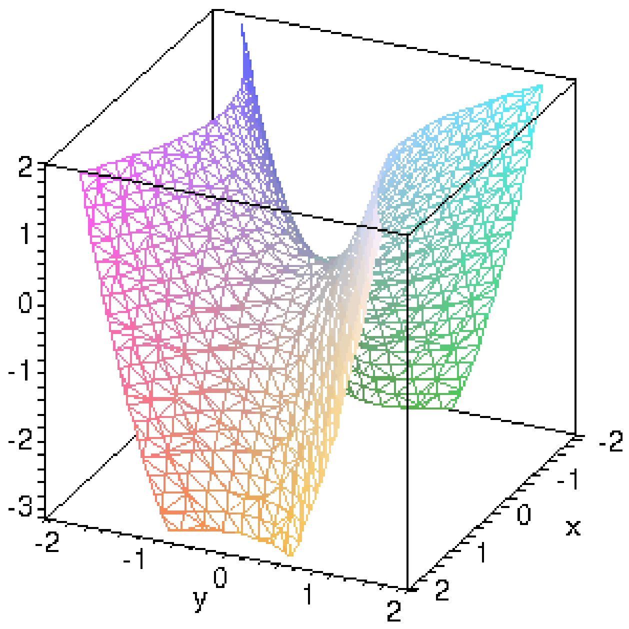
	Livret Tuteurs - APP 5	LEPL1101 Algèbre
2018-2019	**APP5 - *Rentabilité d'un investissement***	**Auteurs :** RJ, VW

Ce livret contient toutes les informations pour réaliser les activités prévues dans le cadre de l'APP5 du cours LEPL1101.



Les formes bilinéaires sont par définition des fonctions non-linéaires, donnant lieu à des figures complexes et élégantes. Pourtant, malgré la non-linéarité de ces fonctions, ce sont bien des outils fondamentaux d'algèbre linéaire (valeurs propres et vecteurs propres) qui nous permettent d'apprivoiser ces concepts exotiques.

Séance Aller - Rentabilité d'un investissement

Acquis d'apprentissage visés par l'APP (à faire découvrir) :

— Caractériser les matrices symétriques et leurs propriétés en terme de valeurs et vecteurs propres.

— Diagonaliser une matrice par transformation de congruence et exploiter une telle factorisation pour déterminer le signe de formes quadratiques.

— Enoncer et expliquer la loi d'inertie de Sylvester.

Quelques guidelines pour les tuteurs

L'objectif de ce problème est d'amener les étudiants à s'intéresser au signe d'une forme quadratique. Le changement de variables qui transforme la fonction "bénéfice" en forme quadratique est indiqué. Pour le premier ensemble de valeurs des paramètres, la forme quadratique est définie négative et l'activité ne peut donc jamais être rentable, quelle que soit l'affectation des ressources en capital, en personnel qualifié et non-qualifié. Par contre, pour le deuxième ensemble de valeurs, la forme est indéfinie et il existe donc des possibilités de rendre l'activité rentable.

Voici par où on aimerait que les étudiants passent (cela vous aidera à les guider)

— se rendre compte que le choix naturel est de prendre M symétrique

— se rendre compte que si M était diagonale, ce serait encore mieux pour déterminer le signe de f

— voir que, par changement de variables ($X = PX'$ où $X = (x, y, z)^T$), la forme quadratique devient $X'^T P^T M P X$. Peut-on trouver un changement de variable qui diagonalise $P^T M P$?

— C'est possible car M est symétrique et donc diagonalisable par similitude avec des vecteurs propres que l'ont peut choisir orthonormés donc $P^{-1} = P^T$.

— Mais les valeurs propres sont difficiles à calculer, donc il faut les décourager d'essayer, et plutôt les orienter vers des opérations sur les lignes suivies par les mêmes opérations sur les colonnes : passer de LU à LDL^T... et ça marche parce que M est symétrique.

Séance Aller - Rentabilité d'un investissement - Enoncé

Pour cette première séance, vous devez parcourir les trois premières étapes de la résolution d'un APP (cf. APP1 & APP2)

Rentabilité d'un investissement

Un investisseur a la possibilité d'investir dans un projet de création d'une nouvelle usine produisant un certain bien. Une étude de marché montre que ce bien peut être vendu à un prix p_B. L'investisseur peut engager du personnel qualifié et du personnel non-qualifié. Il peut également investir dans de l'outillage et des bâtiments (ce que l'on appelle le capital, en économie). Il sait que s'il investit pour une valeur C de capital et engage une quantité W_1 de personnel qualifié et W_2 de personnel non-qualifié, il produira une quantité annuelle

$$Q = 2\alpha\sqrt{W_1 C} + 2\beta\sqrt{W_2 C}$$

de bien, (où α et β sont des paramètres connus).

En supposant que tous les biens produits sont vendus, le bénéfice annuel que l'investisseur peut attendre est par conséquent le suivant :

$$B = f(W_1, W_2, C) = p_B Q - p_1 W_1 - p_2 W_2 - p_C C$$

où p_1 désigne le coût annuel d'un travailleur qualifié, p_2 désigne le coût annuel d'un travailleur non-qualifié et p_C est le taux annuel d'intérêt sur le capital C.

Pour les valeurs des paramètres $p_B = 2, p_1 = 16, p_2 = 11, p_C = 5, \alpha = 2, \beta = 3$, existe-t-il une combinaison des variables (W_1, W_2, C) qui puisse rendre le projet rentable ? Si oui, donner un exemple d'une telle combinaison. Si le prix de vente p_B augmente jusqu'à 3, votre réponse change-t-elle ?

Indications : Utiliser le changement de variable $W_1 = x^2, W_2 = y^2, C = z^2$ et étudier la fonction $g(x, y, z) = f(x^2, y^2, f^2)$.

Représenter cette fonction à l'aide d'une matrice. Plus précisément, $f = (x, y, z)M(x, y, z)^T$.

Il existe en fait un large choix de matrices pour M. Quel est le plus naturel ? Quelle propriété possède cette matrice M ?

Quelle propriété possèdent les valeurs propres ? Quelle propriété possède l'ensemble des vecteurs propres ?

Quel changement de variables proposer pour faciliter l'analyse de ce problème ? La réponse est-elle indépendante du changement de variables proposé ?

Pour calculer ce changement de variables, inspirez-vous de la factorisation LU...

Séance Retour - Rentabilité d'un investissement

Acquis d'apprentissage visés par l'APP :

— Caractériser les matrices symétriques et leurs propriétés en termes de valeurs et vecteurs propres.

— Diagonaliser une matrice par transformation de congruence et exploiter une telle factorisation pour déterminer le signe de formes quadratiques.

— Enoncer et expliquer la loi d'inertie de Sylvester.

Quelques guidelines pour les tuteurs

Vérifier que les acquis d'apprentissage mentionnés ci-dessus ont bien fait l'objet d'un travail personnel des étudiants et que la mise en commun dans le groupe permet bien de les valider et de consolider éventuellement certaines compréhensions encore un peu fragiles.

Solution : Avec le changement de variables proposé dans l'énoncé et avec les valeurs de paramètres données ($p_B = 2$),

$$B = g(x, y, z) = 8xz + 12yz - 16x^2 - 11y^2 - 5z^2$$

$$g(x, y, z) = (x, y, z) \begin{pmatrix} -16 & 0 & 4 \\ 0 & -11 & 6 \\ 4 & 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

M est bien symétrique et un échelonnement sur les lignes suivi des opérations similaires sur les colonnes (factorisation LDL^T) donne la matrice

$$\begin{pmatrix} -16 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -4 + \frac{36}{11} \end{pmatrix}$$

N.B. L'échelonnement n'est pas unique ! Un autre échelonnement donne :

$$\begin{pmatrix} -16 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -64 + \frac{24^2}{11} \end{pmatrix}$$

On peut donc dire que l'on a remplacé $g(x, y, z) = X^T M X$ par $h(x', y', z') = X'^T D X'$ avec $X = L^T X'$. Les trois coefficients de D sont négatifs et la forme quadratique h (en X') est donc définie négative. Il en est évidemment de même pour g. Il n'y a donc pas de valeurs de W_1, W_2, C qui permettent d'assurer un investissement rentable.

Si le prix de vente devient $p_B = 3$, la même démarche conduit à la matrice diagonale suivante (sauf erreurs de calcul ?) :

$$\begin{pmatrix} -16 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -5 + \frac{36}{16} + \frac{81}{11} \end{pmatrix}$$

et le troisième coefficient est positif, rendant la forme quadratique indéfinie. Il y a donc des valeurs de (x', y', z') qui permettent de donner une valeur positive à h et donc à g (et donc à f).

Attention : Vérifiez qu'ils se posent bien la question de savoir si ce résultat est bien indépendant de L (loi d'inertie de Sylvester).

Des ressources pour traiter la situation-problème

Le livre de G. Strang

Autres ressources :

Le plus simple pour trouver des ressources utiles consiste à utiliser un moteur de recherche sur Internet avec les termes suivants (par exemple) :

— formes bilinéaires

— matrices symétriques

— loi d'inertie de Sylvester

Ajoutez ici d'autres termes utiles apparus lors de la discussion en groupe :

— ...

— ...

— ...

— ...

— ...

— ...

— ...

— ...

— ...

— ...

— ...

— ...

Séance Aller - Clôture

Consignes pour travailler en autonomie

Avant de quitter la salle, le groupe vérifie que chacun de ses membres a bien compris ce qui est attendu de lui pendant la phase de travail individuel. Si nécessaire, le groupe se donne les moyens d'avoir des contacts entre membres AVANT la séance retour.

Séance Retour - Rentabilité d'un investissement

Pour cette deuxième séance, vous devez parcourir les trois dernières étapes du modèle APP (cf. APP1 & APP2). Assurez-vous qu'au delà de la résolution du problème, vous avez bien acquis les apprentissages relatifs à cet APP.

Séance Retour - Auto-évaluation des apprentissages individuels

Page laissée intentionnellement blanche

Auto-évaluation des apprentissages individuels

1. Pour chacun des objectifs de cet APP, estimez vous-même votre niveau de compétence avant le traitement de la situation-problème et au terme de ce traitement (notez par un nombre entier compris entre 0 et 5 svp) en appliquant le barème suivant :

— 0 : Je ne sais rien sur le sujet

— 1 : J'ai entendu parler de ce sujet, mais je ne suis pas certain de ce que je sais

— 2 : Je sais dire l'une ou l'autre chose correcte en ce qui concerne ce sujet

— 3 : Je sais décrire les principaux éléments en ce qui concerne ce sujet

— 4 : Je sais en décrire tous les éléments pertinents ainsi que les relations entre eux

— 5 : Je suis capable d'argumenter mes choix, de justifier mes affirmations, mes décisions

J'étais/je suis capable	**avant l'APP**	**après l'APP**
1.Caractériser les matrices symétriques et leurs propriétés en terme de valeurs et vecteurs propres.		
2. Diagonaliser une matrice par transformation de congruence et exploiter une telle factorisation pour déterminer le signe de formes quadratiques.		
3. Enoncer et expliquer la loi d'inertie de Sylvester		