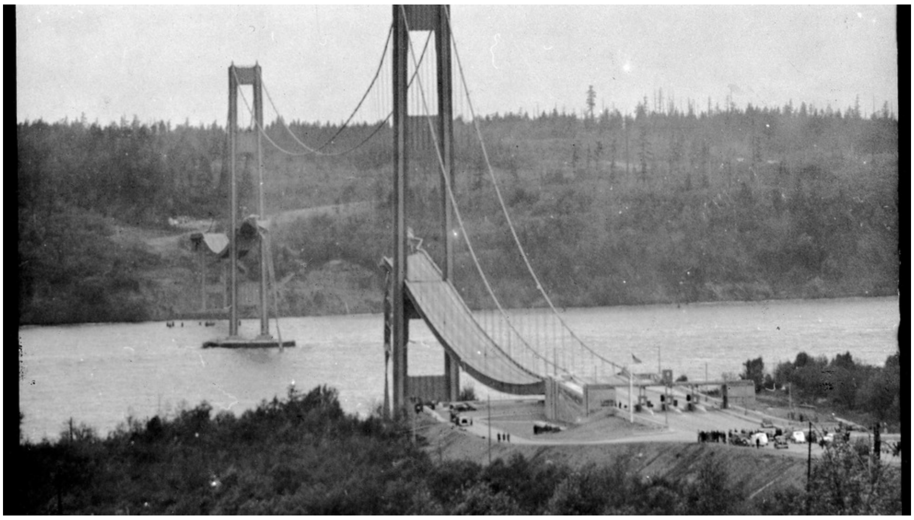
| | Livret Tuteurs - APP 4 | LEPL1101 Algèbre |
|---|---|---|
| 2018-2019 | **APP4 - *Evolution de population*** | **Auteurs :** RJ, VW |

*Ce livret contient toutes les informations pour réaliser les activités prévues dans le cadre de l'APP4 du cours LEPL1101.*



Les valeurs propres de systèmes linéaires sont d'une importance cruciale dans une écrasante majorité des systèmes d'ingénierie. On en découvrira l'utilité pour des modèles d'évolution de population dans cet APP. En génie civil, les valeurs propres fournissent les modes principaux de vibration des structures mécaniques. Le pont de Tacoma fut détruit en quelques secondes en 1940 à cause de phénomènes de vibration. L'oscillation du pont correspond à des vecteurs propres du système linéaire sous-jacent.

# Séance Aller - Evolution de population

**Acquis d'apprentissage visés par l'APP (à faire découvrir) :**

- Définir et utiliser les notions de valeurs et vecteurs propres d'opérateurs linéaires.
- Discuter les conditions pour que les vecteurs propres forment une base de $\mathbb{R}^n$.
- Diagonaliser une matrice par transformation de similitude et exploiter une telle factorisation pour étudier des problèmes d'évolution.

**Quelques guidelines pour les tuteurs**

Ce problème vise à faire apparaitre une matrice d'évolution de population. On est amené, à la fois pour analyser l'évolution à long terme (calcul des puissances de la matrice) et pour examiner les population susceptibles d'extinction, à en calculer les valeurs propres et vecteurs propres associés.

$$P(j+1) = AP(j) \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 7/3 & 5/6 & -3/2 \\ 2/3 & 17/12 & -3/4 \\ 2/3 & 11/12 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrice $A$ sont 2, 1 et 1/2.

On espère voir les étudiants suivre la démarche suivante :

1. Ecrire l'évolution de la population comme un système d'équations linéaires et en extraire la matrice d'évolution. Se poser la question du calcul pratique, sans outil informatique, des puissances de cette matrice.
2. La première question demande évidemment de poser un problème de valeurs et vecteurs propres et la deuxième suggère d'identifier la ou les valeurs propres de valeur absolue inférieure à 1.
3. La troisième question est plus ouverte. Une solution consiste à prendre le vecteur propre correspondant à la valeur propre de valeur absolue inférieure à 1 et de choisir celui-ci tel que le nombre d'agents de catégorie III est égal à 3 000 000. Ensuite, on vérifie qu'après 22 jours, la population initiale est éteinte. Il reste enfin à étudier le cas de petites perturbations initiales et à montrer que, si les vecteurs propres forment une base, un vecteur initial quelconque pourra s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs propres et la solution de l'équation d'évolution explosera nécessairement s'il existe une valeur propre de valeur absolue supérieure à 1 et si le vecteur initial possède une composante non nulle suivant le vecteur propre correspondant à cette valeur propre.

# Séance Aller - Evolution de population - Enoncé

Pour cette première séance, vous devez parcourir les trois premières étapes de la résolution d'un APP (cf. APP1 & APP2)

### Evolution de population

Un laboratoire vient de mettre au point une substance constituée d'agents prédateurs de cellules cancéreuses, substance à injecter dans les parties du corps atteintes de cancer. La population de ces agents est répartie en trois catégories, notées I, II, et III. Les agents ne vivent qu'un jour, mais se reproduisent et créent d'autres agents avant de disparaître. Chaque jour, en moyenne, chaque agent de la catégorie I, avant de disparaitre, donne naissance à 2,333 agents de la catégorie I, 0,6667 agents de la catégorie II et 0,6667 agents de la catégorie III. De même, chaque jour, en moyenne, chaque agent de la catégorie II, avant de disparaitre, donne naissance à 0,8333 agents de la catégorie I, 1,4167 agents de la catégorie II et 0,9167 agents de la catégorie III. les agents de la catégorie III, quant à eux, sont agressifs à la fois vis-à-vis des agents des trois catégories mais aussi, et c'est là leur intérêt, vis-à-vis des cellules cancéreuses qu'ils sont seuls à pouvoir pénétrer et détruire.

Chaque jour, en moyenne, avant de disparaitre, chaque agent de la catégorie III détruit 1,5 agents de la catégorie I, 0,75 agents de la catégorie II et 0,25 agents de la catégorie III et pénètre une cellule cancéreuse qu'il détruit. On suppose pour simplifier que les agents de la catégorie III détruisent les autres agents après que les deux autres catégories se soient reproduites. Cependant, vu le caractère très agressif des agents de la catégorie III, cette substance ne peut subsister plus de 22 jours dans l'organisme, sous peine d'attaquer aussi les cellules saines.

1. Déterminer les répartitions de population qui évoluent de manière proportionnelle à elles-mêmes au cours du temps (ce sont, en quelque sorte, des répartitions proportionnelles stables).
2. Identifier une telle répartition dont les valeurs absolues décroissent au fil du temps.
3. Si on estime à 3 000 000 le nombre de cellules cancéreuses à détruire, déterminer une population initiale d'agents (nombre exact d'agents de chaque catégorie) que l'on peut injecter dans la partie visée afin de détruire les cellules cancéreuses et préserver les bonnes cellules. Que se passe-t-il si le nombre exact d'agents de chaque catégorie n'est pas parfaitement respecté ?

# Séance Retour - Evolution de population

**Acquis d'apprentissage visés par l'APP :**

- Définir et utiliser les notions de valeurs et vecteurs propres d'opérateurs linéaires.
- Discuter les conditions pour que les vecteurs propres forment une base de $\mathbb{R}^n$.
- Diagonaliser une matrice par transformation de similitude et exploiter une telle factorisation pour étudier des problèmes d'évolution.

**Quelques guidelines pour les tuteurs**

Vérifier que les acquis d'apprentissage mentionnés ci-dessus ont bien fait l'objet d'un travail personnel des étudiants et que la mise en commun dans le groupe permet bien de les valider et de consolider éventuellement certaines compréhensions encore un peu fragiles.

**Des ressources pour traiter la situation-problème**

Le livre de G. Strang

Autres ressources :

Le plus simple pour trouver des ressources utiles consiste à utiliser un moteur de recherche sur Internet avec les termes suivants (par exemple) :

— dynamique linéaire de population

— valeurs propres

Ajoutez ici d'autres termes utiles apparus lors de la discussion en groupe :

— ...

— ...

— ...

— ...

— ...

— ...

— ...

— ...

— ...

— ...

— ...

— ...

# Séance Aller - Clôture

## Consignes pour travailler en autonomie

Avant de quitter la salle, le groupe vérifie que chacun de ses membres a bien compris ce qui est attendu de lui pendant la phase de travail individuel. Si nécessaire, le groupe se donne les moyens d'avoir des contacts entre membres AVANT la séance retour.

# Séance Retour - Evolution de population

Pour cette deuxième séance, vous devez parcourir les trois dernières étapes du modèle APP (cf. APP1 & APP2). Assurez-vous qu'au delà de la résolution du problème, vous avez bien acquis les apprentissages relatifs aux valeurs et vecteurs propres d'opérateurs linéaires.

## Séance Retour - Auto-évaluation des apprentissages individuels

Page laissée intentionnellement blanche

# Auto-évaluation des apprentissages individuels

1. Pour chacun des objectifs de cet APP, estimez vous-même votre niveau de compétence avant le traitement de la situation-problème et au terme de ce traitement (notez par un nombre entier compris entre 0 et 5 svp) en appliquant le barème suivant :

— 0 : Je ne sais rien sur le sujet

— 1 : J'ai entendu parler de ce sujet, mais je ne suis pas certain de ce que je sais

— 2 : Je sais dire l'une ou l'autre chose correcte en ce qui concerne ce sujet

— 3 : Je sais décrire les principaux éléments en ce qui concerne ce sujet

— 4 : Je sais en décrire tous les éléments pertinents ainsi que les relations entre eux

— 5 : Je suis capable d'argumenter mes choix, de justifier mes affirmations, mes décisions

| **J'étais/je suis capable** | **avant l'APP** | **après l'APP** |
|---|---|---|
| 1.Définir et utiliser les notions de valeurs et vecteurs propres d'opérateurs linéaires | | |
| 2. Discuter les conditions pour que les vecteurs propres forment une base de $\mathbb{R}^n$ | | |
| 3. Diagonaliser une matrice par transformation de similitude et exploiter une telle factorisation pour étudier des problèmes d'évolution | | |