Ce que nous ont appris Fanny et Gaston

Etude des fonctions

On s'intéresse aux fonctions d'une variable réelle, à valeurs réelles. C'est un sujet sur lequel nous avons déjà beaucoup travaillé avant de rejoindre l'EPL. Mais voici un aspect neuf : il ne s'agit pas seulement d'examiner *une* fonction particulière — le cosinus ou l'exponentielle, par exemple —, mais surtout d'étudier *les* fonctions qui ont certaines propriétés remarquables, comme la continuité ou la dérivabilité. En bref, nous désirons accéder à une *théorie*, dans le but de pouvoir appliquer ses résultats aux problèmes qui nous intéressent. Les *objets* de la théorie sont les *fonctions* (de même que les objets de l'arithmétique sont les nombres entiers). On peut effectuer certaines *opérations* sur ces objets. Par exemple, si F et G sont deux fonctions définies sur un même ensemble alors on peut former la *fonction somme*, $F+G$, et la *fonction différence*, $F-G$. On notera que les fonctions F et G sont *égales* si et seulement si leur différence est la *fonction nulle*.

Voyons une opération moins banale. Si F est une fonction dérivable alors on peut former la fonction F', qui est la *dérivée de F*. Les applications sont innombrables. Mentionnons celle-ci : pour prouver qu'une fonction est constante, il suffit de montrer que sa dérivée est nulle. Plus fort — mais cela revient au même —, pour prouver que deux fonctions sont égales à une constante additive près, il suffit de montrer que leurs dérivées sont égales. Bien entendu, on admettra qu'il s'agit de fonctions dérivables.

Il y a plusieurs façons de *définir* une fonction. Ce serait une erreur de considérer qu'une fonction n'est rien d'autre qu'une *formule* (éventuellement "compliquée") ; cela aurait pour effet d'appauvrir les mathématiques dans des proportions catastrophiques. Pensons à la façon dont Fanny et Gaston définissent les fonctions qu'ils ont imaginées. Ces fonctions sont représentables au moyen de formules simples (x^2 et 2^x), soit, mais c'est un "coup de chance" ; et les formules n'apparaissent évidemment pas dans les définitions elles-mêmes !

Méthodes de démonstration

Concernant les "trois solutions"

Notre objectif : "montrer que l'équation $x^2 = 2^x$ possède exactement trois solutions réelles". On pense à former la fonction différence $h := f-g$ (avec $f(x) := x^2$ et $g(x) := 2^x$). Ensuite, on envisage un raisonnement par l'absurde : supposer que h s'annule en quatre points et aboutir à une contradiction. Voici les principales étapes du raisonnement :

1. observer que h est indéfiniment dérivable (car f et g le sont) ;
2. appliquer le *théorème de Rolle* d'abord à h, puis à h', et enfin à h'' ;
3. dériver trois fois les fonctions f et g (en ayant noté que $g(x) = e^{ax}$ avec $a := \ln 2$) ;

4. se rappeler que la fonction exponentielle ne s'annule en aucun point.

Commentaire Le raisonnement esquissé ci-dessus met en lumière la puissance du concept de dérivée. Au départ, la définition de la dérivée est *ponctuelle*. Il s'agit d'un *microscope mathématique* (pensons à la notion de vitesse instantanée en physique). Cependant, on voit qu'elle permet de révéler des propriétés *globales* d'une fonction. Dans le cas qui nous occupe : "l'équation $x^2 = 2^x$ n'admet pas plus de quatre racines réelles". Cela tient au fait que nous avons défini une *fonction* dérivée : nous pouvons braquer notre microscope sur n'importe quel point. Le théorème de Rolle est un résultat décisif dans ce passage du ponctuel au global.

Le *théorème des accroissements finis* (ou *théorème de la valeur moyenne*), qui résulte du théorème de Rolle et qui généralise celui-ci, est un des résultats les plus importants de l'analyse mathématique. Il est attribué à Lagrange (1736–1813).

Concernant l'unicité de la fonction g

Notre objectif : "utiliser le fait que la fonction g est continue pour montrer que la réponse $g(x) = 2^x$ est la seule possible". C'est une situation classique en mathématiques, dans différents domaines : montrer qu'un problème admet une solution *unique* (en admettant qu'il existe au moins une solution). On raisonne souvent dans les termes que voici.

$$\boxed{\text{Considérons deux solutions, } G \text{ et } g. \text{ Il s'agit de prouver que } G = g.}$$

Dans la théorie des fonctions (et dans bien d'autres théories) on peut effectuer l'opération de *soustraction*. Une bonne idée :

$$\boxed{\text{pour prouver que } G = g, \text{ montrons que } G - g = 0 \text{ (la fonction nulle).}}$$

L'idée s'applique de manière efficace à notre problème en raison du fait que la différence de deux fonctions continues est une fonction continue. C'est un *théorème*, dont il faut se souvenir au bon moment.

Mais ce qui précède n'est encore qu'un cadre de réflexion fort général. Il reste à trouver les moyens de preuve qui sont adaptés, de manière spécifique, au problème considéré. Voyons cela. En se basant sur les hypothèses, on constate (i) que la fonction $D := G - g$ est continue et (ii) qu'elle s'annule en tous les points rationnels. Mais ces deux propriétés sont contradictoires, sauf si $D = 0$. Il s'agit donc d'un raisonnement *par l'absurde* :

$$\boxed{\text{on suppose } D \neq 0 \text{ et on aboutit à une contradiction.}}$$

Pour cela, on manipule la *définition* de ce qu'est une fonction continue. C'est une nécessité, puisque l'hypothèse de continuité joue un rôle essentiel dans la question (si on la supprime, l'affirmation cesse d'être vraie). Or la notion de continuité fait intervenir la définition d'une *limite* (pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que ...). Un travail préliminaire consiste donc à écrire l'hypothèse de continuité, de manière explicite, en utilisant "epsilon et delta". Après cela, on utilise le fait que tout nombre réel peut être approché d'aussi près que l'on veut par des nombres rationnels. En fin de compte, la démonstration fait apparaître le caractère pleinement **opérationnel** du concept de limite. Celui-ci est très difficile à saisir de prime abord, mais il mérite que de grands efforts de réflexion lui soient consacrés, en raison de son importance vitale.

Remarque La preuve par l'absurde est un outil dont on doit être capable de se servir. Mais ce n'est qu'un moyen, parmi d'autres. Il ne faut pas en abuser. Profitons de cette occasion pour mentionner un autre principe de démonstration indispensable, dont le champ d'application est fort différent : la preuve *par induction* (ou *par récurrence*). Ce principe doit être utilisé pour répondre complètement à l'avant-dernière question. Comment prouver, de façon rigoureuse, que $f(2^n) = 4^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

1 Conclusion

En répondant à la denière question nous avons testé l'efficacité des concepts de *limite* et de *fonction continue* dans un problème simple — pour lequel la solution est intuitivement évidente. Nous sommes satisfaits : ça marche ! Bien sûr, il faudrait effectuer des tests plus sévères pour nous convaincre que l'analyse mathématique est un édifice solide, reposant entièrement sur la notion de limite (*"le seul concept vraiment nouveau que l'analyse mathématique introduit"*, selon J. Mawhin, Analyse, De Boeck Université, 1992).

La réponse à la question (a) nous a fait utiliser le *théorème des valeurs intermédiaires*, un bon révélateur du fait que la notion de fonction continue tient ses promesses. En traitant la question (b), nous entrons dans le royaume des *fonctions dérivables*. Nous franchissons une étape importante en découvrant un théorème qui donne des résultats spectaculaires, inaccessibles à l'intuition directe. Il s'agit du *théorème de Rolle*, prélude au théorème des accroissements finis. Ce dernier est à l'origine, notamment, des *formules de Taylor*, qui fournissent des méthodes d'approximation d'une grande utilité.

Un dernier mot. Les fonctions f et g interviennent souvent dans les applications, notamment dans les domaines de la *combinatoire* et de l'analyse de la *complexité d'algorithmes*. Pour un naturel n, désignons par A_n un ensemble de n éléments. Par exemple, $A_n := \{1, \cdots, n\}$. On voit que $f(n)$, égal à n^2, compte les *couples* d'éléments de A_n, tandis que $g(n)$, égal à 2^n, compte les *parties* (les sous-ensembles) de A_n. Pensons à une situation où $f(n)$ et $g(n)$ sont les nombres d'opérations requises par certains algorithmes pour résoudre des problèmes de taille n. Comme l'indiquent les définitions proposées par Fanny et Gaston, lorsque n est multiplié par deux $f(n)$ est multiplié par quatre tandis que $g(n)$ est élevé au carré. Il est évident que si $n \gg 1$ alors $g(n) \gg f(n)$. Voici des données numériques à ce sujet :

n	1	2	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
$f(n)$	1	2^2	2^4	2^6	2^8	2^{10}	2^{12}	2^{14}	2^{16}	2^{18}	2^{20}
$g(n)$	2	2^2	2^4	2^8	2^{16}	2^{32}	2^{64}	2^{128}	2^{256}	2^{512}	2^{1024}

Par exemple, (1) $f(16) = 256$ et $g(16) = 65536$; (2) $f(256) = 65536$ et $g(256) \approx 1.158 \cdot 10^{77}$.