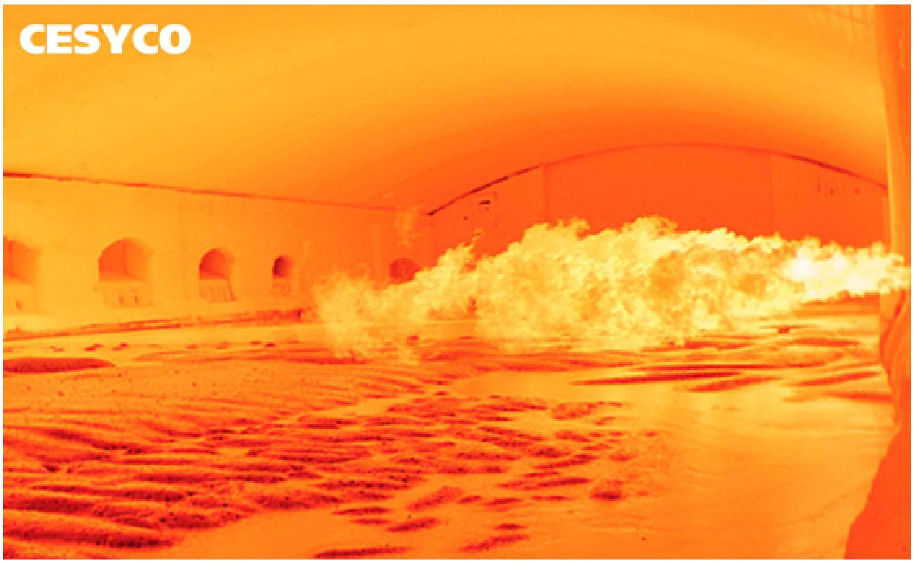
	Livret Tuteurs - APP 3	LEPL1101 Algèbre
2018-2019	**APP3 - *Le four de verrerie***	**Auteurs :** RJ, VW

Ce livret contient toutes les informations pour réaliser les activités prévues dans le cadre de l'APP3 du cours LEPL1101.



Séance Aller - Le four de verrerie

Acquis d'apprentissage visés par l'APP (à faire découvrir) :

- Modéliser un problème d'approximation en utilisant la notion de projection.
- Définir et utiliser le produit scalaire adéquat pour calculer des projections
- Résoudre un problème d'approximation, ou un système sur-déterminé d'équations linéaires
- Formuler un problème d'approximation aux sens des moindres carrés et en déduire la procédure de Gram-Schmidt associée et la factorisation QR d'une matrice A.

Quelques guidelines pour les tuteurs

Les étudiants doivent progressivement comprendre qu'ils se trouvent en présence d'un système de 500 équations à 3 inconnues que l'on peut formuler comme suit :

$$aY_p + bU_p + cE = \hat{Y}$$

où

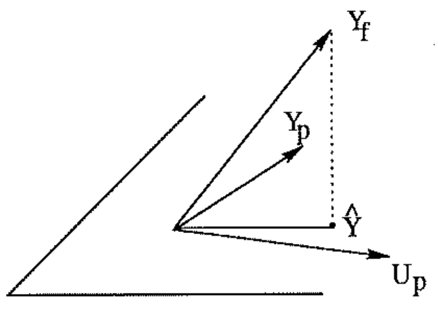
$$Y_p = (y(1), \ldots, y(500))^T, U_p = (u(1), \ldots, u(500))^T, E = (1, \ldots, 1)^T, \hat{Y} = (\hat{y}(2), \ldots, \hat{y}(501))^T.$$

Ce système n'est en général pas soluble puisque $\hat{Y}$ ainsi que les paramètres a, b et c sont inconnus. Le meilleur modèle de prédiction est évidemment celui où $\hat{y}(t+i) = y(t+i)$ quel que soit i. Le système se récrit alors :

$$aY_p + bU_p + cE = Y_f \text{ où } Y_f = (y(2), \ldots, y(501))^T.$$

Ce système n'a probablement pas de solution exacte car Y_f n'appartient pas à l'espace engendré par les vecteurs Y_p, U_p et E. On cherche en fait, dans l'espace engendré par ces trois vecteurs, le vecteur le plus proche de Y_f. Le plus proche fait penser à une notion de distance, mais comment la définir ?

Pour poursuivre la réflexion, il est utile que les étudiants trouvent une analogie avec un problème beaucoup plus simple : trouver la meilleure approximation possible d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ dans un plan auquel ce vecteur n'appartient pas. le dessin ci-dessous illustre le problème (et sa solution !).



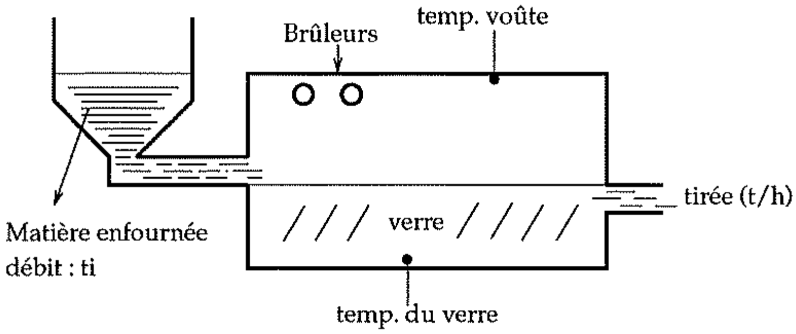
Les étudiants doivent donc penser à la notion de projection orthogonale et se poser les bonnes questions : comment la définit-on ? Est-elle unique ? Quel lien avec le produit scalaire ?

Enfin, à l'issue du problème, les étudiants doivent avoir résolu (formellement) le système au sens des moindres carrés, soit par la factorisation QR, soit via les équations normales.

Séance Aller - Le four de verrerie - Enoncé

Pour cette première séance, vous devez parcourir les trois premières étapes de la résolution d'un APP (cf. APP1 & APP2)

Le four de verrerie



La figure ci-dessus illustre schématiquement un four de verrerie. La matière à fondre (sable, chaux...) est enfournée à une extrémité, fondue grâce à la chaleur fournie par des brûleurs à gaz et le verre fondu sort du four (tirée) pour la suite du traitement (bouteilles, vitrage...). La qualité des produits requiert une température de verre aussi stable que possible. Pour contrôler cette température, on désire trouver un modèle de prédiction de la température future du verre en fonction des mesures présentes de température du verre et de température de voûte (qui est directement liée à l'énergie fournie par les brûleurs).

On considère (pour simplifier) que la tirée est constante et n'intervient donc pas dans la prédiction.

On cherche un modèle de prédiction linéaire de la forme suivante :

$$\hat{y}(t+1) = ay(t) + bu(t) + c$$

où

- $y(t)$ est la température du verre à l'instant t
- $u(t)$ est la température de voûte à l'instant t
- $\hat{y}(t+1)$ est la prédiction de la température du verre à l'instant $t+1$, c'est à dire, dans notre cas, une heure plus tard.
- a, b et c sont des coefficients à déterminer

Pour trouver le meilleur modèle, on dispose de 501 mesures, effectuées toutes les heures, des températures de voûte et du verre.

Déterminer le meilleur modèle de prédiction ainsi défini.

Séance Retour - Le four de verrerie

Acquis d'apprentissage visés par l'APP :

— Modéliser un problème d'approximation en utilisant la notion de projection

— Définir et utiliser le produit scalaire adéquat pour calculer des projections

— Résoudre un problème d'approximation, ou un système sur-déterminé d'équations linéaires

— Formuler un problème d'approximation aux sens des moindres carrés et en déduire la procédure de Gram-Schmidt associée et la factorisation QR d'une matrice A.

Quelques guidelines pour les tuteurs

Vérifier que les acquis d'apprentissage mentionnés ci-dessus ont bien fait l'objet d'un travail personnel des étudiants et que la mise en commun dans le groupe permet bien de les valider et de consolider éventuellement certaines compréhensions encore un peu fragiles.

Des ressources pour traiter la situation-problème

Le livre de G. Strang

Autres ressources :

Le plus simple pour trouver des ressources utiles consiste à utiliser un moteur de recherche sur Internet avec les termes suivants (par exemple) :

- approximation linéaire
- projection
- distance (en algèbre)

Ajoutez ici d'autres termes utiles apparus lors de la discussion en groupe :

- ...
- ...
- ...
- ...
- ...
- ...
- ...
- ...
- ...
- ...
- ...
- ...

Séance Aller - Clôture

Consignes pour travailler en autonomie

Avant de quitter la salle, le groupe vérifie que chacun de ses membres a bien compris ce qui est attendu de lui pendant la phase de travail individuel. Si nécessaire, le groupe se donne les moyens d'avoir des contacts entre membres AVANT la séance retour.

Séance Retour - Le four de verrerie

Pour cette deuxième séance, vous devez parcourir les trois dernières étapes du modèle APP (cf. APP1 & APP2). Assurez-vous qu'au delà de la résolution du problème, vous avez bien acquis les apprentissages relatifs aux espaces euclidiens.

Séance Retour - Auto-évaluation des apprentissages individuels

Page laissée intentionnellement blanche

Auto-évaluation des apprentissages individuels

1. Pour chacun des objectifs de cet APP, estimez vous-même votre niveau de compétence avant le traitement de la situation-problème et au terme de ce traitement (notez par un nombre entier compris entre 0 et 5 svp) en appliquant le barème suivant :

— 0 : Je ne sais rien sur le sujet

— 1 : J'ai entendu parler de ce sujet, mais je ne suis pas certain de ce que je sais

— 2 : Je sais dire l'une ou l'autre chose correcte en ce qui concerne ce sujet

— 3 : Je sais décrire les principaux éléments en ce qui concerne ce sujet

— 4 : Je sais en décrire tous les éléments pertinents ainsi que les relations entre eux

— 5 : Je suis capable d'argumenter mes choix, de justifier mes affirmations, mes décisions

J'étais/je suis capable	**avant l'APP**	**après l'APP**
1.Modéliser un problème d'approximation en utilisant la notion de projection		
2. Définir et utiliser le produit scalaire adéquat pour calculer des projections		
3. Résoudre un problème d'approximation, ou un système sur-déterminé d'équations linéaires		
4. Formuler un problème d'approximation aux sens des moindres carrés et en déduire la procédure de Gram-Schmidt associée et la factorisation QR d'une matrice A		