APP0 - Fanny et Gaston

Les fonctions $x \mapsto f(x) := x^2$ et $g : x \mapsto g(x) := 2^x$

Introduction

On demande aux étudiants d'entrer dans le monde de l'analyse mathématique avec un regard neuf, en travaillant sur un problème dont les acteurs sont bien connus mais qui a des aspects déconcertants. Ils devront notamment :

- exercer leur intuition et leur esprit de découverte pour donner une réponse plausible à une question simple, en réalisant que tout n'est pas dit à ce stade de la réflexion ;
- découvrir comment appliquer certains théorèmes dans des situations qui peuvent leur être familières ou étrangères, selon les cas ;
- utiliser des formules et manipuler des expressions, de manière judicieuse, dans le but de répondre à une question ou de résoudre un problème ;
- reconnaître la nécessité de la précision dans l'usage des concepts et l'importance de la rigueur dans les preuves, et cela en construisant eux-mêmes des démonstrations qui mettent en œuvre des principes et des définitions.

Les quatre points qui viennent d'être mentionnés correspondent, dans les grandes lignes, aux quatre actes de la pièce intitulée *"Le jeu des deux fonctions"*. Voici les principaux objectifs d'apprentissage, dans un langage technique.

- Premier acte. Notion de *fonction*. Propriétés algébriques et autres. Spécification.
- Deuxième acte. Une application de la continuité : le *théorème des valeurs intermédiaires*. Une application spectaculaire de la dérivée : le *théorème de Rolle*.
- Troisième acte. Les *polynômes de Taylor* — dans leur rôle d'approximation — et un exercice visant à découvrir la *formule de Newton–Raphson*.
- Quatrième acte. Méthodes de *démonstration*. Utilisation du concept de *continuité*.

Résolution du problème

Premier acte : devinons-nous de quelles fonctions il s'agit ?

Fanny et Gaston sortent d'une épreuve nationale des Olympiades Mathématiques. Ils s'en vont boire un verre au bistrot du coin, mais encore tout excités par la prestation qu'ils viennent d'effectuer, ils n'ont d'autre sujet de conversation que leur passion des mathématiques et décident de se lancer des défis : Chacun des deux acteurs pense à une fonction d'une variable réelle, à valeurs réelles ; il en donne des propriétés caractéristiques et demande à son interlocuteur d'identifier la fonction.

- *Fanny* : la fonction f est représentée par un *polynôme* ; elle prend la valeur 1 au point 1 et elle possède la propriété suivante. Si x est multiplié par deux alors $f(x)$ est multiplié par quatre. Quelle sera la réponse de Gaston ?

  Réponse Selon la règle de Fanny, $f(1) = 1$, $f(2) = 4 \cdot f(1) = 4 = 2^2$, $f(4) = 4 \cdot f(2) = 16 = 4^2$, $f(8) = 4 \cdot f(4) = 64 = 8^2$, $f(16) = 4 \cdot f(8) = 156 = 16^2$. On devine que f est donnée par $f(x) = x^2$. Notons que f est bien une fonction polynomiale.
- *Gaston* : la fonction g est *continue* ; elle prend la valeur 1 au point 0 et elle satisfait aux deux conditions suivantes. (i) Si x est augmenté d'une unité alors $g(x)$ est multiplié par deux. (ii) Si x est multiplié par m alors $g(x)$ est élevé à la puissance m, et cela pour tout $m \in \mathbb{N}$. Quelle sera la réponse de Fanny ?

  Réponse Selon la première règle de Gaston, $g(0) = 1$, $g(1) = 2 \cdot g(0) = 2$, $g(2) = 2 \cdot g(1) = 4 = 2^2$, $g(3) = 2 \cdot g(2) = 8 = 2^3$, $g(4) = 2 \cdot g(3) = 16 = 2^4$. On devine que g est donnée par $g(x) = 2^x$. Reste à vérifier que la seconde condition est satisfaite : $g(m \cdot x) = 2^{m \cdot x} = (2^x)^m = g(x)^m$. Notons que g est bien une fonction continue.

Commentaire Pour la fonction de Fanny on voit que $f(2^k) = 2^{2k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Une preuve rigoureuse se ferait par induction sur k (voir le quatrième acte). Pour la fonction de Gaston, on peut montrer que si x est *rationnel* alors $g(x) = 2^x$. Voici l'argument. (i) Si $a \in \mathbb{N}$ alors $g(a) = 2^a$ comme nous l'avons vu. Plus généralement, $g(x + a) = 2^a \cdot g(x)$ pour tout $a \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. (ii) Comme $1 = g(0) = g(-a + a) = 2^a \cdot g(-a)$, il vient $g(-a) = 2^{-a}$, pour tout naturel a. A ce stade la conclusion est que si $b \in \mathbb{Z}$ alors $g(b) = 2^b$. (iii) Soit $x \in \mathbb{Q}$. On note que $g(x) = \left(g(\frac{x}{2})\right)^2$, d'où $g(x) \geq 0$. Ecrivons $x = \frac{b}{a}$, avec $b \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Partant de $b = a \cdot x$ on obtient $2^b = g(b) = g(x)^a$, d'où $g(x) = 2^{b/a}$ puisque $g(x) \geq 0$, c'est-à-dire $g(x) = 2^x$. L'objectif est atteint.

Deuxième acte : en quels points prennent-elles la même valeur ?

Nos duettistes poursuivent l'exploration des deux fonctions f et g qu'ils ont définies. Ils aimeraient savoir si elles peuvent avoir des valeurs égales en certains points.

- En esquissant le graphe des deux fonctions, vous devinez le *nombre de points* x en lesquels $f(x) = g(x)$. Quel est ce nombre ? Certains de ces points sont-ils évidents ?

  Réponse Si le dessin n'est pas trop mauvais, on "voit" qu'il existe exactement *trois* nombres réels x vérifiant $x^2 = 2^x$. Le plus petit est négatif : $x_0 \approx -\frac{3}{4}$. Les deux autres sont positifs et les valeurs sont évidentes : $x_1 = 2$ et $x_2 = 4$.
- Gaston n'est pas convaincu par l'esquisse, réalisée sur un carton de bière de dimension réduite ! Comment pourrait-il démontrer, de manière rigoureuse, (a) que les solutions devinées *existent* et (b) qu'il n'y en a *pas d'autre* ?

  Suggestion Pour la partie (b), appliquez le *théorème de Rolle*.

  Réponse (a) L'existence des solutions x_1 et x_2 se démontre de façon directe : $f(2) = 4 = g(2)$ et $f(4) = 4^2 = 16 = 2^4 = g(4)$. Pour établir l'existence de x_0 on utilise le *théorème des valeurs intermédiaires*. D'une part, $f(-1) = 1$ et $g(-1) = \frac{1}{2}$, d'où $f(-1) > g(-1)$. D'autre part, $f(0) = 0$ et $g(0) = 1$, d'où $f(0) < g(0)$. Il en résulte que la fonction $f-g$ s'annule en un certain point (pas nécessairement unique) de l'intervalle ouvert $]-1, 0[$. L'existence de la solution x_0 est ainsi démontrée.

  (b) Introduisons la fonction différence $h := f - g$. Celle-ci est indéfiniment dérivable (puisque f et g le sont). Nous venons de voir que h s'annule en au moins trois points.

La thèse est que h s'annule en *exactement* trois points. Raisonnant par l'absurde, supposons que h s'annule en quatre points (au moins). Appliquant trois fois le théorème de Rolle, on en déduit que la fonction dérivée h' s'annule en trois points, que la fonction dérivée seconde h'' s'annule en deux points, et que la fonction dérivée troisième h''' s'annule en un point. Partant de $h(x) = x^2 - 2^x = x^2 - e^{(\ln 2)\cdot x}$ on calcule

$$h'(x) = 2x - (\ln 2)\cdot 2^x, \qquad h''(x) = 2 - (\ln 2)^2 \cdot 2^x, \qquad h'''(x) = -(\ln 2)^3 \cdot 2^x.$$

Il est alors manifeste que $h'''(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc h''' ne s'annule en aucun point. Nous aboutissons à une contradiction, ce qui démontre la thèse.

Troisième acte : comment calculer la solution négative ?

Fanny et Gaston ont prouvé l'existence et l'unicité d'un nombre réel négatif x_0 tel que $f(x_0) = g(x_0)$. Les règles de l'arithmétique montrent que x_0 est irrationnel. Cependant, il existe des méthodes permettant de calculer x_0 avec une grande précision. Pour appliquer ces méthodes numériques, on doit disposer d'une "estimation décente" de la solution recherchée.

– Comment utilisez-vous les *polynômes de Taylor* pour calculer une approximation de x_0, en résolvant une équation du second degré ?

  Réponse On pense à la formule de Taylor pour l'exponentielle : $e^{ax} \sim 1 + ax + \frac{1}{2!}a^2x^2 + \frac{1}{3!}a^3x^3 + \cdots$. A proximité de zéro, la fonction g est approchée au premier ordre par le binôme $g_1(x) := 1 + ax$ et au deuxième ordre par le trinôme $g_2(x) := 1 + ax + \frac{1}{2}a^2x^2$, avec $a := \ln 2 \approx 0.6931$. On obtient une première approximation du nombre x_0 en résolvant l'équation du second degré $x^2 = g_1(x)$. Cela donne $x = (a - \sqrt{4 + a^2})/2 \approx -0.7118$. Une deuxième approximation est obtenue à partir de l'équation du second degré $x^2 = g_2(x)$. Cela donne $x = (a - \sqrt{4 - a^2})/(2 - a^2) \approx -0.7785$.

  Commentaire La deuxième approximation est meilleure que la première. Voici la valeur numérique qui nous intéresse, avec douze décimales : $x_0 = -0.766664695962$; cela donne $f(x_0) = g(x_0) = 0.587774756035$. Mentionnons aussi une belle approximation rationnelle : $x_0 \approx -\frac{23}{30} = 0.7666666\cdots$.

– On désire obtenir x_0, par approximations successives, selon la *méthode de Newton–Raphson*. Expliquons le principe de celle-ci. Il s'agit de résoudre une équation de la forme $h(x) = 0$, pour une certaine fonction h ayant de bonnes propriétés que nous ne précisons pas ici. Soit a_n la $n$ième approximation de la solution, et soit T_n la tangente à la courbe d'équation $y = h(x)$ au point d'abscisse a_n. La $(n+1)$ième approximation, a_{n+1}, est définie comme l'abscisse de l'intersection de T_n avec l'axe Ox. Comment calculez-vous a_{n+1} à partir de a_n ?

  Réponse L'équation cartésienne de la droite T_n est $y = h(a_n) + h'(a_n)\cdot(x - a_n)$. On admettra que T_n n'est pas parallèle à l'axe Ox, c'est-à-dire que $h'(a_n) \neq 0$. Par définition, T_n passe par le point $(a_{n+1}, 0)$. Dès lors, il vient l'égalité $0 = h(a_n) + h'(a_n)\cdot(a_{n+1} - a_n)$, ce qui donne la *formule de Newton–Raphson*

$$a_{n+1} = a_n - \frac{h(a_n)}{h'(a_n)}.$$

Application La fonction h qui nous intéresse est celle dont on parle à la fin du deuxième acte, c'est-à-dire $h := f - g$. En effet, l'équation $f(x) = g(x)$ se traduit par $h(x) = 0$. La formule de Newton–Raphson s'écrit

$$a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2 - 2^{a_n}}{2a_n - (\log 2) \cdot 2^{a_n}}.$$

Appliquons-la de manière itérative en partant d'un certain nombre réel a_0. Cela produit la suite $(a_0, a_1, a_2, \cdots)$. En accord avec l'intuition, on peut montrer que si a_0 n'est pas trop éloigné de x_0 alors cette suite possède une limite, égale précisément à x_0.

Choisissons comme valeur initiale a_0 le résultat que donne l'approximation de Taylor du deuxième ordre, c'est-à-dire $a_0 := -0.7785$. On obtient $a_1 \approx -0.766726092500$, $a_2 \approx -0.766664697630$, $a_3 \approx -0.766664695962$. Le nombre a_3 donne la valeur de x_0 avec au moins douze décimales exactes.

Remarque Si on part de l'approximation $a_0 := -0.7118$ alors il faut une étape supplémentaire pour atteindre la même précision : $a_1 = -0.753554094813$, $a_2 = -0.766741573604$, $a_3 = -0.766664698577$, $a_4 = -0.766664695962$. On voit que, dans le cas qui nous occupe, le choix de la valeur initiale n'est pas critique. Par exemple, si on part de $a_0 := -1$ (résultant de l'approximation d'ordre zéro $2^x \sim 1$) alors on obtient $a_1 = -0.78692336687$, $a_2 = -0.766843379355$, $a_3 = -0.766664710088$, $a_4 = -0.766664695962$.

Complément Voici une preuve du fait que x_0 n'est pas rationnel. Raisonnant par l'absurde, considérons un nombre $c \in \mathbb{Q}$ tel que $c < 0$ et $2^c = c^2$. On peut écrire c, de façon unique, sous la forme $c = -b/a$ avec $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Il vient alors $2^{b/a} = a^2/b^2$. En élevant les deux membres de cette égalité à la puissance a et en multipliant le résultat par b^{2a} on obtient $a^{2a} = 2^b \cdot b^{2a}$. Cela implique que a est pair, et donc que b est impair. Ecrivons $a = 2^k \cdot q$ pour un certain $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et un certain $q \in 2\mathbb{N} + 1$. Il vient $2^{2ak} \cdot q^{2a} = 2^b \cdot b^{2a}$, d'où $2ak = b$ et $q = b$. Donc b doit être pair, ce qui est exclu.

Quatrième acte : pourquoi n'y a-t-il qu'*une* réponse aux devinettes ?

Au moment où Fanny et Gaston terminent leur n-ième (?) bière tout en rassemblant tout ce qu'ils ont appris sur ces deux fonctions, un doute soudain les envahit. Ces fonctions étaient elles les seules répondant aux caractéristiques décrites ?

– Concernant la fonction f, comment utilisez-vous le fait qu'il s'agit d'un *polynôme* pour montrer que la réponse de Gaston — que vous avez devinée — est la seule possible ?

  Solution Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := x^2$. Considérons une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions $F(1) = 1$ et $F(2x) = 4F(x)$ pour tout x réel. La thèse est la suivante : si F est polynomiale alors $F = f$. En raisonnnant par induction, prouvons d'abord que $F(2^k) = 4^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Le cas de base, $k := 0$, est immédiat car $F(2^0) = F(1) = 1 = 4^0$. Pour le cas inductif, c'est-à-dire le passage de k à $k + 1$, on suppose que $F(2^n) = 4^n$ et on cherche à montrer que $F(2^{n+1}) = 4^{n+1}$, pour un naturel n donné (quel qu'il soit). C'est facile :

$$F(2^{n+1}) = F(2 \cdot 2^n) = 4 \cdot F(2^n) = 4 \cdot 4^n = 4^{n+1}.$$

  Le principe d'induction nous permet alors d'affirmer que la proposition est vraie.

D'autre part, la définition de f montre que $f(2^k) = 4^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc les fonctions F et f prennent les mêmes valeurs en une infinité de points. En d'autres termes, la différence $F-f$ s'annule en une infinité de points. Si on suppose que F est représentée par un polynôme (comme l'est f), cela impose $F - f = 0$ (la fonction nulle), car un polynôme non nul ne peut avoir qu'un nombre fini de racines. La conclusion est l'égalité souhaitée : $F = f$.

- Concernant la fonction g, les règles de l'arithmétique déterminent les valeurs $g(z)$ dans le cas où z est *rationnel*. Vous avez reconnu ces valeurs durant le premier acte. Cela étant, comment utilisez-vous le fait que g est *continue* pour montrer que la réponse de Fanny — que vous avez devinée — est la seule possible ?

  Solution Soit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) := 2^x$. Considérons une fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui satisfait aux deux conditions de Gaston. Un peu d'arithmétique permet de montrer que $G(z) = 2^z$ pour tout $z \in \mathbb{Q}$. Supposons que G est *continue*. La thèse est que $G = g$, c'est-à-dire que $G(x) = 2^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cette égalité provient du fait que tout nombre réel peut être approché d'aussi près que l'on veut par un nombre rationnel. Voyons comment formaliser notre intuition.

  On s'intéresse à la fonction $D := G - g$. Celle-ci est *continue*, car la différence de deux fonctions continues est une fonction continue. Par hypothèse, $D(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{Q}$. La thèse est que D est la *fonction nulle*. Soit a un nombre réel. On cherche à prouver que $D(a) = 0$. La continuité de D au point a s'exprime comme suit :

  $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) : \text{si } |x - a| \leq \delta \text{ alors } |D(x) - D(a)| \leq \varepsilon.$$

  Fixons ε et considérons un δ qui convient à ε. Ensuite, choisissons un nombre *rationnel* z tel que $|z - a| \leq \delta$. (C'est possible, pour la raison que nous avons indiquée.) On sait que $D(z) = 0$, car $z \in \mathbb{Q}$. Il vient $|D(a)| = |0 - D(a)| = |D(z) - D(a)| \leq \varepsilon$. A ce stade, la conclusion est la suivante :

  $$(\forall \varepsilon > 0) : |D(a)| \leq \varepsilon.$$

  Le but est tout proche, mais il faut rester rigoureux jusqu'au bout. Raisonnant par l'absurde, supposons $D(a) \neq 0$. On choisit $\varepsilon := \frac{1}{2}|D(a)|$. Il vient $|D(a)| \leq \frac{1}{2}|D(a)|$, d'où $|D(a)| \leq 0$, ce qui implique $D(a) = 0$ en contradiction avec l'hypothèse.

Remarque Pour la dernière étape, il faut **refuser** la phrase paresseuse "en faisant tendre ε vers zéro on obtient $D(a) = 0$". C'est un langage de professionnel, qu'il est interdit d'utiliser quand on s'adresse à des débutants ! Ce qu'il faut faire, c'est raisonner par l'absurde : $D(a)$ doit être égal à zéro, car toute autre valeur est exclue.

Complément Disons quelques mots sur ce qui se passe lorsqu'on affaiblit les hypothèses.

- Il existe une infinité de fonctions continues qui possèdent la propriété algébrique imposée par Fanny. Nous savons qu'une seule est polynomiale. Un exemple simple d'une fonction qui ne l'est pas est $F(x) := x^2$ ou 0 selon que $x \geq 0$ ou $x < 0$.
- Il existe une infinité de fonctions qui possèdent les deux propriétés algébriques imposées par Gaston. Nous savons qu'une seule est continue. Un exemple simple d'une fonction qui ne l'est pas est $G(x) := 2^x$ ou 0 selon que $x \in \mathbb{Q}$ ou non.

Méthodologie

Voici quelques indications qui devraient faciliter le pilotage des séances de travail. Le problème se situe à un niveau d'exigence élevé en ce qui concerne notamment la rigueur du raisonnement mathématique. Il faut donc prendre le temps et ne pas brûler les étapes !

Premier acte : devinons-nous de quelles fonctions il s'agit ?

On demande de *découvrir* les fonctions qui correspondent aux spécifications. C'est de l'*existence* des fonctions qu'il s'agit ici, et pas de l'*unicité* (objet du quatrième acte). Tous les moyens sont bons, pourvu qu'on arrive au résultat et qu'on puisse expliquer la méthode suivie. Il faut réfléchir et calculer, ce qui est déjà faire des mathématiques. Bien entendu, on devra s'assurer que f est polynomiale et que g est continue, mais sans insister sur le rôle que jouent ces conditions. Une question en passant : g est-elle polynomiale ? Il y aura des surprises. (La réponse est non, bien sûr.)

Deuxième acte : en quels points prennent-elles la même valeur ?

La première question est facile. Il s'agit d'un temps de récréation avant des efforts plus éprouvants. Cependant, certains étudiants feront un dessin erroné, et ne verront pas d'emblée que si $x \gg 0$ alors $2^x \gg x^2$; ils risquent de manquer la solution $x_2 = 4$.

Pour répondre à la seconde question il faut justifier mathématiquement un résultat que l'on "voit" sur un graphique. Le point (a) n'est pas difficile. Les étudiants vont (re)trouver le *théorème des valeurs intermédiaires*. Interdit au tuteur de donner le nom ! Ce théorème doit faire partie de la boîte à outils. L'enjeu est d'être capable d'identifier le *bon outil.* Notons que pour pouvoir appliquer le théorème tel qu'il est formulé dans le livre, il faut d'abord introduire la fonction différence $h := f - g$. Remarque : le théorème des valeurs intermédiaires est aussi connu sous le nom de *théorème de Bolzano.*

Le point (b) est nettement plus ambitieux. C'est pourquoi on met les étudiants sur la voie en leur indiquant le théorème à utiliser. Le travail comporte deux étapes.

(1) Trouver le *théorème de Rolle*. Ne pas négliger ce modeste enjeu ! Comprendre de quoi il s'agit ; faire un dessin.

(2) Découvrir la façon d'utiliser le théorème, ce qui est difficile. Le tuteur donnera des indications judicieuses. Mais les étudiants devraient trouver tout seuls :
   - on va utiliser la fonction différence ;
   - on va raisonner par l'absurde.

Suggestion : le tuteur pourrait poser la question suivante : si h s'annule en 4 points, en combien de points s'annule h' ?

Troisième acte : comment calculer la solution négative ?

La première question concerne un sujet important de la matière. Il s'agit de repérer et d'appliquer la *formule de Taylor*, que la plupart des étudiants ne connaissent pas. Si l'occasion se présente, on peut mentionner le fait que le théorème de Taylor fournit aussi une expression du reste — qui n'intervient pas dans ce problème.

La seconde question doit être vue comme un exercice, rien de plus. C'est de la géométrie analytique, pourrait-on dire. Aucune difficulté, à condition de savoir que la pente de la tangente est égale à la dérivée ou, plus exactement, au nombre dérivé. Le résultat de cet exercice pourra être utilisé par les étudiants lors d'une séance d'initiation à matlab.

Quatrième acte : pourquoi n'y a-t-il qu'*une* réponse aux devinettes ?

Pour la première question, le point clé est un résultat bien connu, et facile à démontrer : "un polynôme non nul ne peut pas s'annuler en une infinité de points". Pour mettre cette idée en application, on introduit la fonction f et une fonction candidat F, et on s'intéresse à la différence $F - f$. (Mieux vaut éviter le raisonnement par l'absurde.) Découvrir l'égalité $F(2^n) = 4^n$ peut se faire à l'intuition. Mais le tuteur attirera l'attention des étudiants sur le principe de preuve par induction.

La deuxième question est beaucoup plus complexe. D'abord, l'affirmation selon laquelle "un peu d'arithmétique montre que $G(z) = 2^z$ pour tout $z \in \mathbb{Q}$" n'est pas du tout évidente. Ce point ne fait pas vraiment partie du problème. Si les étudiants veulent y voir plus clair, on donnera comme piste : (1) si $a \in \mathbb{N}$ alors $G(a) = 2^a$; (2) si $z \in \mathbb{Q}$ écrire $z = b/a$ et raisonner sur $b = a \cdot z$. Une démonstration complète — à l'intention du tuteur — se trouve dans le commentaire placé à la fin du premier acte. Le vrai problème concerne la notion de continuité. Pour prouver l'unicité de g, les étudiants devront

(i) *écrire* la définition de la continuité en un point ;
(ii) *manipuler* cette définition pour montrer que $D(a) = 0$ pour tout a.

Pour le point (i), ils verront que la continuité est définie à partir de la notion de *limite*, celle-ci faisant intervenir les redoutables duettistes ε et δ. Nécessité de remplacer le terme "limite" par sa définition technique, pour obtenir ainsi une écriture opérationnelle de ce que signifie la continuité d'une fonction en un point. (Rares sont les auteurs qui épargnent au lecteur le soin d'effectuer ce petit exercice.) Le point (ii) est très difficile, puisqu'il s'agit de faire fonctionner, de manière professionnelle, une définition intimidante.

Voici un commentaire sur la façon de construire la démonstration.

(a) Introduire une *fonction candidat* G dans le but de prouver que que $G = g$. (Mieux vaut éviter, ici, de raisonner par l'absurde.)
(b) Faire apparaître la *fonction différence* $D := G - g$ dans le but de prouver que $D = 0$ (la fonction nulle).
(c) Noter que G est continue, et exprimer — de manière tout à fait précise — la *continuité de D en un point a quelconque.*
(d) Effectuer un *raisonnement* et des *manipulations* permettant d'arriver au but : $D(a) = 0$. En fin de pacours, procéder par l'absurde.

Une remarque à ce sujet : les étudiants seront invités à réfléchir sur la pratique des mathématiques en lisant un document, intitulé "ce que nous ont appris Fanny et Gaston", qui leur sera remis après la clôture de l'APP.