Formulaire de probabilités

1. Formules de calcul des probabilités

Formules de base

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = 1 - P(A^C \cap B^C)$$

Formules de calcul combinatoire

$$P_n = n! \qquad A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!} \qquad \mathrm{n}! = \mathrm{n}\,.\,(\mathrm{n}-1)\,.\,(\mathrm{n}-2)\,....1 \qquad 0! = 1! = 1$$

Probabilité conditionnelle : $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Probabilités composées

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

Indépendance : A et B sont indépendants ssi $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Formule de Bayes : $P(B|A) = \dfrac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$

Probabilités totales : $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^C)P(B^C)$

Et si B_1, B_2... B_k forment un système contradictoire d'événements:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i)$$

2. Variables aléatoires : généralités

Moyenne ou espérance mathématique d'une variable discrète : $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i P(X = x_i)$

Variance et déviation standard d'une variable discrète :

$$\sigma^2 = V(X) = E((X-\mu)^2) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 P(X = x_i) \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{\mathrm{V(X)}}$$

Coefficient de corrélation ρ

$$\rho = \frac{E((X-\mu_X)(Y-\mu_Y))}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\mathrm{cov(X,Y)}}{\sigma_X \sigma_Y} \quad \text{où} \quad -1 \le \rho \le 1$$

Espérance et variance de fonctions linéaires de variables aléatoires :

$$E(a+bX) = a + bE(X) \quad \text{et} \quad V(a+bX) = b^2 V(X)$$
$$E(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$$
$$V(aX+bY) = a^2V(X) + b^2V(Y)$$ si X et Y sont deux v.a. indépendantes

3. Variables aléatoires : lois classiques

Nom	**Valeurs possibles ou Domaine**	**P(X=x) ou densité**	**Moyenne E(X)**	**Variance V(X)**
Uniforme discrète X ~ UD(a,k)	x = a, a+1, ...,a+(k-1)	1/k	a+(k-1)/2	$(k^2-1)/12$
Bernoulli X ~ Be(π)	x = 0, 1	$\pi^x(1-\pi)^{1-x}$	π	π (1-π)
Binomiale X ~ Bi(n, π)	x = 0, 1, 2, ...,n	$C_n^x \pi^x (1-\pi)^{(n-x)}$	nπ	nπ(1-π)
Uniforme Continue X ~ U(a,b)	Domaine = [a,b]	*f(x) = 1/(b-a)*	(a+b)/2	$(b-a)^2/12$
Normale Réduite Z ~ N(0,1)	Domaine = R =]-∞,+∞[	$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$	0	1
Normale X ~ N(μ,σ²)	Domaine = R =]-∞,+∞[	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ²

4. Calcul de probabilité sur une variable aléatoire Normale

Soient X une variable aléatoire Normale quelconque $N(\mu,\sigma^2)$ et Z la variable aléatoire normale réduite N(0,1)

Intervalle dans lequel on trouve 95% de la population liée à X : $[\mu - 1.96\sigma, \mu + 1.96\sigma]$

Standardisation : $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ (ou formule de calcul d'un Z-Score).

Transformation inverse à la standardisation : $X = \mu + Z\sigma$

Calcul d'une probabilité : $P(X \le x) = P\left(Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

Calcul du percentile x_p tel que $P(X \le x_p) = p$: $x_p = \mu + z_p\sigma$

5. Combinaison linéaire de variables aléatoires Normales

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ et $N(\mu_2,\sigma_2^2)$,

$$a + bX_1 + cX_2 \quad \text{est} \quad N(a + b\mu_1 + c\mu_2, b^2\sigma_1^2 + c^2\sigma_2^2)$$

Soient X_1, X_2..... X_n n variables aléatoires $N(\mu,\sigma^2)$ indépendantes

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ est } N(n\mu, n\sigma^2) \text{ et } \qquad \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ est } N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

6. Somme et moyenne de variables aléatoires iid - Théorème central limite

Soient X_1, X_2, ... X_n n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (iid) de moyenne μ et de variance σ^2

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ est approximativement une } N(n\mu, n\sigma^2) \text{ quand n est grand}$$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ est approximativement une } N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \text{quand n est grand.}$$

7. Théorème central limite appliqué à la variable aléatoire Binomiale

Une v.a. X de distribution binomiale Bi(n,π) est approximativement une *N(nπ,nπ(1-π))* si n est grand (n$\pi \geq 5$ et n(1-π) $\geq$ 5). Un calcul de probabilité sur X s'effectue alors comme suit :

$$P(X \leq x) \cong P(X_{\text{Norm}} \leq x + 0.5) = P(Z \leq \frac{x + 0.5 - n\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}})$$

où X_{Norm} est *N(nπ,nπ (1-π))* et *Z* est *N(0,1)*.

8. Graphique récapitulatif des relations entre variables aléatoires