par

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t \frac{\mathrm{e}^{\mu t} - 1}{\mu} \\ 0 & \mathrm{e}^{(1+\mu)t} \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.18 S'il existe $\lambda \in \operatorname{spec} A$ tel que $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$, considérons $v \in \ker(A-\lambda Id)$. Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $e^{tA}[v] = e^{\lambda t} v$. Donc $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $u(t) = (e^{\lambda t} v + e^{\bar{\lambda} t} \bar{v}$ est solution de $u'(t) = A[u(t)]$ et $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$.

Réciproquement, supposons qu'il existe une solution non triviale $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$. On peut écrire $u(t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{k_i - 1} \alpha_{ij} \frac{t^i}{i!} e^{\lambda_i t}$, qui a une limite nulle si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, , on a soit $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ soit pour tout $j \in \{1, \dots, k_i\}$, $\alpha_{ij} = 0$.

Exercice 1.21 Pour l'exercice (a), posons $u(t) = (w(t), w'(t))$. La fonction u satisfait le système suivant

$$u'(t) = A[u(t)] + (0, f(t)),$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si nous considérons le système homogéne associé

$$v'(t) = A[v(t)],$$

on vérifie que $v_1''(t) = 4v_1'(t) + 5v_1(t)$ et donc

$$v_1(t) = v_1(0)\frac{5e^{-t} + e^{5t}}{6} + v_2(0)\frac{e^{5t} - e^{-t}}{6},$$

et donc

$$\begin{aligned} v(t) &= (v_1(t), v_2(t)) = (v_1(t), v_1'(t)) \\ &= \Big(v_1(0)\frac{e^{5t} + 5e^{-t}}{6} + v_2(0)\frac{e^{5t} - e^{-t}}{6}, v_1(0)\frac{5e^{5t} - 5e^{-t}}{6} + v_2(0)\frac{5e^{5t} + e^{-t}}{6}\Big), \end{aligned}$$

et donc

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \frac{e^{5t}+5e^{-t}}{6} & \frac{e^{5t}-e^{-t}}{6} \\ \frac{5e^{5t}-5e^{-t}}{6} & \frac{5e^{5t}+e^{-t}}{6}. \end{pmatrix}$$

Si nous posons

$$u(t) = e^{tA}[z(t)],$$

la fonction z doit satisfaire

$$e^{tA}[z'(t)] = f(t),$$

et donc

$$z'(t) = e^{-tA}[(0, f(t))].$$

On en déduit que

$$u(t) = e^{tA}[z(t)] = e^{tA}[u(0)] + \int_0^t e^{(t-s)A}[(0, f(s))]\,\mathrm{d}s,$$

On calcule finalement que

$$\int_0^t e^{(t-s)A}[(0, f(s))]\,\mathrm{d}s = \int_0^t \frac{e^{5(t-s)} - e^{-(t-s)}}{6} f(s)\,\mathrm{d}s,$$

et donc

$$w(t) = w'(0)\frac{5e^{-t} + e^{5t}}{6} + v'(0)\frac{e^{5t} - e^{-t}}{6} + \int_0^t \frac{e^{5(t-s)} - e^{-(t-s)}}{6} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Pour l'exercice (b), on pose $u(t) = (w(t), w'(t))$, qui satisfait l'équation

$$u'(t) = A[u(t)] + (0, f(t))$$

La proposition 1.5 donne l'unique solution du problème de Cauchy,

$$u(t) = e^{A(t-t_0)}[u(t_0)] + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}(0, f(s))\,\mathrm{d}s$$

On calcule donc e^{tA}. Si $\lambda < 0$, on obtient

$$w(t) = w(t_0)\cos\bigl(\sqrt{-\lambda}(t-t_0)\bigr) + w'(t_0)\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}\sin\bigl(\sqrt{-\lambda}(t-t_0)\bigr) + \frac{1}{\sqrt{-\lambda}}\int_{t_0}^t \sin\bigl(\sqrt{-\lambda}(t-s)\bigr)f(s)\,\mathrm{d}s,$$

si $\lambda > 0$, on a

$$w(t) = w(t_0)\cosh\bigl(\sqrt{\lambda}(t-t_0)\bigr) + w'(t_0)\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sinh\bigl(\sqrt{\lambda}(t-t_0)\bigr) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_{t_0}^t \sinh\bigl(\sqrt{\lambda}(t-s)\bigr)f(s)\,\mathrm{d}s,$$

et enfin, si $\lambda = 0$,

$$w(t) = w(t_0) + w'(t_0)(t-t_0) + \int_{t_0}^t (t-s)f(s)\,\mathrm{d}s$$

Exercice 1.22 On a pour chaque $t \in \mathbb{R}$,

$$u'(t) = u(t_0)\cos\sqrt{\kappa}t + u'(t_0)\frac{\sin\sqrt{\kappa}t}{\sqrt{\kappa}} + \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\int_0^t f(s)\sin\bigl(\sqrt{\kappa}(t-s)\bigr)\,\mathrm{d}s.$$

Comme condition suffisante, on a par exemple que $\int_{\mathbb{R}}|f| < +\infty$. On peut aussi demander que f soit périodique de période $2\pi/\sqrt{\kappa}$ et que $\int_0^{2\pi/\sqrt{\kappa}} f(t)\sin\sqrt{\kappa}t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi/\sqrt{\kappa}} f(t)\cos\sqrt{\kappa}t\,\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 1.24 On pose pour $i \in \{1, \dots, n\}$,s

$$v_i(s) = u^{(i)}(\mathrm{e}^s)\mathrm{e}^{is}.$$

On observe que pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$ et $s \in \mathbb{R}$,

$$v_i'(s) = v_{i+1}(s) + iv_i(s).$$

L'équation est alors équivalente à $v'(s) = A[v(s)]$, où A est représenté par

$$v'(s) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} v(s)$$

On peut procéder comme avec l'équation autonome, mais en posant

$$w(\lambda) = (1, \lambda, \lambda(\lambda - 1), \dots, \lambda(\lambda - 1) \cdots (\lambda - n - 2)).$$

Chapitre 2 — Systèmes linéaires à coefficients variables

Exercice 2.1 On applique la preuve de l'inégalité de Grönwall (proposition 2.4).

Exercice 2.2 On applique la preuve de la proposition 2.2. À la place de (2.3), on obtient

$$\|u_{k+1}(t) - u_k(t)\| \le K \frac{\left|\int_{t_0}^t |A|\right|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Exercice 2.3 Appliquer la méthode des itérations successives en posant

$$u_{k+1}(t) = u_\infty - \int_t^\infty A(s)\bigl[u(s)\bigr]\,\mathrm{d}s.$$

On obtient la borne

$$\|u_{k+1}(t) - u_k(t)\| \le \|u_\infty\| \frac{\left(\int_t^\infty \|A\|\right)^k}{k!}.$$

Exercice 2.4 Appliquer la méthode des itérations sucessives en posant

$$u_{k+1}(t) = 1 - \int_t^\infty (t - s)a(s)u_k(s)\,\mathrm{d}s.$$

On obtient la borne

$$|u_{k+1}(t) - u_k(t)| \leq \frac{\left(\int_t^\infty sa(s)\,\mathrm{d}s\right)^k}{k!}.$$

Exercice 2.5 On calcule que $R(t,0)$ est représenté par

$$\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où on trouve,

$$R(t,s) = R(t,0) \circ R(s,0)^{-1} = \mathrm{e}^{t-s} \begin{pmatrix} 1 & \frac{t^2-s^2}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.8 On montre que pour chaque $t, s \in I$

$$Q(t,s) - R(t,s) = \int_s^t R(t,\sigma) \circ \big(B(\sigma) - A(\sigma)\big) \circ Q(\sigma,s)\,\mathrm{d}\sigma.$$

On obtient la conclusion par l'inégalité de Grönwall (proposition 3.9).

Exercice 2.9 Supposons que u n'est pas identiquement nulle. Soient $u_2, \ldots, u_n :$ $[0,+\infty[\to \mathbb{R}^n$ des fonctions qui complètent une base de l'espace des solutions. On a alors d'une part

$$\det\big(u(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)\big) \leq \|u(t)\|\|u_2(t)\| \cdots \|u_n(t)\|.$$

On en déduit que

$$\lim_{t\to\infty} \det\big(u(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)\big) = 0,$$

ce qui est en contradiction avec la formule de Liouville qui donne

$$\det\big(u(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)\big) = \mathrm{e}^{\int_0^t \operatorname{tr} A} \det\big(u(0), u_2(0), \ldots, u_n(0)\big).$$

Exercice 2.10 Pour $\lambda \neq 0$, on trouve par exemple $u :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour $t \in]0,+\infty[$ par $u(t) = t^{-\lambda}$. Pour $\lambda = 0$, on trouve $u :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour $t \in]0,+\infty[$ par $u(t) = \ln t$.

Pour la résolvante en posant $v(t) = (u(t), u'(t))$, on vérifie que $R(t,s)$ est représentée pour $\lambda \neq 0$ par la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{t^\lambda}{s^\lambda} + \frac{s^\lambda}{t^\lambda}\right) & \frac{s}{2\lambda}\left(\frac{t^\lambda}{s^\lambda} - \frac{s^\lambda}{t^\lambda}\right) \\ \frac{\lambda}{2t}\left(\frac{t^\lambda}{s^\lambda} - \frac{s^\lambda}{t^\lambda}\right) & \frac{s}{2t}\left(\frac{t^\lambda}{s^\lambda} + \frac{s^\lambda}{t^\lambda}\right) \end{pmatrix}$$

et pour $\lambda = 0$ par

$$\begin{pmatrix} 1 & s \ln \frac{t}{s} \\ 0 & \frac{s}{t} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.11 En posant $w(t) = \alpha(t)t$, on trouve

$$\alpha''(t)t = \alpha'(t),$$

et on en déduit que la fonction $t \in \,]0, +\infty[\mapsto te^t$ est une seconde solution linéairement indépendante.

Exercice 2.12 On pose $w_2(t) = \alpha(t)w_1(t)$ et on trouve que α satisfait à l'équation

$$\alpha''(t) = \left(2 - \tfrac{3}{t}\right)\alpha'(t).$$

Une seconde solution est donnée par

$$w_2(t) = \int_1^t \frac{e^{2s-t}t^2}{s^3}\,\mathrm{d}s. \tag{D.1}$$

Exercice 2.13 En essayant des solutions de la forme $t \mapsto t^\alpha$, on trouve deux solutions linéairement indépendantes $w_1(t) = t^3$ et $w_2(t) = 1/t^2$. On pose ensuite

$$w(t) = \alpha(t)w_1(t) + \beta(t)w_2(t) = \alpha(t)t^3 + \frac{\beta(t)}{t^2}.$$

On calcule ensuite

$$w'(t) = 3\alpha(t)t^2 - 2\frac{\beta(t)}{t^3} + \alpha'(t)t^3 + \frac{\beta'(t)}{t^2}.$$

On impose la condition $\alpha'(t)t^3 + \beta'(t)/t^2 = 0$. On calcule ensuite

$$w''(t) = 6\alpha(t)t + 6\frac{\beta(t)}{t^4} + 3\alpha'(t)t^2 - 2\frac{\beta'(t)}{t^3}.$$

On vérifie que α et β satisfont le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \alpha'(t)t^3 + \dfrac{\beta'(t)}{t^2} = 0 \\ 3\alpha'(t)t^4 - 2\dfrac{\beta'(t)}{t} = t^4, \end{cases}$$

qui se réduit à

$$\begin{cases} 5\alpha'(t) = 1, -5\beta'(t) & = t^5, \end{cases}$$

et donc $\alpha(t) = \alpha(1) + (t-1)/5$ et $\beta(t) = \beta(1) + \frac{(1-t^6)}{30}$, d'où on déduit $w(t) = \alpha(1)t^3 + \frac{\beta(1)}{t^2} + t^4/5 - t^3/5 - t^4/30 + 1/t^2 = t^4/6 + \frac{2w(1)+w'(1)-1}{5}t^3 + \frac{18w(1)-6w'(1)+1}{30}1/t^2$.

Exercice 2.14 Appliquer la méthode des itérations sucessives en posant

$$u_{k+1}(t) = t - \int_c^t sa(s)u_k(s)\,\mathrm{d}s - t\int_t^\infty a(s)u_k(s)\,\mathrm{d}s$$

et en choisissant bien le point $c \in \,]0, +\infty[$.

Chapitre 3 — Systèmes d'équations différentielles ordinaires non linéaires

Exercice 3.1 Pour 1., la fonction est lipschitzienne en espace. En effet, pour $x, y, t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}|f(t,x) - f(t,y)| &= |\cos(x)\sin(t) - \cos(y)\sin(t)| = |\sin t||\cos x - \cos y| \\ &= |\sin t|\Big|\int_x^y \sin z \,\mathrm{d}z\Big| \leq |x-y|.\end{aligned}$$

La fonction donnée en 2. n'est pas lipschitzienne en espace. En effet,

$$\frac{|f(t,1) - f(t,1)|}{|1-0|} = |t|,$$

qui n'est pas borné supérieurement.

La fonction donnée en 3. est lipschitzienne en espace. En effet, pour chaque $t, x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(t,x) - f(t,y)| = ||x| - |y|| \leq |x-y|.$$

La fonction donnée en 4. est lipschitzienne en espace. En effet, pour chaque $t \in [-1,1]$ et $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(t,x) - f(t,y)| = |t|||x| - |y|| \leq 2|x-y|.$$

La fonction donnée en 5. est lipschitzienne en espace. En effet, pour chaque $t \in [0,1]$ et $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(t,x) - f(t,y)| = \sqrt{t}||x| - |y|| \leq \sqrt{3}|x-y|.$$

La fonction donnée en 6. n'est pas lipschitzienne en espace. En effet, pour chaque $x, y \in [0, \infty[$,

$$\frac{|f(1,x) - f(1,y)|}{|x-y|} = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{|x-y|} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}},$$

et la quantité à droite n'est pas bornée supérieurement. La réponse est semblable pour 7.

La fonction donnée en 8. est Lipschitzienne en espace. Pour chaque $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(t,x) - f(t,y)| = ||x| - |y|| \leq |x-y|.$$

La fonction donnée en 9. est Lipschitzienne en espace. En effet, pour chaque $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(t,x) - f(t,y)| = |\arctan x - \arctan y| = \Big|\int_x^y \frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}z\Big| \leq |x-y|.$$

Exercice 3.2 On observe que

$$\|f(t,x)-f(s,y)\| = \|A(t)[x]-A(s)[y]\| \le \|A(t)\|\|x-y\|\|A(s)-A(t)\|\|y\|$$

et

$$\|f(t,x)-f(t,y)\| = \|A(t)[x-y]\|.$$

Exercice 3.3 On observe que

$$\|h(t,x)-h(t,y)\| = |g(t)|\|f(t,x)-f(t,y)\|.$$

Exercice 3.6 Les problèmes (a), (b) et (d) ont une solution unique au voisinage de 0 car le membre de droite est localement lipschitzien en espace.

Les problèmes (c) et (e) n'ont pas une solution unique : (c) a une solution donnée implicitement par $u(t)(1+\ln u(t)) = t$ et (e) a une solution donnée par $u(t) = \frac{t^3}{27}$.

Exercice 3.7 On a pour chaque $\tau \in \mathbb{R}$ les fonctions $u :]\tau - \frac{\pi}{2}, \tau + \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ définies pour $t \in]\tau - \frac{\pi}{2}, \tau + \frac{\pi}{2}[$ par

$$u(t) = \tan(t-\tau).$$

Exercice 3.8 On a pour chaque $\tau \in \mathbb{R}$ les fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$u(t) = \sinh(t-\tau).$$

Exercice 3.9 On a pour chaque $\tau, \sigma \in \mathbb{R}$ avec $\tau < \sigma$ les fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$u(t) = \begin{cases} \frac{(t-\tau)^2}{4} & \textbf{si } t \in]\tau, \infty[, \\ 0 & \textbf{si } t \in [\sigma, \tau], \\ -\frac{(t-\sigma)^2}{4} & \textbf{si } t \in]-\infty, \sigma[, \end{cases}$$

On a aussi, pour $\sigma \in \mathbb{R}$,

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } t \in [\sigma, \infty[, \\ -\frac{(t-\sigma)^2}{4} & \textbf{si } t \in]-\infty, \sigma[, \end{cases},$$

pour $\tau \in \mathbb{R}$,

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } t \in]-\infty, \tau], \\ \frac{(t-\tau)^2}{4} & \textbf{si } t \in]\tau, \infty[, \end{cases}$$

et la solution nulle.

Exercice 3.10 On a tout d'abord les courbes intégrales constantes $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies pour $t \in \mathbb{R}$ par $u(t) = 1$ et $u(t) = -1$. On a ensuite les fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$u(t) = \tanh(t-\tau)$$

où $\tau \in \mathbb{R}$ est une constante. On a enfin les solutions $u :]\tau, \infty[\to \mathbb{R}$ définie pour $t \in]\tau, \infty[$ par

$$u(t) = \operatorname{cotanh}(t - \tau)$$

et les solutions $u :] - \infty, \tau[\to \mathbb{R}$ définie pour $t \in] - \infty, \tau[$ par

$$u(t) = \operatorname{cotanh}(t - \tau).$$

Exercice 3.11 On a tout d'abord les courbes intégrales constantes $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies pour $t \in \mathbb{R}$ par $u(t) = 1$ et $u(t) = -1$. On a ensuite les fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$u(t) = -\tanh(t - \tau)$$

où $\tau \in \mathbb{R}$ est une constante. On a enfin les solutions $u :]\tau, \infty[\to \mathbb{R}$ définie pour $t \in]\tau, \infty[$ par

$$u(t) = -\operatorname{cotanh}(t - \tau)$$

et les solutions $u :] - \infty, \tau[\to \mathbb{R}$ définie pour $t \in] - \infty, \tau[$ par

$$u(t) = -\operatorname{cotanh}(t - \tau).$$

Exercice 3.12 On a les fonctions $u :]\tau, \infty[$ définies pour $t > \tau$ par

$$u(t) = \sqrt{2(t - \tau)}.$$

Exercice 3.13 On a pour $\tau \geq 0$, les fonctions $u :]\tau, \infty[$ définies pour $t > \tau$ par

$$u(t) = \sqrt{t^2 - \tau^2}.$$

et les fonctions $u :] - \infty, -\tau[$ définies pour $t < -\tau$ par

$$u(t) = \sqrt{t^2 - \tau^2}.$$

Enfin, on a pour $\alpha > 0$ les fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$u(t) = \sqrt{t^2 + \alpha}.$$

Exercice 3.14 On a pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a les fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$u(t) = \arctan\big((\cos t) + \alpha\big) + k\pi$$

et, pour $k \in \mathbb{Z}$, les fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$u(t) = k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 3.15 La réponse est positive pour (a) et (g), et négative pour les autres.

Exercice 3.16 Le problème n'a pas de telles solutions.

Exercice 3.17 Pour (a), soit $u : I \to \mathbb{R}$ une courbe intégrale maximale telle que $u(0) = u_0$ et $v(0) = v_0$, montrons que $I = \mathbb{R}$. On remarque que $|u''(t)| \le 1$ et donc

$$|u'(t) - v_0| \le t \qquad\qquad |u(t) - v_0 t - u_0| \le \frac{t^2}{2}.$$

et donc

$$|u'(t) - v_0| \le t \qquad\qquad |u(t) - u_0| \le \frac{t^2}{2} + |v_0||t|.$$

Soit $t_* \in \partial I$. Considérons l'ensemble

$$K = \{(xy) \in \mathbb{R}^2 \mid |y - v_0| \le |t_*| \text{ et } |x - u_0| \le \frac{|t_*^2|}{2} + |v_0||t|\}.$$

On vérifie que $u(t) \in I$ pour chaque $t \in [t_0, t_*] \cap I$. Par la caractérisation des courbes intégrales maximales, on a une contradiction.

La solution de (b) est semblable.

Pour (c), en cherchant une solution de la forme $u(t) = C(1-t)^\alpha$ et on trouve que la fonction $u :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$ définie pour $t \in]-\infty, 1[$ par $u(t) = \sqrt{2}/(1-t)$ est une solution. Puisque (u, u') n'a pas de limite en 1, u est maximale et donc on a trouvé une donnée initiale pour laquelle le problème n'a pas de solution unique.

Pour (d), si $u : I \to \mathbb{R}$ est une solution maximale, on vérifie que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{|u'(t)|^2}{2} + \frac{|u(t)|^4}{4} = \frac{|v_0|^2}{2} + \frac{|u_0|^4}{4}.$$

On pose donc

$$K = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{|x|^2}{2} + \frac{|y|^4}{4} = \frac{|v_0|^2}{2} + \frac{|u_0|^4}{4}\Big\}.$$

On vérifie que cet ensemble est compact, que pour tout $t \in I$, $u(t) \in I$. Par la caractérisation des courbes intégrales maximales, $\partial I = \emptyset$.

Exercice 3.22 On procède comme dans la preuve de la proposition 3.13, l'inégalité (3.2) est remplacée par

$$\|u_{k+1}(t) - u_k(t)\| \le \frac{\left(\int_{t_0}^t L\right)^k}{k!}.$$

Exercice 3.24 Supposons que u et v soient deux solutions. On pose On pose

$$w(t) = \int_{\|u(t)-v(t)\|}^1 \frac{1}{\psi(s)}\,\mathrm{d}s = \int_{\|u(t)-v(t)\|^2}^1 \frac{1}{2\sqrt{\sigma}\psi(\sqrt{\sigma})}\,\mathrm{d}\sigma.$$

On calcule

$$w'(t) = \frac{2(u(t) - v(t)|f(t, u(t)) - f(t, v(t)))}{2\|u(t) - v(t)\|\psi(\|u(t) - v(t)\|)},$$

d'où on obtient une contradiction.

Chapitre 4 — Stabilité de systèmes d'équations différentielles autonomes

Exercice 4.1 Par linéarisation, on voit que l'origine est asymptotiquement stable puisque les valeurs propres de

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$\frac{-1+\imath\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1-\imath\sqrt{3}}{2}$ ont une partie réelle strictement négative.

Exercice 4.2 Par linéarisation, on voit que l'origine n'est pas stable puisque

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},$$

possède une valeur propre $\frac{\sqrt{21}-1}{2}$ de partie réelle strictement positive.

Exercice 4.3 Pour que V décroisse le long des trajectoires, il est nécessaire et suffisant que $b = 2a$ et $c \geq 0$. Par stabilité de Lyapounov, l'origine est stable.

Pour vérifier que l'origine n'est pas asymptotiquement stable, on vérifie que V n'est pas strictement décroissante quand $z = 0$. On cherche alors une solution de

$$\begin{cases} x' = 2y, \\ y' = -x. \end{cases}$$

Les solutions de ce problème $\lambda(\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}(t-t_0)), \sin(\sqrt{2}(t-t_0)))$ montrent que 0 n'est pas asymptotiquement stable.

Exercice 4.4 On peut prendre $V(x) = x^2$. L'origine est asymptotiquement stable.

Exercice 4.7 Pour tout ces problèmes, on peut poser $w(t) = x(t)^2 + y(t)^2$ et on étudie la stabilité de l'équation différentielle satisfaite par w.

Alternativement, on définit la fonction de Lyapounov $V(x,y) = x^2 + y^2$.

Chapitre 5 — Problèmes aux limites pour les systèmes d'équations différentielles linéaires

Exercice 5.3 Pour (a), si $\frac{\lambda}{\pi} \notin \mathbb{Z}$, il n'y a pas de condition. Si $\lambda = 0$, il est nécessaire et suffisant que

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} f(t)t\,\mathrm{d}t = 0.$$

Si $\frac{\lambda}{\pi} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, il est nécessaire et suffisant que

$$\int_{-1}^{1} f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Pour (b), si $\lambda \tanh \lambda = 1$, le problème a une solution si et seulement si

$$\int_{-1}^{1} f(t)\cosh(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Si $\lambda = 0$, le problème a une solution si et seulement si

$$\int_{-1}^{1} f(t)t\,\mathrm{d}t = 0.$$

Sinon, le problème a toujours une solution. (Observer que $\lambda \neq \tanh \lambda$ si $\lambda \neq 0$.)

Le problème (c) a une solution si et seulement si

$$\int_{1}^{2} f(t)t^{\lambda}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Le problème (d) a une solution si et seulement si

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Pour (e), il est nécessaire et suffisant que

$$\int_{-1}^{1} f(t)t\,\mathrm{d}t = 0.$$

Pour (f), le problème a toujours une solution.

Chapitre 6 — Problèmes aux limites pour des équations différentielles non linéaires

Exercice 6.1 On considère la fonction $u_\epsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie pour $t \in [a,b]$ par $u_\epsilon(t) + \epsilon(t-a)(b-t)$. proposition 6.5. Cette fonction atteint son maximum en un point de $d \in \,]a,b[$. On a donc en ce point $0 \geq u''_\epsilon(d) \geq u_\epsilon(d)$. On en déduit que u est négative.

Index

boule
fermée, 162
ouverte, 162

champ de vecteurs, 71
autonome, 92
champ de vecteurs lipschitzien en espace, 72
champ de vecteurs localement lipschitzien en espace, 75
dérivable en espace, 73
flot, 89
compact, 161
continuité
globale des solutions par rapport à la donnée initiale, 82, 84
par rapport aux données initiales, 79
convergence dominée, 165
convergence monotone, 165
courbe intégrale
d'un champ de vecteurs, 71
fermée, 78
maximale, 76
critère
de Cauchy, 160

déterminant, 61
d'exponentielle d'opérateur, 63
d'une application linéaire, 157
de n vecteurs, 158
de la résolvante, 62
wronskien, 61
développement de Taylor
reste intégral, 163

diagonalisation
d'un opérateur auto-adjoint, 153

ensemble
compact, 161
fermé dans un ensemble, 87
ouvert, 162
équilibre
asymptotiquement stable, 107
stable, 104
espace vectoriel
des solutions, 45
évaluation
application linéaire, 45
existence
de courbe intégrale d'un champ de vecteurs, 71
de solution d'un problème linéaire à coefficients constants, 18
de solutions d'un problème affin, 39
exponentielle d'opérateur
identité intégrale, 16
exponentielle d'opérateur, 15
d'un vecteur propre, 28
d'un vecteur propre généralisé, 21
dérivée, 17
déterminant, 63

flot d'un champ de vecteurs, 89
continuité, 90
dérivabilité, 92
flot d'un champ de vecteurs autonome, 92

fonction
de Green, 128
de Lyapounov, 103
graphe, 87
intégrable, 163
intégrable, 163
localement intégrable, 164
fondamental
matrice, 51
système, 51
forme
n–linéaire alternée, 156
formule
d'Abel, 64
de Liouville, 61

graphe d'une fonction, 87
Grönwall
inégalité de, 80

indépendance linéaire
de fonctions dérivables, 47
inégalité
de Grönwall, 43, 80
triangulaire pour l'intégrale, 163
intégrale indéfinie
continuité, 164
dérivabilité, 165
intégrale
de Lebesgue, 163
de McShane, 163
intervalle, 159
itération
de Picard, 40

Liouville
formule de, 61
lipschitzien
champ de vecteurs lipschitzien en espace, 72
champ de vecteurs localement lipschitzien en espace, 75

matrice fondamentale, 51

norme
d'un opérateur linéaire, 14

ouvert, 162

polynôme
caractéristique, 157
propriété
de Bolzano–Weierstraß, 161

réduction d'ordre
d'un système, 53
régularité
en temps d'une courbe intégrale, 89
résolvante, 47
calcul, 51
composition, 48
dérivée à droite, 49
dérivée à gauche, 49
déterminant, 62

série
convergente, 160
spectre, 150
d'opérateur, 20
suite
bornée, 161
convergente, 159
de Cauchy, 160
sommable, 160
système fondamental de solutions, 51

théorème
des bornes atteintes, 161
trace, 61, 154

unicité
de la courbe intégrale passant par un point, 75
de la solution d'un problème affin, 43

valeur propre, 150
variation de la constante, 18, 50
vecteur propre

généralisé, 20, 150
wronskien, 61