APP0 - Fanny et Gaston

Partie A - Rencontre autour de deux fonctions

Premier acte

Fanny et Gaston sortent d'une épreuve nationale des Olympiades Mathématiques. Ils s'en vont boire un verre au bistrot du coin, mais encore tout excités par la prestation qu'ils viennent d'effectuer, ils n'ont d'autre sujet de conversation que leur passion des mathématiques et décident de se lancer des défis : Chacun des deux acteurs pense à une fonction d'une variable réelle, à valeurs réelles ; il en donne des propriétés caractéristiques et demande à son interlocuteur d'identifier la fonction.

- *Fanny* : la fonction f est représentée par un *polynôme* ; elle prend la valeur 1 au point 1 et elle possède la propriété suivante. Si x est multiplié par deux alors $f(x)$ est multiplié par quatre. Quelle sera la réponse de Gaston ?
- *Gaston* : la fonction g est *continue* ; elle prend la valeur 1 au point 0 et elle satisfait aux deux conditions suivantes. (i) Si x est augmenté d'une unité alors $g(x)$ est multiplié par deux. (ii) Si x est multiplié par m alors $g(x)$ est élevé à la puissance m, et cela pour tout $m \in \mathbb{N}$. Quelle sera la réponse de Fanny ?

Deuxième acte

Nos duettistes poursuivent l'exploration des deux fonctions f et g qu'ils ont définies. Ils aimeraient savoir si elles peuvent avoir des valeurs égales en certains points.

- En esquissant le graphe des deux fonctions, ils devinent le *nombre de points x en* lesquels $f(x) = g(x)$. Quel est ce nombre ? Certains de ces points sont-ils évidents ? Gaston n'est pas convaincu par l'esquisse, réalisée sur un carton de bière de dimension réduite ! Comment pourrait-il démontrer, de manière rigoureuse, (a) que les solutions devinées *existent* et (b) qu'il n'y en a *pas d'autre* ?
  Suggestion Pour la partie (b), appliquez le *théorème de Rolle*.

Partie B - Intuition et rigueur, solutions exacte et approchée

Troisième acte

Fanny et Gaston ont prouvé l'existence et l'unicité d'un nombre réel négatif x_0 tel que $f(x_0) = g(x_0)$. Les règles de l'arithmétique montrent que x_0 est irrationnel. Cependant, il existe des méthodes permettant de calculer x_0 avec une grande précision. Pour appliquer ces méthodes numériques, on doit parfois disposer d'une “estimation décente” de la solution recherchée.

- Comment utilisez-vous les *formules de Taylor* pour calculer une approximation de x_0, en résolvant une équation du second degré ?
- On désire obtenir une meilleure valeur pour x_0, par approximations successives. Comment faire ? Pouvez-vous élaborer (ou trouver) une méthode permettant d'approcher la valeur du nombre x_0 de manière itérative, en utilisant le fait que les fonctions sont dérivables et qu'on peut aisément calculer leur dérivée ?

Partie C - Existence et unicité

Quatrième acte

Au moment où Fanny et Gaston terminent leur n-ième (?) bière tout en rassemblant tout ce qu'ils ont appris sur ces deux fonctions, un doute soudain les envahit. Ces fonctions étaient elles les seules répondant aux caractéristiques décrites ?

- Concernant la fonction f, comment utilisez-vous le fait qu'il s'agit d'un *polynôme* pour montrer que la réponse de Gaston — que vous avez devinée — est la seule possible ?
- Concernant la fonction g, les règles de l'arithmétique déterminent les valeurs $g(z)$ dans le cas où z est *rationnel.* Vous avez reconnu ces valeurs durant le premier acte. Cela étant, comment utilisez-vous le fait que g est *continue* pour montrer que la réponse de Fanny — que vous avez devinée — est la seule possible ?