scienceinfuse

ANTENNE DE FORMATION ET DE PROMOTION DU SECTEUR SCIENCES & TECHNOLOGIES

DOSSIER ENSEIGNANT

π

MATHS

Les équations du premier et du second degré à la règle et au compas

UCL

Scienceinfuse - Antenne de formation et de promotion du secteur sciences & technologies
rue des Wallons 72 L6.02.01 - 1348 Louvain-la-Neuve

Dans ce document, nous allons montrer que les quatre opérations arithmétiques de base (addition, soustraction, multiplication et division) ainsi que la racine carrée peuvent être réalisées à l'aide de la règle et du compas. Les solutions d'équations du premier et du second degré pouvant s'obtenir uniquement à partir des quatre opérations arithmétiques de base et de la racine carrée, nous pourrons donc résoudre les équations du premier et du second degré à la règle et au compas.

Nous commençons par rappeler quelques résultats sur les équations des premier et second degré ainsi que les deux principaux outils que nous utiliserons : les Théorèmes de Thalès et Pythagore.

1 Résultats préliminaires

1.1 Equation du premier degré

L'équation du premier degré

$$ax + b = 0$$

avec $a \neq 0$ peut se récrire

$$ax = -b$$

et donc sa solution est donnée par $x = -\frac{b}{a}$.

1.2 Equation du second degré

L'équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0$$

avec $a \neq 0$ peut se récrire

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

ou encore

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

En réduisant le membre de droite au même dénominateur, on obtient

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

et donc

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}.$$

On en déduit

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Cette expression a un sens dans $\mathbb{R}$ si $b^2 - 4ac \geq 0$.

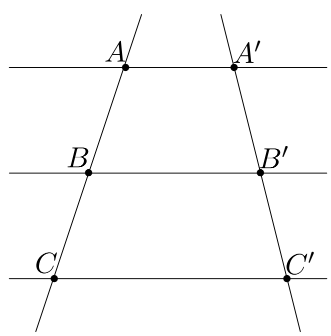
1.3 Théorème de Thalès

Ce résultat traduit le fait que la projection d'une droite sur une autre, suivant une direction donnée, conserve les proportions.

Théorème 1. – *Trois droites parallèles déterminent sur deux sécantes des segments homologues proportionnels.*

Autrement dit, si trois droites parallèles rencontrent deux droites d et d', respectivement et dans cet ordre, en A, B, C et A', B', C', alors

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|A'C'|}{|AC|}.$$

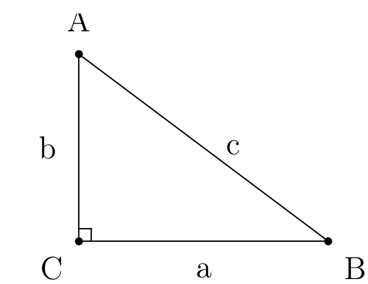


En permutant les termes moyens des fractions, on peut faire naître d'autres égalités de rapports :

$$\frac{|A'B'|}{|B'C'|} = \frac{|AB|}{|BC|}, \qquad \frac{|B'C'|}{|A'C'|} = \frac{|BC|}{|AC|}, \qquad \frac{|A'B'|}{|A'C'|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

1.4 Théorème de Pythagore

Théorème 2. – *Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés :* $a^2 + b^2 = c^2$.



Ce résultat permet de calculer la longueur d'un des côtés d'un triangle rectangle si l'on connaît les deux autres.

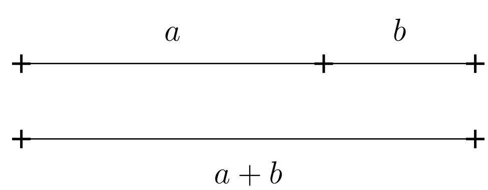
2 Constructions à la règle et au compas

Les quatre opérations arithmétiques de base (addition, soustraction, multiplication et division) ainsi que la racine carrée peuvent être réalisées à la règle et au compas.

Soit a et b deux nombres réels positifs.

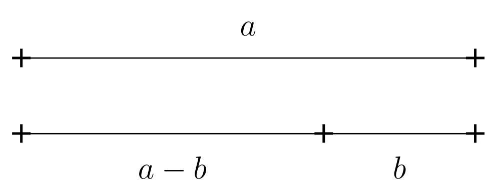
2.1 Addition de deux nombres

Pour additionner a et b, il suffit de mettre au bout du segment de longueur a le segment de longueur b :



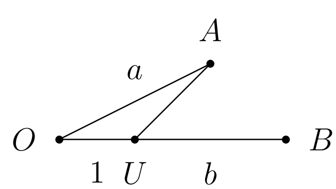
2.2 Soustraction de deux nombres

Pour soustraire a et b, il suffit de mettre au bout du segment de longueur a le segment de longueur b dans l'autre sens :

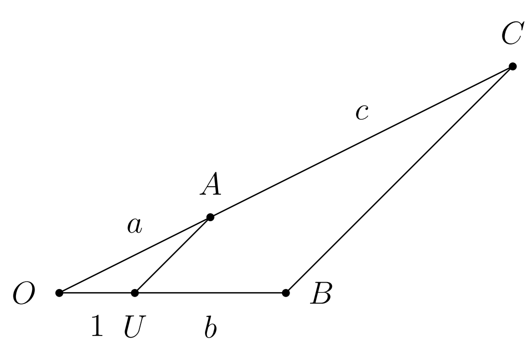


2.3 Multiplication de deux nombres

Pour multiplier a et b, on reporte des segments de longueur a et b ainsi que le segment unité sur deux droites sécantes comme indiqué sur la figure ci-dessous.



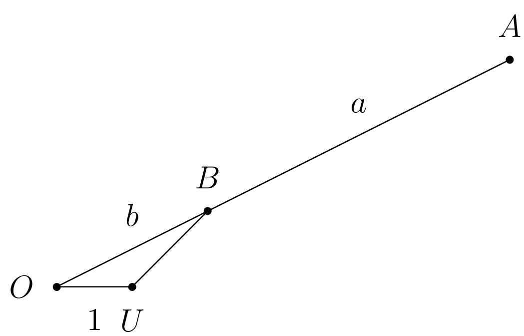
On trace ensuite la droite parallèle à la droite AU passant par B. Soit C le point d'intersection de cette droite avec la droite OA et c la distance entre les points A et C.



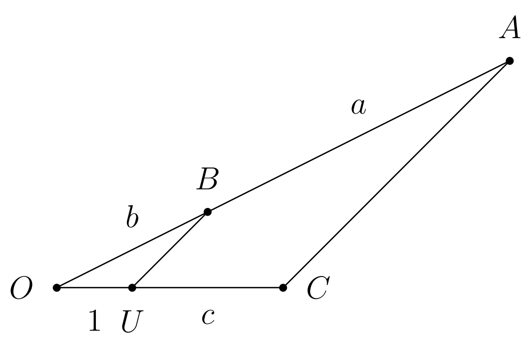
Par une application du Théorème de Thalès, on obtient $\frac{a}{1} = \frac{c}{b}$ et donc $c = a \cdot b$.

2.4 Division de deux nombres

Pour diviser a par $b \neq 0$, on reporte des segments de longueur a et b ainsi que le segment unité sur deux droites sécantes comme indiqué sur la figure ci-dessous.



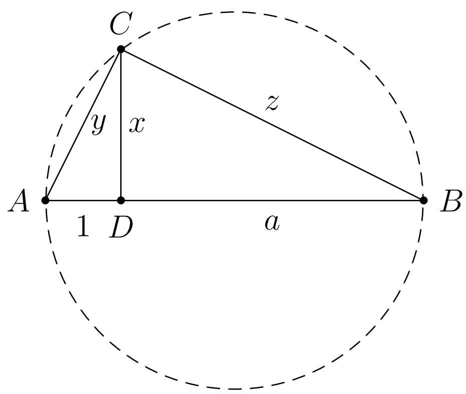
On trace ensuite la droite parallèle à la droite BU passant par A. Soit C le point d'intersection de cette droite avec la droite OU et c la distance entre les points U et C.



Par une application du Théorème de Thalès, on obtient $\frac{b}{1} = \frac{a}{c}$ et donc $c = \frac{a}{b}$.

2.5 Racine carrée d'un nombre $a > 0$

On commence par construire le segment $1 + a$ en mettant bout à bout des segments de longueur 1 et a et on trace ensuite le cercle de diamètre $1 + a$. Notons A et D les origine et extrémité du segment de longueur 1 et B l'extrémité du segment de longueur a.
Par le point D, on trace une perpendiculaire au segment $1 + a$. Cette perpendiculaire coupe le cerlce en un point C.
Le triangle ABC ainsi obtenu est rectangle puisqu'il est inscrit dans un demi-cercle.



Soit x la longueur du segment DC, y la longueur du segment AC et z la longueur du segment BC. Des applications du Théorème de Pythagore dans les triangles rectangles ACD, DCB et ABC donnent

$$1^2 + x^2 = y^2, \qquad a^2 + x^2 = z^2, \qquad y^2 + z^2 = (1 + a)^2.$$

En injectant les deux premières égalités dans la troisième, on obtient

$$1 + x^2 + a^2 + x^2 = (1 + a)^2$$

et donc

$$1 + 2x^2 + a^2 = 1 + 2a + a^2.$$

Après simplification, on trouve

$$x^2 = a \qquad \text{et donc} \qquad x = \sqrt{a}.$$

3 Résolution des équations

Nous venons donc de prouver que les quatre opérations arithmétiques élémentaires ainsi que la racine carrée sont réalisables à la règle et au compas. Nous pouvons alors facilement montrer le résultat suivant.

Théorème 3. – *On peut résoudre des équations du premier et du second degré à l'aide de la règle et du compas.*

Equation du premier degré : nous avons vu dans le point 1.1 ci-dessus que la solution de l'équation $ax + b = 0$ peut s'écrire $x = -\frac{b}{a}$. Cette solution étant le quotient de deux nombres, elle peut, selon le point 2.4 ci-dessus, se construire à la règle et au compas.

Equation du second degré : nous avons vu dans le point 1.2 ci-dessus que les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ peuvent s'écrire

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

à condition que $b^2 - 4ac \geq 0$. Ces solutions ne contenant que des opérations arithmétiques élémentaires et des racines carrées, peuvent se construire à la règle et au compas en vertu du point 2 ci-dessus.

On peut également montrer la réciproque du résultat ci-dessus.

Théorème 4. – *En traçant des droites et des cercles, on ne fait que construire des racines d'équations du premier ou du second degré.*

On munit le plan d'un repère orthonormé.

Cas 1 : Les **coordonnées du point d'intersection de deux droites** sont solution d'une équation du premier degré dont les coefficients sont obtenus à partir des coefficients des deux droites et des quatres opérations arithmétiques de base.

En effet, l'intersection de deux droites s'obtient en résolvant le système formé par les équations des deux droites

$$\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

• Si $b \neq 0$, on peut isoler y dans (1)

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

et en remplaçant dans (2), on obtient

$$a'x + b'\left(-\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}\right) = c'$$
$$x\left(a' - \frac{ab'}{b}\right) = c' - \frac{b'c}{b}$$

x est donc solution de l'équation du premier degré

$$x(a'b - ab') = c'b - b'c$$

obtenue à l'aide des coefficients a, b, c, a', b', c' et des quatre opérations arithmétiques de base. En remplaçant la valeur de x dans (1), on trouve

$$a\left(\frac{c'b - b'c}{a'b - ab'}\right) + by = c$$

y est donc solution de l'équation du premier degré

$$by = c - \left(\frac{ac'b - ab'c}{a'b - ab'}\right)$$

obtenue à l'aide des coefficients a, b, c, a', b', c' et des quatre opérations arithmétiques de base.

• Si $b = 0$, alors dans (1) on a $a \neq 0$ et

$$ax = c$$

et en remplaçant dans (2)

$$a'\left(\frac{c}{a}\right) + b'y = c'$$
$$b'y = \frac{ac' - a'c}{a}$$

x et y sont donc solutions d'une équation du premier degré dont les coefficients sont obtenus à l'aide de a, b, c, a', b', c' et des quatre opérations arithmétiques de base.

Cas 2 : Les **coordonnées du point d'intersection d'une droite et d'un cercle** sont solution d'équations du premier et second degré dont les coefficients sont obtenus à partir des coefficients de la droite et du cercle et des quatres opérations arithmétiques de base.

En effet, l'intersection d'une droite et d'un cercle s'obtient en résolvant le système

$$\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ (x - a')^2 + (y - b')^2 = R^2 & (2) \end{cases}$$

• Si $b \neq 0$, on peut isoler y dans (1)

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

et en remplaçant dans (2), on obtient

$$(x - a')^2 + \left(\frac{c}{b} - \frac{a}{b}x - b'\right)^2 = R^2$$

$$(x - a')^2 + \left(\frac{c - bb'}{b} - \frac{a}{b}x\right)^2 = R^2$$

$$x^2\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) - 2x\left(a' + \frac{ac - abb'}{b^2}\right) + \left(\frac{c - bb'}{b}\right)^2 + (a')^2 - R^2 = 0$$

x est donc solution d'une équation du second degré dont les coefficients sont obtenus à l'aide de a, b, c, a', b', R et des quatre opérations arithmétiques de base.
Après avoir résolu cette équation, on remplace x par la valeur trouvée dans (1). y est alors solution d'une équation du premier degré dont les coefficients sont obtenus à l'aide de a, b, c, a', b', R et des quatre opérations arithmétiques de base.

• Si $b = 0$, alors dans (1) on a $a \neq 0$ et

$$ax = c$$

et en remplaçant dans (2)

$$\left(\frac{c}{a} - a'\right)^2 + (y - b')^2 = R^2$$

$$y^2 + (b')^2 - 2b'y + \left(\frac{c - aa'}{a}\right)^2 - R^2 = 0$$

x est donc solution d'une équation du premier degré et y est solution d'une équation du second degré dont les coefficients sont obtenus à l'aide de a, b, c, a', b', R et des quatre opérations arithmétiques de base.

Cas 3 : Les **coordonnées du point d'intersection de deux cercles** sont solution d'équations du premier et second degré dont les coefficients sont obtenus à partir des coefficients des deux cercles et des quatres opérations arithmétiques de base.

En effet, l'intersection de deux cercles s'obtient en résolvant le système

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \\ (x-a')^2 + (y-b')^2 = (R')^2 \end{cases}$$

Ce système est équivalent au système

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \\ (x-a)^2 - (x-a')^2 + (y-b)^2 - (y-b')^2 = R^2 - (R')^2 \end{cases}$$

ou encore au système

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \\ (2a'-2a)x + (2b'-2b)y = R^2 - (R')^2 + (a')^2 - a^2 + (b')^2 - b^2 \end{cases}$$

Cette deuxième équation est l'équation d'une droite. On est donc ramené au Cas 2.