



UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN

ECOLE POLYTECHNIQUE DE LOUVAIN

LEPL1101 – Algèbre

2023 – 2024



Professeurs — Raphaël JUNGERS
— Michel VERLEYSEN
— Vincent WERTZ (suppléant)

Assistants — Adrien BANSE
— Julien CALBERT
— Rémi DELOGNE

Auteurs — Julien CALBERT
— Rémi DELOGNE
— Charles MONNOYER

Contact — julien.calbert@uclouvain.be

Table des matières

0	Rappels	9
0.1	Les énoncés mathématiques	9
0.2	Les preuves en mathématiques	9
0.2.1	La démonstration par construction (directe)	10
0.2.2	La démonstration par l'absurde (contradiction)	10
0.2.3	La démonstration par récurrence (induction)	11
0.2.4	Démontrer une implication	12
0.2.5	Démontrer une équivalence	13
0.2.6	Les quantificateurs	15
0.2.7	Conditions nécessaires vs suffisantes	16
0.2.8	Résumé et commentaires	17
0.3	Théorie des ensembles	18
0.3.1	Définitions et notation	18
0.3.2	Opérations sur les ensembles	19
0.3.3	Relations	20
0.3.4	Fonctions	24
0.4	Fonctions récursives	26
0.5	Corps	27
1	Calcul matriciel	29
1.1	Définitions	30
1.1.1	Opérations matricielles et propriétés	31
1.1.2	Opérations par blocs	35
1.1.3	Interpréter le produit matriciel à l'aide des opérations par blocs	37
1.2	Transposition	38
1.3	Inversion	39
1.4	Matrices élémentaires	42
1.5	Échelonnement	44
1.6	Factorisation LU	47
1.7	Inversibilité d'une matrice carrée	50
1.8	Déterminant	53
2	Systèmes linéaires	65
2.1	Opérations élémentaires	66
2.2	Représentation matricielle	67
2.3	Résolution	68
3	Espaces Vectoriels	73
3.1	La notion d'espace vectoriel	74
3.2	Sous-espace vectoriel	77
3.2.1	Opérations sur les sous-espaces vectoriels	79
3.2.2	Somme directe	81
3.3	Bases et dimension	82
3.3.1	Bases	82

3.3.2	Dimension	83
3.4	Bases de sous-espaces	85
3.5	Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels	87
3.6	Retour sur les matrices et systèmes linéaires	91
3.6.1	Les 4 sous-espaces vectoriels fondamentaux d'une matrice	91
3.6.2	Rang	93
3.6.3	Solutions d'un système d'équations linéaires	95
4	Applications linéaires	99
4.1	Notions fondamentales	100
4.2	Noyau et image	102
4.3	Équation linéaire	104
4.4	Rang et nullité	105
4.5	Construction d'applications linéaires	106
4.5.1	Principe de construction	107
4.5.2	Inversibilité des applications linéaires	108
4.6	Représentation matricielle des applications linéaires	110
4.6.1	Isomorphisme entre un espace vectoriel de dimension n et K^n	110
4.6.2	La matrice associée à une application linéaire	111
4.6.3	La matrice de changement de base	116
5	Espaces Euclidiens	119
5.1	Motivation	120
5.2	Produit scalaire, norme, distance	120
5.3	Orthogonalité et projection orthogonale	125
5.4	Bases orthonormées	128
5.5	Solutions approchées et équations normales	131
5.5.1	Projection orthogonale sur un sev de \mathbb{R}^m	133
5.5.2	Application: régression linéaire	134
6	Valeurs et vecteurs propres	137
6.1	Valeurs propres et vecteurs propres	138
6.2	Diagonalisabilité	144
6.3	Relation de similitude	145
6.4	Applications	148
6.4.1	Calcul des puissances d'une matrice	148
6.4.2	Calcul de l'exponentielle d'une matrice	149
7	Matrices symétriques et formes quadratiques	151
7.1	Matrices symétriques	152
7.2	Formes quadratiques	155
7.3	Caractérisation d'une forme quadratique	156
7.4	Relation de congruence	157
7.5	Algorithmes pour le calcul de l'inertie	160
7.5.1	Factorisation \mathbf{LDL}^T	160
7.5.2	Méthode de complétion des carrés	161
8	Équations différentielles et de récurrence	163
8.1	Matrice compagnon	163
8.2	Équations différentielles linéaires à coefficients constants	165
8.2.1	Équations différentielles vectorielles d'ordre 1	166
8.2.2	Équations différentielles scalaires d'ordre n	168
8.3	Équations de récurrence linéaires à coefficients constants	175

8.3.1	Équations de récurrence vectorielles d'ordre 1	177
8.3.2	Équations de récurrence scalaires d'ordre n	179
9	Conclusion	187

Préface

Bienvenue à ce cours d'algèbre linéaire!

L'*algèbre linéaire* est un langage universel qui est au cœur de presque toutes les branches des mathématiques. C'est pourquoi cette matière est enseignée dès le premier quadrimestre, car elle est nécessaire pour exprimer les concepts plus avancés enseignés durant les années suivantes. Ce syllabus de cours se veut une boîte à outils mathématique qui vous sera utile dans la suite de vos études.

La création de l'*algèbre* trouve son origine dans l'ingéniosité (ou selon les points de vue, la paresse) des mathématiciens. Lorsqu'un mathématicien identifie plusieurs objets mathématiques qui partagent des propriétés communes, il évite de produire des démonstrations des propriétés de tous ces objets un par un. Au lieu de cela, il crée une théorie générale qui englobe tous ces objets en une nouvelle entité abstraite. Ainsi, une seule démonstration concernant cette entité abstraite s'applique à tous les objets à la fois. En contrepartie, le raisonnement est plus abstrait, mais c'est le prix à payer pour pouvoir épurer les mathématiques.

Dans ce cours, nous nous concentrons sur un sous-ensemble très important de l'algèbre : l'*algèbre linéaire*. Les objets abstraits construits sont alors appelés *espaces vectoriels*. Dans ce cours, nous étudierons les espaces vectoriels de dimension finie et montrerons qu'ils sont intrinsèquement liés à la notion de *matrice*. Dans un deuxième temps, nous nous intéresserons à l'étude des applications entre ces objets abstraits (les espaces vectoriels), par exemple, parce qu'elles nous donnent des informations sur les objets eux-mêmes. Là encore, nous nous concentrerons sur un sous-ensemble de ces applications: les *applications linéaires*. Ensuite, nous continuerons à abstraire des notions telles que la norme, la distance ou le produit scalaire. Nous examinerons les valeurs propres et les vecteurs propres, qui sont des concepts avancés de l'algèbre linéaire qui sont utilisés pour décrire les comportements importants de transformation d'une matrice.

Le cours culmine avec l'étude de la résolution d'équations différentielles et de récurrence linéaires. Ces équations sont utilisées dans de nombreux domaines, notamment en physique, en biologie, en économie. Par exemple, elles peuvent être utilisées pour modéliser l'évolution d'une population d'organismes, pour prédire le mouvement des corps dans l'espace ou pour décrire la propagation des ondes. Elles sont également utiles pour résoudre des problèmes pratiques tels que la conception de circuits électriques, la conception de machines, la modélisation de la dynamique des fluides, la prédiction de la propagation des maladies et bien plus encore.

Vous l'avez compris, un mot récurrent et central dans le cours est **abstraction**.

Ce cours vous permettra également d'acquérir des compétences essentielles en matière de visualisation et de résolution de problèmes, qui seront utiles dans de nombreux domaines, y compris dans la recherche scientifique, l'analyse de données et l'ingénierie. De plus, il peut être utilisé comme une base solide pour les cours avancés en mathématiques et en sciences. Au début, l'étude de l'algèbre linéaire est un peu désorientante / désarçonnante en raison de sa nature abstraite. Mais au fur et à mesure que vous progresserez dans le cours, les concepts vous précéderont vous sembleront de plus en plus naturels. Nous sommes convaincus que ce cours vous donnera une base solide en algèbre linéaire et vous permettra de développer des compétences qui vous seront utiles dans de nombreux domaines. Nous espérons que vous apprécierez ce programme et que vous aurez l'occasion de découvrir la richesse et la pertinence de l'algèbre linéaire dans la vie réelle.

L'équipe enseignante

Chapitre 0

Rappels

Ce chapitre se veut une introduction à "l'art de la mathématique". La plupart des concepts décrits ici vous seront déjà familiers. Nous pensons cependant nécessaire de rappeler quelques notions élémentaires auxquelles vous devrez faire appel, tout au long de ce cours ainsi que de tout autre cours faisant de près ou de loin appel aux mathématiques.

0.1 Les énoncés mathématiques.

Pour aider le lecteur à identifier le rôle des énoncés, les textes mathématiques sont très structurés.

- *Définition*: énoncé qui permet de définir un nouvel objet mathématique, en se basant sur d'autres objets déjà supposés connus.
- *Théorème*: le résultat énoncé est considéré comme l'un des résultats majeur du texte.
- *Proposition*: est une propriété technique, qui n'est pas un résultat majeur du texte.
- *Corollaire*: le résultat énoncé se déduit plus ou moins directement du résultat précédent.
- *Lemme*: l'énoncé qui suit n'est pas considéré comme résultat majeur mais constitue une étape intermédiaire dans la preuve d'un résultat majeur.
- *Conjecture*: Contrairement aux Théorèmes, Propositions, Corollaires, Lemmes qui sont des affirmations vraies (pour lesquels une preuve existe), la conjecture est une assertion que l'auteur pense être vraie (par exemple parce qu'il n'a pas trouvé de contre-exemple), mais pour laquelle une démonstration n'est pas (encore) connue.

0.2 Les preuves en mathématiques

Une preuve (ou démonstration) est un moyen d'établir la véracité d'une affirmation. La manière dont nous construisons une preuve mathématique a trouvé sa première expression classique dans les *Éléments* d'Euclide: la véracité d'une proposition est déduite d'un ensemble d'axiomes au moyen d'une séquence de déductions logiques:

- Les *axiomes* expriment un ensemble d'affirmations aussi simples que possible et que l'on tient pour vraies sans les démontrer. Euclide a par exemple proposé l'axiome suivant: *deux points quelconques peuvent être reliés par une droite*.
- Les *déductions logiques* se font pour leur part par l'usage de règles d'inférence qui définissent la manière dont la véracité d'une proposition peut être déduite de celle d'autres propositions. L'une des règles les plus classiques est celle du *modus ponens*: s'il est établi qu'une proposition P est vraie, et s'il est établi que la vérité de la proposition P implique celle de la proposition Q , alors on peut déduire que la proposition Q est vraie.

Ainsi, une fois un théorème démontré, celui-ci peut être utilisé comme base pour démontrer d'autres assertions.

L'étude rigoureuse des axiomes et des règles de calculs à partir des axiomes s'appelle la *logique mathématique*. L'usage systématique d'axiomes et de règles d'inférence s'avère cependant rapidement fastidieux pour un

usage courant: la démonstration que $2 + 2 = 4$ nécessite en effet plus de 20000 étapes lorsqu'on se base sur le système axiomatique de ZFC¹.

Nous ne nous baserons dès lors pas sur un ensemble d'axiomes ou de règles d'inférence rigoureusement définis, mais accepterons comme point de départ pour nos preuves l'ensemble des faits que nous considérons évidents pour nos lecteurs.

Si, en principe, n'importe quelle séquence de déductions peut être utilisée pour former une preuve, la majeure partie des démonstrations peut être basée sur un certain nombre de techniques de preuve classiques, qui peuvent être combinées au gré des besoins selon le type de proposition à démontrer. Nous allons à présent passer en revue un certain nombre de ces techniques, les illustrant par différents exemples.

0.2.1 La démonstration par construction (directe)

La démonstration directe consiste à démontrer qu'une proposition P est vraie en partant de propositions déjà établies et en arrivant à la conclusion par une suite d'implications logiques.

Exemple 0.1. *Considérons par exemple la proposition suivante.*

Proposition 0.1

Tout nombre naturel qui est le carré d'un autre nombre naturel a un nombre impair de diviseurs.

Démonstration : Soient $x, y \in \mathbb{N}$ tel que $x = y^2$ et $x \neq y$. On doit démontrer que x a un nombre impair de diviseurs. Le nombre x admet trivialement comme diviseurs 1 et lui-même x . Comme $x = y^2$ il admet y comme diviseur. Ce qui fait déjà trois diviseurs: 1, y et x . Pour tout autre nombre a (différent de 1, y et x), diviseur de x , il doit y avoir un nombre b tel que $x = ab$. Le nombre b est également diviseur de x et doit également être différent de 1, y , x et a . Donc s'il y a d'autres diviseurs que 1, y et x , ils doivent être différents et exister par paires. Le nombre total de diviseurs est dès lors impair. \square

Exemple 0.2. *On démontre la proposition suivante.*

Proposition 0.2

Soit n un nombre entier positif ou nul ($n \in \mathbb{N}$) et considérons $P(n) = n^2 + 7n + 12$. Alors, il n'existe pas de $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{P(n)} \in \mathbb{N}$.

Démonstration : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$n^2 + 6n + 9 < n^2 + 7n + 12 < n^2 + 8n + 16,$$

d'où

$$(n + 3)^2 < P(n) < (n + 4)^2.$$

Puisque $n + 3 > 0$ et $n + 4 > 0$, on déduit que $n + 3 < \sqrt{P(n)} < n + 4$. Donc $\sqrt{P(n)} \notin \mathbb{N}$, puisqu'il est strictement compris entre deux entiers consécutifs. \square

0.2.2 La démonstration par l'absurde (contradiction)

Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on suppose qu'elle est fausse et démontre qu'il en résulte la falsification d'un résultat dont on est certain de la véracité. Vu que cela est impossible, la supposition faite doit elle-même être fausse.

1. ZFC est l'abréviation de *Zermelo-Fraenkel Choice*. Ce système se base sur la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel en conjonction avec l'axiome du choix.

Exemple 0.3. À titre d'exemple, nous démontrons le résultat suivant.

Proposition 0.3

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration : Nous établissons une preuve par contradiction. Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel, donc qu'il existe deux entiers a et b tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Soit d le plus grand commun diviseur de ces deux entiers, et définissons $r = \frac{a}{d}$ et $s = \frac{b}{d}$. Il s'en suit que $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$ où r et s sont entiers et ne possèdent pas de diviseur commun.

Élevant au carré les deux membres de cette égalité, nous obtenons que $r^2 = 2s^2$. Étant donné que $2s^2$ est un multiple de 2, r^2 doit être un multiple de 2 lui aussi, ce qui n'est possible que si r est lui-même un multiple de 2. Dès lors, r^2 doit être un multiple de 4. Mais alors, $s^2 = \frac{r^2}{2}$ doit lui aussi être un multiple de 2, ce qui implique que s est un multiple de 2.

Nous avons donc montré que r et s doivent tous deux être des multiples de 2, ce qui est en contradiction avec le fait que r et s ne possèdent pas de diviseurs communs. Dès lors, les entiers a et b n'existent pas, et $\sqrt{2}$ est irrationnel. \square

0.2.3 La démonstration par récurrence (induction)

Considérons une proposition $P(n)$ faisant intervenir un nombre naturel n . Voici deux exemples illustratifs:

1. $P(n)$: $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$.
2. $P(n)$: $0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

On souhaite démontrer que $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq n_0$, où n_0 est un naturel fixé (dans nos deux exemples on pourra choisir $n_0 = 1$, ou même $n_0 = 0$). On peut espérer aboutir à ce résultat en raisonnant par induction sur n , c'est-à-dire en appliquant le principe que voici.

Proposition 0.4 (Principe d'induction mathématique.)

Soit $P(n)$ un énoncé faisant intervenir un naturel n , et soit n_0 un naturel fixé. Si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

1. $P(n_0)$ est vrai;
 2. pour tout naturel $k \geq n_0$, si $P(k)$ est vrai, alors $P(k + 1)$ est vrai;
- alors $P(n)$ est vrai pour tout naturel $n \geq n_0$.

Pour appliquer le principe d'induction il faut pouvoir prouver les points (1) et (2), qui sont appelés les prémisses de la règle d'induction. Une démonstration par récurrence contient toujours trois étapes:

1. (cas de base) démontrer que $P(n_0)$ est vraie;
2. (hypothèse inductive) on suppose que la propriété $P(n)$ est vraie pour un certain $n \geq n_0$;
3. (cas inductif) démontrer $P(n + 1)$ à partir de $P(n)$.

En suivant ce schéma, on prouve alors que $P(n)$ est vraie pour tout les naturels $n \geq n_0$.

Exemple 0.4. On démontre la proposition suivante par induction sur n .

Proposition 0.5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$.

Démonstration : On raisonne par induction sur n , avec $n_0 = 0$.

1. (cas de base) l'expression est vraie pour $n = 0$, on a $0 = 0$.
2. (hypothèse inductive) Soit $k \geq 0$. Supposons $1 + \dots + k = \frac{1}{2}k(k+1)$.
3. (cas inductif) Il vient $1 + \dots + k + (k+1) = \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$.

Le principe d'induction (Proposition 0.4) nous permet de conclure que la formule $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ est vérifiée pour tout naturel n . \square

Ajoutons qu'il est essentiel d'identifier correctement le nombre n_0 qui sert d'initialisation. Une erreur dans le traitement du cas de base peut avoir des effets désastreux.

0.2.4 Démontrer une implication

L'une des formes de proposition que l'on cherche à démontrer le plus fréquemment est l'implication:

"si P est vrai alors Q est vrai aussi".

On exprime souvent cela aussi sous une forme plus concise: P implique Q , noté $P \Rightarrow Q$. Voici quelques exemples de propositions se présentant sous la forme d'implication:

- Si $0 \leq x \leq 2$, alors $-x^3 + 4x + 1 > 0$.
- Si r est irrationnel, alors \sqrt{r} l'est aussi.
- Si $ax + b = 0$ et $a \neq 0$, alors $x = -\frac{b}{a}$.
- Si n est un entier pair strictement supérieur à 2, alors n peut être écrit comme la somme de deux nombres premiers.

Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour démontrer une implication.

La démonstration par construction (directe)

La méthode la plus immédiate et généralement la plus élégante de prouver une implication est la méthode directe. Une telle preuve suit le schéma suivant. Pour démontrer que P implique Q :

1. Écrire: "Supposons que P soit vraie."
2. En déduire que Q est vraie aussi en utilisant les règles de logique classique.

Exemple 0.5. Voyons comment cette méthode peut être utilisée pour démontrer la première implication ci-dessus.

Proposition 0.6

Si $0 \leq x \leq 2$, alors $-x^3 + 4x + 1 > 0$.

Démonstration : Supposons que $0 \leq x \leq 2$. Les termes x , $2-x$ et $2+x$ sont alors tous positifs. Dès lors leur produit l'est aussi, et ce produit devient strictement positif si nous lui ajoutons 1. Ainsi

$$x(2-x)(2+x) + 1 > 0.$$

En distribuant le terme de gauche de cette inégalité, nous obtenons l'inégalité recherchée

$$-x^3 + 4x + 1 > 0.$$

\square

La démonstration par contraposition

La proposition

"si P est vraie alors Q est vraie"

est logiquement équivalente à la proposition suivante, dénommée sa *contraposée*.

"si Q est fausse alors P est fausse".

On note cette dernière proposition $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Le symbole \neg est utilisé pour écrire la négation d'une proposition. La déclaration $\neg P$ est vraie si et seulement si P est faux.

On démontre ceci directement en utilisant un *table de vérité*. Cette table recense tous les cas de figure possibles et nous aide à calculer la véracité des propositions finales. La valeur V indique que la proposition est vraie et la valeur F indique qu'elle est fausse.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V

On remarque clairement que la troisième et la cinquième colonne sont exactement équivalentes. Démontrer une implication est donc équivalent à démontrer sa contraposée.

En pratique, une démonstration de la contraposée peut être plus facile à établir. La preuve se présente alors de la manière suivante:

1. Écrire: "Nous procédons par contraposée et supposons que Q est fausse."
2. En déduire que P est fausse aussi.

Cette technique de preuve est apparentée à la technique de preuve par l'absurde (contradiction) décrite précédemment.

Exemple 0.6. *Illustrons cette méthode sur la seconde proposition.*

Proposition 0.7

Si r est irrationnel, alors \sqrt{r} l'est aussi.

Pour rappel, un nombre est irrationnel si il ne peut pas être exprimé sous la forme d'une fraction de deux entiers. Nous devons donc démontrer que si r ne peut être exprimé comme une fraction de deux entiers, alors \sqrt{r} ne peut l'être non plus. Nous pouvons simplifier cette implication, la dépouillant de ses négations, en considérant l'implication contraposée.

Démonstration : Nous procédons par contraposition et démontrons que, si \sqrt{r} est rationnel (i.e. peut être exprimée comme une fraction de deux entiers), alors r l'est aussi. Supposons donc que

$$\sqrt{r} = \frac{a}{b}$$

où a et b sont deux entiers. En élevant au carré les deux termes de cette égalité, nous obtenons l'égalité $r = \frac{a^2}{b^2}$, où a^2 et b^2 sont entiers eux aussi, comme souhaité. \square

0.2.5 Démontrer une équivalence

On cherchera souvent à démontrer que des propositions sont logiquement équivalentes:

" P est vraie si et seulement si Q est vraie".

Souvent, le terme "si et seulement si" sera abrégé en "ssi".

On exprime souvent cela aussi sous une forme plus concise: P est équivalent à Q , noté $P \Leftrightarrow Q$. Voici quelques exemples de propositions se présentant sous la forme d'équivalence:

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$;
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \sqrt{x} \Leftrightarrow (y^2 \geq x \text{ et } y \geq 0)$.

À nouveau, différentes techniques sont couramment utilisées pour démontrer l'équivalence de deux propositions.

Preuve que chaque proposition implique l'autre

Pour démontrer que P est vraie ssi Q est vraie, on peut démontrer que P implique Q et que Q implique P . La preuve d'équivalence prend alors la forme suivante:

1. Écrire: "Nous prouvons que P implique Q et vice-versa."
2. Écrire: "Tout d'abord, nous prouvons que P implique Q ". Réaliser cette preuve, à l'aide de l'une des méthodes de la Section 0.2.4 par exemple.
3. Écrire: "Nous prouvons à présent que Q implique P ". À nouveau, réaliser cette preuve.

La méthode que nous venons de décrire suggère que l'équivalence de deux propositions est une propriété plus forte que le fait qu'une proposition implique l'autre: deux implications doivent être démontrées pour prouver une équivalence.

Notons que pour montrer que $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R$ on n'est pas obligé de montrer 6 implications. Il suffit de montrer que les trois assertions

$$P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow R, R \Rightarrow P$$

sont vraies.

Exemple 0.7. Démontrer la première équivalence ci-dessus.

Proposition 0.8

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \underbrace{x^2 + y^2 = 0}_P \Leftrightarrow \underbrace{x = y = 0}_Q.$$

Démonstration : Nous prouvons que P implique Q et que Q implique P .

- ($P \Rightarrow Q$) Supposons P , c'est-à-dire $x^2 + y^2 = 0$. Montrons Q , c'est-à-dire $x = y = 0$. Comme $x^2 + y^2 = 0$, il vient $\underbrace{x^2}_{\geq 0} = \underbrace{-y^2}_{\leq 0}$. Ainsi, $x^2 = -y^2 = 0$, d'où $x = y = 0$.
- ($Q \Rightarrow P$) Supposons Q , c'est-à-dire $x = y = 0$. Montrons P , c'est-à-dire $x^2 + y^2 = 0$. Calculons: $x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 = 0$.

□

Construction d'une chaîne d'équivalences

Une autre manière de démontrer l'équivalence de deux propositions P et Q est la suivante:

1. Écrire: "Nous construisons une chaîne d'équivalences."
2. Prouver que P est équivalent à une seconde proposition, elle-même équivalente à une troisième proposition, et ainsi de suite jusqu'à atteindre la proposition Q

$$P \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow Q.$$

Exemple 0.8. À titre d'exemple, employons cette méthode pour montrer la proposition suivante

Proposition 0.9

L'écart type d'une série de valeurs x_1, \dots, x_n , défini comme

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \mu)^2 + \dots + (x_n - \mu)^2}{2}} \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

est nul si et seulement si toutes les valeurs de la série sont égales à leur moyenne μ :

$$\sigma = 0 \Leftrightarrow x_i = \mu \text{ pour } i = 1, \dots, n.$$

Démonstration : Nous construisons une chaîne d'équivalences:

$$\begin{aligned} \sigma = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{(x_1 - \mu)^2 + \dots + (x_n - \mu)^2}{2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x_1 - \mu)^2 + \dots + (x_n - \mu)^2}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_i - \mu)^2 = 0 \text{ pour } i=1, \dots, n \\ &\Leftrightarrow x_i = \mu \text{ pour } i=1, \dots, n. \end{aligned}$$

La première équivalence est l'énoncé même de la proposition. La deuxième équivalence découle du fait que la seule valeur dont la racine carrée est nulle est 0. Pour la troisième équivalence, on a que chaque terme de la somme est positif, par conséquent chaque terme doit être nul.

Il est important de justifier ainsi chacune des équivalences utilisées dans la preuve. □

0.2.6 Les quantificateurs

De nombreuses propositions mathématiques se servent de quantificateurs, pour exprimer quelque chose qui est toujours vrai ou quelque chose qui n'est que parfois vrai. Par exemple, la proposition $x^2 \geq 0$ est vraie pour toute valeur de x réelle. Par contre, il existe une valeur de x pour laquelle la proposition $x^2 - 4 = 0$ est vraie: les choix $x = -2$ et $x = 2$ sont admissibles.

Plus généralement, pour un ensemble² A , quand on parle d'une propriété qui peut être vérifiée ou non par certains éléments de A , on s'intéresse souvent aux questions:

- La propriété est-elle vraie pour tout élément de A ?
- Existe-t-il (au moins) un élément de A qui vérifie la propriété?
- Existe-t-il un unique élément de A qui vérifie la propriété?

Les expressions *pour tout*, *il existe*, et *il existe un unique* sont appelées *quantificateurs*. Dans des propositions mathématiques, ces quantificateurs sont souvent abrégés par les symboles suivants

- \forall : pour tout ;
- \exists : il existe ;
- $\exists!$: il existe un unique.

Le symbole \exists est un E retourné en référence au mot *existe*, le symbole \forall est un A inversé en référence à *alle*, le mot allemand pour *tout*. Par exemple, la proposition

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \exists! m \in \mathbb{Z} \mid m + n = 0$$

se lit

Pour tout nombre entier n , il existe un unique nombre entier m tel que $m + n = 0$.

2. Voir la définition plus loin dans la Section 0.3

Le symbole $|$ se lit *tel que*.

La démonstration d'une proposition prendra des formes fort différentes selon que cette proposition contient l'un ou l'autre de ces quantificateurs et selon l'ordre d'usage de ces quantificateurs. Considérons par exemple les propositions suivantes:

1. Il existe un entier pair n supérieur à 3 et deux nombres premiers p et q tels que $n = p + q$.
2. Pour tous nombres premiers p et q , il existe un entier pair n supérieur à 3 tel que $n = p + q$.
3. Pour tout entier pair n supérieur à 3, il existe deux nombres premiers p et q tels que $n = p + q$.

La démonstration de la première proposition est très simple: il suffit d'exhiber trois entiers n , p et q qui la satisfont: $n = 4$ et $p = q = 2$ font l'affaire.

Démontrer la seconde proposition serait plus ardu: il s'agit de s'assurer que cette proposition est vraie pour une infinité de nombres premiers p et q . Il est aisé de vérifier que cette proposition est vraie pour de nombreuses valeurs de p et q : les choix $p = 3$, $q = 5$ et $p = 16111987$, $q = 7092947$ conviennent tous deux. On pourrait constituer une longue liste de telles valeurs pour p et q , mais cela ne suffirait pas à prouver la véracité de cette proposition: il n'est pas possible d'énumérer toutes les valeurs de p et q possibles, et notre proposition pourrait être fautive pour l'une des paires de valeurs absentes de la liste. Ainsi, le simple exemple du choix $p = 2$ et $q = 3$ suffit à en démontrer la fausseté: $2 + 3 = 5$ qui est impair.

Nous avons donc démontré, très simplement, que la première de ces propositions est vraie tandis que la deuxième est fautive. La véracité de la troisième de ces propositions, appelée la *conjecture de Goldbach* est par contre une question qui reste ouverte depuis 1742, année durant laquelle le prussien Christian Goldbach a envoyé cette conjecture au suisse Leonhard Euler. Nous voyons ainsi toute l'importance du choix et de l'ordre des quantificateurs utilisés.

En pratique, une proposition de type: "Pour toute valeur de x , la proposition P est vraie." sera généralement démontrée de l'une des manières suivantes:

- Preuve directe. Écrire: "Soit une valeur de x quelconque fixée". Ensuite, démontrer que la proposition P est vraie pour cette valeur de x , en utilisant l'une des méthodes décrites ci-dessus par exemple.
- Preuve par contradiction. Écrire: "Nous établissons une preuve par contradiction.", supposer l'existence d'une valeur de x particulière telle que la proposition P est fautive, en déduire la fausseté d'un résultat dont on connaît la véracité ou une contradiction avec l'hypothèse de l'existence de x et conclure.

Une proposition de type: "Il existe une valeur de x telle que la proposition P est vraie." sera pour sa part généralement démontrée de la manière suivante:

- Trouver une valeur particulière a de x telle que la proposition P est vraie, écrire: "Soit $x = a$." et montrer que la proposition P est vraie dans ce cas.

0.2.7 Conditions nécessaires vs suffisantes.

Si la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors on dit que

- P est condition *suffisante* pour Q ;
- Q est une condition *nécessaire* pour P .

Considérons par exemple la proposition suivante

Si $ABCD$ est un carré alors $ABCD$ est un parallélogramme.

Cette proposition est vraie, toutefois, sa réciproque est fautive. Par conséquent, on dit que

- $ABCD$ est un carré est une condition suffisante pour que $ABCD$ soit un parallélogramme;
- $ABCD$ est un parallélogramme est une condition nécessaire pour que $ABCD$ soit un carré.

Si on a à la fois $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ (i.e. $P \Leftrightarrow Q$), alors on dit que P (resp. Q) est une condition nécessaire et suffisante pour Q (resp. P), et on est autorisé à employer la formulation: "*si et seulement si*".

0.2.8 Résumé et commentaires

Le but d'une preuve est d'établir la véracité d'une proposition. Les preuves que nous construisons en mathématiques ne doivent pas seulement être correctes et logiques: afin de convaincre leur lecteur, elles doivent aussi être **claires**. La clarté aidera d'autant plus qu'il est généralement d'autant plus difficile de commettre une erreur dans une preuve que celle-ci est claire et bien structurée.

On écrira une preuve différemment selon qu'elle est destinée à un groupe d'experts abonnés à une revue scientifique spécialisée, ou à des étudiants qui suivent un premier cours de mathématiques à l'université. Étant donné le caractère mouvant de ce qui constitue une bonne preuve, nous ne pouvons dès lors qu'encourager l'étudiant à écrire un grand nombre de preuves par lui-même et à les faire relire par d'autres personnes.

Un certain nombre d'indications seront cependant toujours utiles pour écrire une bonne preuve.

- Annoncez la structure de votre preuve. Il est toujours plus facile pour le lecteur de savoir à quoi il doit s'attendre avant de rentrer dans le coeur de la preuve que de devoir le découvrir en cours de lecture. Par exemple, annoncez dès le début si vous procédez par contradiction, ou si vous divisez la preuve en différents cas.
- Organisez vos idées. La manière dont vous découvrirez la preuve d'un résultat sera rarement directe et immédiate. Avant de rédiger votre preuve, réorganisez vos idées de manière à pouvoir les présenter de la manière la plus directe possible.
- L'écriture d'une preuve est un exercice de rédaction, pas un calcul. Une preuve n'est pas une suite d'équations : elle se présente plutôt comme un texte dans lequel on trouve quelques équations dont l'articulation est expliquée.
- Choisissez vos notations avec soin et définissez-les pour l'amour du ciel! L'introduction d'une variable intermédiaire peut considérablement simplifier vos écritures. Elle impose par contre au lecteur de mémoriser le sens de cette nouvelle variable. Veillez donc à n'introduire de nouvelles notations que si elles vous sont réellement utiles, et essayez dans la mesure du possible de rendre leur sens facile à mémoriser.
- Évitez les preuves par intimidation. En particulier, évitez les tournures de phrase comme : "Il est évident que ..." ou "Clairement, ...". Si un fait est réellement évident, il n'y a normalement pas besoin de le dire. La présence d'une telle tournure est plus souvent le signe de l'incapacité du rédacteur de la démonstration à expliquer un fait que celui de la présence d'un fait réellement évident.
- Menez votre démonstration jusqu'à son terme. Après avoir rédigé les éléments essentiels d'une preuve, résistez à la tentation de laisser au lecteur le soin de les assembler pour tirer les conclusions qui s'imposent. Expliquez plutôt pourquoi la proposition que vous cherchez à démontrer découle des différents éléments rassemblés.

Pour aller plus loin

Nous avons défini le fait que si une proposition est démontrée, alors celle-ci est vraie. Qu'en est-il de l'inverse? Une proposition vraie est-elle toujours démontrable? Dans les mathématiques que nous utilisons cela n'est pas le cas. Dans un système non-contradictoire capable d'exprimer les nombres naturels et de faire de l'arithmétique simple avec ceux-ci, il existe en effet des propositions vraies mais indémonstrables. Ce résultat est appelé *théorème d'incomplétude*, et a été énoncé et démontré par le logicien autrichien K. Gödel en 1931. Ce résultat détruit les aspirations du mathématicien D. Hilbert qui pensait que toute proposition vraie en mathématiques pouvait être démontrée en appliquant un nombre fini de fois les règles de logique aux axiomes de base.

0.3 Théorie des ensembles

La théorie des ensembles se donne comme primitives les notions d'ensemble et d'appartenance, à partir desquelles elle reconstruit les objets usuels des mathématiques. Cette section contient un rappel des notions principales relatives à cette théorie. Il s'agit notamment des relations ensemblistes (appartenance, inclusion, égalité) et des opérations ensemblistes (union, intersection, différence, différence symétrique, produit cartésien).

0.3.1 Définitions et notation

— Définition 0.1 (*Ensemble*) —

Un *ensemble* est une collection d'objets distincts, appelés *éléments* de l'ensemble. Si A est un ensemble et si a est un élément de A , on écrit $a \in A$. On dit aussi que a *appartient* à A et que A *contient* a (comme élément).

On peut définir un ensemble de deux façons différentes. Une première façon consiste à donner explicitement tous les éléments de l'ensemble. On dit alors que l'ensemble est défini en *extension*. Par exemple, $A := \{1, 3, 5, 7, 9\}$ désigne un ensemble de cinq éléments, qui sont les nombres 1, 3, 5, 7 et 9. La seconde façon consiste à donner une propriété P qui spécifie exactement les éléments de l'ensemble. On écrira $A := \{x \mid P(x)\}$. On dit alors que l'ensemble A est défini en *compréhension*. L'ensemble $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ choisi comme exemple peut être défini en compréhension par l'écriture $A := \{x \mid x \text{ est un entier positif impair inférieur à } 10\}$.

L'ensemble qui ne contient aucun élément est noté \emptyset ou parfois $\{\}$ et est appelé l'ensemble *vide*. Un ensemble de la forme $\{a\}$, qui contient le seul élément a , est appelé un *singleton*.

Mentionnons certains ensembles numériques importants

$\mathbb{N} :=$ l'ensemble des nombres naturels $:= \{0, 1, 2, 3, \dots\}$;

$\mathbb{Z} :=$ l'ensemble des nombres entiers $:= \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$;

$\mathbb{Q} :=$ l'ensemble des nombres rationnels;

$\mathbb{R} :=$ l'ensemble des nombres réels;

$\mathbb{R}_+ :=$ l'ensemble des nombres réels positifs $:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$;

$\mathbb{C} :=$ l'ensemble des nombres complexes.

Un ensemble peut être un élément d'un autre ensemble. Par exemple, $\{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 2\}$ est un ensemble qui contient trois éléments, à savoir $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3\}$ et 2. De même, $\{\emptyset\}$ est le singleton dont l'élément est l'ensemble vide, ce n'est donc pas un ensemble vide contrairement à \emptyset .

— Définition 0.2 (*Sous-ensemble*) —

Étant donné deux ensembles A et B , on dit que A est un *sous-ensemble* de B si tout élément de A est un élément de B . On écrit $A \subset B$. On dit aussi que A est inclus dans B et que B contient A (comme sous-ensemble).

Exemple 0.9. *On a les inclusions suivantes*

$$\begin{aligned} \{1, 3, 5\} &\subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad \{1, 3, 5\} \subset \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est impair}\}, \\ \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 3 \text{ et } x \text{ est impair}\} &\subset \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est impair}\}. \end{aligned}$$

Notons que l'ensemble vide \emptyset est un sous-ensemble de tout ensemble.

Définition 0.3 (Égalité)

Deux ensembles A et B sont égaux s'ils contiennent les mêmes éléments, c'est-à-dire

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ et } B \subset A.$$

Exemple 0.10. On a les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \{1, 2\} &= \{2, 1\}, \quad \{1, 1\} = \{1\}, \\ \{2, 3, 5, 7\} &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est un nombre premier inférieur à } 10\}. \end{aligned}$$

On dit que l'ensemble A est un *sous-ensemble propre* de l'ensemble B si $A \subset B$ et $A \neq B$.

Définition 0.4 (Ensemble des sous-ensembles)

Étant donné un ensemble A , l'*ensemble des sous-ensembles* de A , noté $\mathcal{P}(A)$, est l'ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles de A . Formellement,

$$\mathcal{P}(A) := \{X \mid X \subset A\}.$$

Exemple 0.11. On a les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\emptyset) &= \{\emptyset\}, \quad \mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}, \quad \mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}, \\ \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}. \end{aligned}$$

0.3.2 Opérations sur les ensembles

Les ensembles peuvent être combinés de différentes façons pour donner de nouveaux ensembles.

- L'*union* de deux ensembles A et B , notée $A \cup B$, est l'ensemble des objets qui appartiennent à l'un de ces deux ensembles. Formellement,

$$A \cup B := \{x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Exemple 0.12. On a les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \{1, 2\} \cup \{3, 4\} &= \{1, 2, 3, 4\}, \quad \{1, 2\} \cup \{1, 3\} = \{1, 2, 3\}, \\ \{1, 2, 3\} \cup \emptyset &= \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

- L'*intersection* de deux ensembles A et B , notée $A \cap B$, est l'ensemble des objets qui appartiennent à chacun de ces deux ensembles. Formellement,

$$A \cap B := \{x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

On dit que A et B sont *disjoints* si $A \cap B = \emptyset$.

Exemple 0.13. On a les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \{1, 2\} \cap \{1, 3\} &= \{1\}, \quad \{1, 2\} \cap \{3, 4\} = \emptyset, \\ \{1, 2, 3\} \cap \emptyset &= \emptyset, \quad \{x \mid x \text{ est premier}\} \cap \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10\} = \{2, 3, 5, 7\}. \end{aligned}$$

- La *différence* de deux ensembles A et B , notée $A \setminus B$, est l'ensemble des objets qui appartiennent au premier et pas au second. Formellement,

$$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Exemple 0.14. On a les égalités suivantes

$$\{1, 2, 3\} \setminus \{1, 2\} = \{3\}, \quad \{1, 2, 3\} \setminus \{3, 4, 5\} = \{1, 2\}.$$

— La *différence symétrique* de deux ensembles A et B , notée $A\Delta B$, est l'ensemble des objets qui appartiennent à l'un de ces ensembles et pas à l'autre. Formellement,

$$A\Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Exemple 0.15. On a les égalités suivantes

$$\{1, 2\} \Delta \{1, 3\} = \{2, 3\}, \quad \{1, 2\} \Delta \emptyset = \{1, 2\}, \quad \{1, 2\} \Delta \{1, 2\} = \emptyset.$$

— Le *produit cartésien* de deux ensembles A et B , notée $A \times B$, est l'ensemble des couples (ordonnés) (a, b) dont la première composante appartient à A et la seconde à B . Formellement,

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Par définition, deux couples (a, b) et (a', b') sont égaux si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$.

Exemple 0.16. On a les égalités suivantes

$$\{1, 2\} \times \{3, 4, 5\} = \{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}.$$

On peut généraliser la notion de produit cartésien au cas de plusieurs ensembles A_1, \dots, A_n . La définition est la suivante

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Les éléments (a_1, \dots, a_n) de A_1, \dots, A_n sont appelés des n -uplets (ordonnés), on dit que a_i est la i ème composante du n -uplet (a_1, \dots, a_n) . Dans le cas particulier $A_1 = \dots = A_n = A$, on écrit A^n au lieu de $A \times \dots \times A$ (n fois). On dit que A^n est la n -ième puissance cartésienne de A .

On a la propriété d'associativité $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$, et de même pour l'intersection. Plus généralement, étant donné n ensembles A_1, A_2, \dots, A_n , on définit leur union $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, ainsi que leur intersection $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$. Mentionnons les relations de distributivité entre réunion et intersection

$$\begin{aligned} A \cap (B_1 \cup B_2) &= (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2), \\ A \cup (B_1 \cap B_2) &= (A \cup B_1) \cap (A \cup B_2). \end{aligned}$$

Insistons sur la distinction essentielle entre la notion d'appartenance (d'un élément à un ensemble) et la notion d'inclusion (d'un ensemble dans un autre ensemble). Par exemple, $\{1\}$ est un élément de l'ensemble $E := \{\{1\}, 2\}$ mais n'est pas un sous-ensemble de E . Notons aussi que 1 n'est pas un élément de E , et que $\{\{1\}\}$ est un sous-ensemble de E . A cet égard, étant donné une famille d'ensembles A_i , où l'indice i parcourt un certain ensemble I , il importe de ne pas confondre $\{A_i \mid i \in I\}$ avec $\cup_{i \in I} A_i$. Les éléments de $\{A_i \mid i \in I\}$ sont les ensembles A_i eux-mêmes, tandis que les éléments de $\cup_{i \in I} A_i$ sont les objets qui appartiennent à l'un des A_i (au moins).

0.3.3 Relations

Définition 0.5 (Relation)

Étant donné deux ensembles A et B , un sous-ensemble \mathcal{R} du produit cartésien $A \times B$ est appelé une *relation* (binaire) de A vers B . On parle aussi de relation entre A et B .

Une relation de A vers A , c'est-à-dire un sous-ensemble de A^2 , est appelée une relation binaire sur A , ou simplement une relation sur A . Si \mathcal{R} est une relation, on utilise souvent la notation $a\mathcal{R}b$, au lieu de $(a, b) \in \mathcal{R}$, pour exprimer le fait que (a, b) appartient à la relation \mathcal{R} .

Exemple 0.17. Si A est un ensemble d'étudiants et B un ensemble de cours, on peut s'intéresser à la relation $\mathcal{R} \subset A \times B$ définie comme suit: $a\mathcal{R}b$ si et seulement si l'étudiant a suit le cours b (avec $a \in A$ et $b \in B$).

Une relation \mathcal{R} sur un ensemble non vide A est dite

1. *réflexive* si pour tout $x \in A$ on a $x\mathcal{R}x$;
2. *symétrique* si pour tout $(x, y) \in A^2$ tel que $x\mathcal{R}y$, on a $y\mathcal{R}x$;
3. *transitive* si pour tout $(x, y, z) \in A^3$ tel que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, on a $x\mathcal{R}z$;
4. *antisymétrique* si pour tout $(x, y) \in A^2$ tel que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, on a $x = y$.

Exemple 0.18. Soit l'ensemble $A = \mathbb{Z}$ et la relation \mathcal{R} définie comme $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x = -y$.

1. La relation n'est pas réflexive, car 1 n'est pas en relation avec lui-même: $1 \neq -1$.
2. La relation est symétrique, car $x = -y$ est équivalent à $y = -x$.
3. Elle n'est pas transitive. En effet, on a $1\mathcal{R}-1$, $-1\mathcal{R}1$ et 1 et 1 ne sont pas en relation.
4. Elle n'est pas antisymétrique, car $1\mathcal{R}-1$ et $-1\mathcal{R}1$, alors que $1 \neq -1$.

Parmi les relations binaires sur un ensemble, on met en évidence deux familles particulières, qui interviennent fréquemment en mathématique: les *relations d'équivalence* et les *relations d'ordre (partiel)*.

Définition 0.6 (Relations d'équivalence)

Une relation \mathcal{R} sur un ensemble non vide A est appelée une *relation d'équivalence* (sur A) si \mathcal{R} est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple 0.19. Il est clair que la relation d'égalité sur A , définie par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x = y$, est une relation d'équivalence. A l'autre extrême, la relation complète sur A , définie par $x\mathcal{R}y$ pour tout x et tout y (c'est-à-dire $\mathcal{R} = A^2$), est aussi une relation d'équivalence. Notons que la relation d'égalité est antisymétrique et que la relation complète ne l'est pas (si A contient au moins deux éléments).

Exemple 0.20. Soit l'ensemble $A = \mathbb{R}$ et la relation \mathcal{R} définie comme $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $\cos(x)^2 + \sin(y)^2 = 1$.

1. De la formule $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$, on déduit que la relation est réflexive.
2. Elle est aussi symétrique. En effet, si $x\mathcal{R}y$, i.e. $\cos(x)^2 + \sin(y)^2 = 1$, alors on a

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 + \sin(y)^2 + \cos(y)^2 = (\cos(x)^2 + \sin(y)^2) + (\cos(y)^2 + \sin(x)^2) = 1 + (\cos(y)^2 + \sin(x)^2)$$

d'une part, et

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 + \sin(y)^2 + \cos(y)^2 = 1 + 1 = 2$$

d'autre part, ce qui entraîne bien

$$\cos(y)^2 + \sin(x)^2 = 1,$$

i.e. $y\mathcal{R}x$.

3. Elle est transitive. Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, on a

$$\cos(x)^2 + \sin(y)^2 = 1 \quad \text{et} \quad \cos(y)^2 + \sin(z)^2 = 1.$$

En sommant, on a

$$\cos(x)^2 + (\cos(y)^2 + \sin(y)^2) + \sin(z)^2 = 2,$$

ce qui implique

$$\cos(x)^2 + \sin(z)^2 = 1,$$

i.e. $x\mathcal{R}z$.

Il s'agit donc d'une relation d'équivalence.

La notion de relation d'équivalence est étroitement liée à la notion de *partition* d'un ensemble. Toute relation d'équivalence sur un ensemble induit une partition de cet ensemble en *classes* formées d'éléments équivalents deux à deux. Voyons cela de manière précise.

Définition 0.7 (*Partition d'un ensemble*)

Soit un ensemble non vide A , et soit un ensemble non vide I dont les éléments sont appelés des indices. Supposons qu'à chaque indice $i \in I$ soit associé un sous-ensemble non vide A_i de A . On dit que l'ensemble $\{A_i \mid i \in I\}$ est une *partition* de A , et que les A_i sont les classes de cette partition, si les deux conditions suivantes sont satisfaites

1. $\cup_{i \in I} A_i = A$ (les classes recouvrent tout l'ensemble A);
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i, j \in I, i \neq j$ (les classes sont disjointes).

Définition 0.8 (*Classes d'équivalences*)

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un ensemble A . Pour chaque $x \in A$, la *classe d'équivalence* de x selon \mathcal{R} , notée $[x]$, est définie par

$$[x] := \{y \in A \mid y\mathcal{R}x\}.$$

Lemme 0.1

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un ensemble A . Pour tout choix des éléments x et y de A , on a

1. $x \in [x]$
2. $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $[x] = [y]$
3. $[x] = [y]$ ou $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Démonstration :

1. Cela résulte de la réflexivité $x\mathcal{R}x$.
2. Supposons d'abord $x\mathcal{R}y$. Soit $z \in [x]$, c'est-à-dire $z\mathcal{R}x$. Alors $z\mathcal{R}y$, par transitivité, c'est-à-dire $z \in [y]$, et donc $[x] \subset [y]$. Soit $w \in [y]$, c'est-à-dire $w\mathcal{R}y$, d'où $y\mathcal{R}w$ (symétrie), $x\mathcal{R}w$ (transitivité), et $w\mathcal{R}x$ (symétrie) c'est-à-dire $w \in [x]$. Donc $[y] \subset [x]$, d'où $[x] = [y]$.

Supposons ensuite $[x] = [y]$. Puisque $x \in [x]$, par (1), on obtient $x \in [y]$, c'est-à-dire $x\mathcal{R}y$.

3. Supposons $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ et montrons que $[x] = [y]$. Choisissons $z \in A$ tel que $z \in [x]$ et $z \in [y]$, c'est-à-dire $z\mathcal{R}x$ et $z\mathcal{R}y$, d'où $x\mathcal{R}y$ par symétrie et transitivité. La conclusion se traduit par $[x] = [y]$, en vertu de (2).

□

Du Lemme 0.1, on déduit immédiatement la proposition suivante, qui énonce le fait que la notion de relation d'équivalence cerne exactement la notion de partition.

Proposition 0.10

Soit A un ensemble non vide.

1. Si \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur A , alors les classes d'équivalence des éléments de A selon \mathcal{R} forment une partition de A .
2. Si $\{A_i \mid i \in I\}$ est une partition de A , alors la relation binaire sur A définie par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si x et y appartiennent à la même classe A_i est une relation d'équivalence.

Ainsi, en réalité, la notion de relation d'équivalence est assez simple et se comprend sans difficulté. Elle se ramène exactement à la notion de partition d'un ensemble (en "classes disjointes").

Comme on vient de le voir, une relation d'équivalence sur un ensemble définit une partition de celui-ci en classes d'équivalence. On peut alors chercher à identifier des objets que l'on peut associer à une classe

d'équivalence, en ce sens qu'ils ne varient pas selon l'élément choisi dans sa classe. Pour cela, on va introduire la notion d'*invariant* d'une relation d'équivalence.

— **Définition 0.9 (Invariant)** —

Soit \mathcal{R} une relation sur un ensemble A . Soit f une application de l'ensemble A vers un ensemble quelconque. On dit que

- f est un *invariant* si: $\forall x, y \in A : x\mathcal{R}y \Rightarrow f(x) = f(y)$;
- f est un *invariant total* si: $\forall x, y \in A : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.

Ainsi, un invariant f fournit une condition nécessaire pour que deux éléments d'un ensemble appartiennent à la même classe d'équivalence. Un invariant total fournit quant à lui une condition nécessaire et suffisante, et de ce fait, il caractérise complètement la relation d'équivalence.

— **Définition 0.10 (Ordre partiel)** —

Une relation \mathcal{R} sur un ensemble non vide A est appelée un *ordre partiel* (ou une relation d'ordre partiel) si \mathcal{R} est réflexive, transitive et antisymétrique.

Exemple 0.21. On vérifie facilement que chacune des trois relations suivantes est un ordre partiel.

1. Soit la relation \mathcal{R} sur l'ensemble \mathbb{N} définie par $x\mathcal{R}y$ si x est inférieur ou égal à y .
2. Soit la relation \mathcal{R} sur l'ensemble $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ définie par $x\mathcal{R}y$ si x est un diviseur de y .
3. Étant donné un ensemble B , soit \mathcal{R} la relation sur l'ensemble $\mathcal{P}(B)$ définie par $x\mathcal{R}y$ si x est un sous-ensemble de y .

La notion d'ordre partiel apparaît donc comme une généralisation, ou une "abstraction", de ces exemples particuliers. Nous voyons fonctionner ici une méthode habituelle et féconde en mathématique: à partir d'un éventail de situations différentes qui ont certaines propriétés fondamentales en commun, on pose les bases d'une théorie générale en prenant ces propriétés comme axiomes (méthode que nous appliquerons plus tard à l'algèbre linéaire en introduisant les espaces vectoriels). L'objet d'une telle théorie est une "structure" bien définie. Dans le cas qui nous occupe, il s'agit de la structure d'ensemble partiellement ordonné que nous allons voir dans un instant.

— **Définition 0.11 (Ensemble partiellement ordonné)** —

Soit A un ensemble non vide et soit \mathcal{R} un ordre partiel sur A . Le couple (A, \mathcal{R}) est appelé un ensemble partiellement ordonné. On dit aussi que A lui-même est un ensemble *partiellement ordonné*, la relation \mathcal{R} étant sous-entendue.

L'Exemple 0.21.1 diffère des exemples 0.21.2 et 0.21.3 en ceci que, pour l'exemple 1, deux éléments quelconques sont toujours "comparables" selon la relation \mathcal{R} . On dit alors que l'ordre \mathcal{R} est *total*. Les exemples 2 et 3 n'ont pas cette propriété. La définition précise est la suivante.

— **Définition 0.12 (Ordre total)** —

Soit \mathcal{R} un ordre partiel sur A . On dit que \mathcal{R} est un *ordre total* si pour tout $(x, y) \in A^2$ on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$. Dans ce cas on dit que (A, \mathcal{R}) est un ensemble *totalelement ordonné*.

Ainsi, un ordre total est un cas particulier d'ordre partiel ("total" est restrictif par rapport à "partiel", mais ne s'y oppose pas).

La notation habituelle pour une relation d'ordre partiel (ou total) utilise le symbole \leq au lieu du symbole général \mathcal{R} . A l'origine, ce symbole désigne la relation "inférieur ou égal" au sens numérique, comme dans l'Exemple 0.21.1 ci-dessus. On se permet de conserver ce même symbole pour noter une relation d'ordre quelconque. Dans les applications, on rencontre cependant des notations plus spécifiques. Ainsi, dans l'exemple 3, on utilisera la notation \subset de l'inclusion ensembliste.

Remarque 0.1. Les notions de relation d'équivalence (Définition 0.6) et de relation d'ordre partiel (Définition 0.10) sont radicalement différentes. La seule relation sur A qui soit à la fois une équivalence et un ordre partiel est la relation d'égalité sur A ($x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y$).

0.3.4 Fonctions

— Définition 0.13 (Fonction) —

Soient A et B deux ensembles non vides. Une *fonction*, ou application, de A vers B est un triplet $f = (A, B, \mathcal{R})$ où \mathcal{R} est une relation de A vers B ayant la propriété suivante: pour tout élément x de A , il existe un et un seul élément y de B tel que $x\mathcal{R}y$ (c'est-à-dire tel que le couple (x, y) appartienne à la relation \mathcal{R}). Cet élément y est noté $f(x)$. On dit que $f(x)$ est l'image de x par f .

Étant donné une fonction $f = (A, B, \mathcal{R})$, on appelle

- l'ensemble A : le *domaine* de f ;
- l'ensemble B : le *codomaine* de f ;
- la relation \mathcal{R} : le *graphe* de f .

On représentera une fonction f , de domaine A et de codomaine B , par la notation

$$f : A \rightarrow B : x \rightarrow f(x).$$

Exemple 0.22. La fonction "doublement" sur les nombres entiers pourra être représentée par $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : x \rightarrow 2x$.

Le domaine A et le codomaine B d'une fonction f font partie intégrante de la définition de f . On ne peut pas identifier f avec uniquement son graphe \mathcal{R} (un sous-ensemble de $A \times B$). Par exemple, la fonction "doublement" f ci-dessus n'est pas la même que la fonction $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : x \rightarrow 2x$, bien que les fonctions f et g aient le même graphe.

— Définition 0.14 (Réciproque) —

Soit $f : A \rightarrow B$ et soit $y \in B$. L'image réciproque de y par f , notée $f^{-1}(y)$, est le sous-ensemble de A formé des éléments dont l'image par f est y . Formellement,

$$f^{-1}(y) = \{x \in A \mid f(x) = y\}.$$

Exemple 0.23. Soit la fonction $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : x \rightarrow x^2$. On a

$$\begin{aligned} f(-2) &= \{4\}; \\ f^{-1}(4) &= \{-2, 2\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la relation réciproque n'est pas une fonction.

—**Définition 0.15** (*Injectivité, surjectivité, bijectivité*)—

Une fonction $f : A \rightarrow B$ est

1. *injective* si deux éléments distincts du domaine ont des images distinctes dans le codomaine:

$$\text{si } (x_1, x_2) \in A^2 \text{ et si } f(x_1) = f(x_2), \text{ alors } x_1 = x_2.$$

On voit que f est injective si et seulement si, pour tout $y \in B$, l'image réciproque $f^{-1}(y)$ contient au maximum un élément.

2. *surjective* si tout élément du codomaine est l'image d'un certain élément du domaine:

$$\forall y \in B : \exists x \in A \mid f(x) = y.$$

3. *bijective* si f est à la fois injective et surjective.

Exemple 0.24. Voici une illustration des quatre possibilités relatives aux notions d'injectivité et de surjectivité:

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow x^2$ ni injective, ni surjective ;
2. $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow x^2$ injective mais pas surjective ;
3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ : x \rightarrow x^2$ pas injective mais surjective ;
4. $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ : x \rightarrow x^2$ injective et surjective: bijective.

—**Définition 0.16** (*Composition*)—

Étant donné une fonction $f : A \rightarrow B$ et une fonction $g : B \rightarrow C$, la fonction composée de f et g , notée $g \circ f$, est définie par

$$g \circ f : A \rightarrow C : x \rightarrow g(f(x)).$$

—**Définition 0.17** (*Fonction identité*)—

Étant donné un ensemble A , la fonction identité 1_A est la fonction de A définie par $1_A(x) := x$ pour tout $x \in A$.

—**Définition 0.18** (*Réciproque à gauche/droite*)—

Soient deux fonctions $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow A$ telles que $g \circ f = 1_A$. Alors on dit que

- g est une *réciproque à gauche* de f ;
- f est une *réciproque à droite* de g .

Si, en outre, $f \circ g = 1_B$, alors on dit que g est une réciproque ("bilatérale") de f et, symétriquement, que f est une réciproque de g .

—**Proposition 0.11**—

On a les équivalences suivantes.

1. Une fonction possède une réciproque à gauche si et seulement si elle est injective ;
2. Une fonction possède une réciproque à droite si et seulement si elle est surjective.

—**Proposition 0.12**—

Une fonction f est bijective si et seulement si elle possède une réciproque à gauche et une réciproque à droite. Dans ce cas, la réciproque à gauche est unique et la réciproque à droite est unique; ces deux fonctions sont égales; elles sont égales à la seule réciproque (bilatérale) de f .

On voit ainsi qu'une fonction est bijective si et seulement si elle possède une réciproque. Si f est une bijection de A sur B , la réciproque de f est une bijection de B sur A que l'on désigne par f^{-1} . On a la propriété $(f^{-1})^{-1} = f$.

— **Définition 0.19** (*Argument minimal vs minimum*) —

Soit $f : A \rightarrow B$ une fonction avec B un ensemble totalement ordonné.
L'*argument minimal* d'une fonction f défini comme

$$\operatorname{argmin}_{x \in A} f(x) = \{x \in A \mid f(x) \leq f(x') \forall x' \in A\}$$

est l'ensemble des valeurs pour lesquelles la fonction f atteint son minimum.

A ne pas confondre avec le *minimum* d'une fonction f défini comme la valeur minimale de la fonction

$$\min_{x \in A} f(x) = f\left(\operatorname{argmin}_{x \in A} f(x)\right).$$

On peut définir de manière analogue l'*argument maximal* et le *maximum* d'une fonction.

Les arguments minimaux et maximaux sont des *extrémants* de f alors que le minimum et le maximum sont des *extrémas* de f .

0.4 Fonctions récursives

L'ensemble \mathbb{N} des nombres naturels joue un rôle essentiel en mathématique. Les opérations de base sur \mathbb{N} (addition, multiplication, etc.) sont définies, de manière récursive, à partir des notions primitives de "zéro" (noté 0) et de "fonction successeur" (qui associe à tout naturel le naturel "suivant"). On peut ainsi introduire une famille étendue de fonctions sur les naturels. Mentionnons deux exemples intéressants, qui illustrent la façon récursive de définir une fonction:

1. L'*exponentielle discrète* $n \rightarrow a^n$, où a est un nombre naturel fixé, est définie récursivement par

$$a^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ a \cdot a^{n-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons que cette définition peut être étendue au cas où a est un nombre réel, un nombre complexe, une matrice carrée, etc.

2. La *factorielle* $n \rightarrow n! := n(n-1) \dots 1$ est définie récursivement de la manière suivante

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{sinon.} \end{cases}$$

0.5 Corps

Dans cette section, on introduit une structure algébrique fondamentale de l'algèbre: le *corps*.

Définition 0.20 (*Corps*)

Un *corps commutatif* K est un ensemble muni de deux opérations qui permettent d'additionner et de multiplier des éléments de l'ensemble entre eux de telle sorte que le résultat de ces opérations appartient lui aussi au corps

- l'addition $+$: $K \times K \rightarrow K$;
- la multiplication \cdot : $K \times K \rightarrow K$.

De plus, le triplet $(K, +, \cdot)$ doit satisfaire plusieurs conditions:

1. les opérations sont commutatives:

$$\forall \alpha, \beta \in K : \alpha + \beta = \beta + \alpha \text{ et } \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha.$$

2. existence d'un neutre additif (noté 0):

$$\exists 0 \in K \text{ tel que } \forall \alpha \in K : \alpha + 0 = \alpha.$$

3. existence d'un neutre multiplicatif (noté 1):

$$\exists 1 \in K \text{ tel que } \forall \alpha \in K : \alpha \cdot 1 = \alpha.$$

4. existence d'un inverse additif:

$$\forall \alpha \in K : \exists \beta \in K : \alpha + \beta = 0.$$

On appelle β l'inverse additif de α , on le note $-\alpha$.

5. existence d'un inverse multiplicatif pour tout élément du corps (sauf 0):

$$\forall \alpha \in K \setminus \{0\} : \exists \beta \in K : \alpha \cdot \beta = 1.$$

On appelle β l'inverse multiplicatif de α , on le note α^{-1} .

6. la multiplication est distributive par rapport à l'addition (à gauche comme à droite):

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in K : \alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \text{ et } (\beta + \gamma) \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha.$$

Pour définir formellement un corps, il faut donc spécifier le triplet $(K, +, \cdot)$, c'est-à-dire l'espace lui-même mais aussi les opérations d'addition et de multiplication. Lorsque ces opérations ne sont pas précisées explicitement, on considère les opérations usuelles d'addition et de multiplication usuelles des éléments de l'ensemble K . Par exemple, \mathbb{R} et \mathbb{C} munis des opérations usuelles d'addition et de multiplication sont des corps commutatifs. En revanche, \mathbb{N} n'est pas un corps commutatif car excepté pour 0, il n'existe pas d'inverse additif.

Chapitre 1

Calcul matriciel

Le calcul matriciel est un outil puissant pour résoudre de nombreux problèmes pratiques en science, en ingénierie, en économie et dans de nombreux autres domaines. La manipulation de matrices est l'une des compétences clés en algèbre linéaire.

Une *matrice* est un objet mathématique qui se présente sous la forme d'un tableau d'éléments. Les matrices sont toujours définies sur une structure algébrique telles qu'un corps fini. Cela signifie simplement que les éléments repris dans le tableau appartiennent à cette structure algébrique. Dans ce cours nous resterons principalement cantonnés aux réels (\mathbb{R}) ou aux complexes (\mathbb{C}). Les matrices que nous traiterons seront donc le plus souvent des tableaux de nombres.

Dans ce chapitre, nous allons explorer les bases du calcul matriciel. Nous commencerons par introduire des matrices aux structures particulières et les opérations fondamentales telles que la multiplication de matrices, la transposition et l'inversion de matrices.

Nous verrons également comment échelonner une matrice, procédure utile pour inverser des matrices, calculer la factorisation LU d'une matrice, mais aussi comme nous le verrons dans le prochain chapitre, pour résoudre des systèmes d'équations linéaires.

Enfin nous verrons l'un des concepts les plus importants de l'algèbre linéaire: le *déterminant*. Il est utilisé dans une grande variété de domaines, tels que la théorie des équations linéaires, l'analyse de systèmes dynamiques, la géométrie et les statistiques. En effet, le déterminant est une mesure de la façon dont une matrice transforme l'espace, et permet de déterminer si une matrice a une inverse ou pas. Dans ce chapitre, nous allons explorer les bases du déterminant de matrices, en commençant par la définition du déterminant, les propriétés algébriques, comment calculer le déterminant et comment utiliser le déterminant pour trouver l'inverse d'une matrice carrée. Dans les prochains chapitres, nous examinerons également l'utilisation du déterminant pour la résolution de systèmes d'équations linéaires et dans la théorie des valeurs propres et des vecteurs propres pour comprendre la géométrie de transformations linéaires.

En conclusion, les matrices sont omniprésentes en mathématiques. On en retrouve notamment

- dans la résolution de systèmes d'équations linéaires ;
- en statistiques, où la plupart des données utilisées en machine learning (ou apprentissage automatique) se présentent sous la forme de matrices ;
- en analyse numérique, pour modéliser la discrétisation d'espaces continus ;
- dans bien d'autres domaines variés.

Les matrices sont d'autant plus utiles qu'elles peuvent facilement être utilisées par des ordinateurs pour des applications très concrètes.

1.1 Définitions

Définition 1.1 (Matrice)

Soit K un corps commutatif, on note $K^{m \times n}$ l'ensemble des *matrices* $m \times n$, c'est-à-dire des tableaux rectangulaires de m lignes et n colonnes dont chaque entrée est un élément de K . L'ensemble K est dénommé le *corps des scalaires*.

Dans ce syllabus, on notera une matrice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ par une lettre majuscule et en gras, et l'élément de la i -ème ligne et j -ème colonne de \mathbf{A} (avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$) par $A_{i,j}$. D'après la Définition 1.1, si $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, on a donc $A_{i,j} \in K$ pour tout $i = 1, \dots, m$ et tout $j = 1, \dots, n$.

Exemple 1.1. L'ensemble $\mathbb{R}^{m \times n}$ contient les matrices de m lignes et n colonnes dont toutes les entrées sont des nombres réels. Des exemples de telles matrices (pour différentes valeurs de m et n) sont:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} \\ D_{2,1} & D_{2,2} \end{pmatrix},$$

où $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ et $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

On dit que deux matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} de $K^{m \times n}$ sont égales si et seulement si leurs éléments sont égaux, c'est-à-dire :

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \text{si et seulement si} \quad A_{i,j} = B_{i,j} \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, m \text{ et tout } j = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

Il existe certaines matrices particulières qui auront leur intérêt tout au long de ce syllabus. Nous en listons une partie ci-dessous.

- Une matrice n'ayant qu'une seule ligne, c'est-à-dire une matrice appartenant à $K^{1 \times n}$ est appelée *matrice ligne*. De même, une matrice n'ayant qu'une seule colonne, c'est-à-dire appartenant à $K^{m \times 1}$ est appelée *matrice colonne*. De telles matrices sont également appelées *vecteurs lignes* et *vecteurs colonnes* respectivement ;
- Une matrice ayant le même nombre de lignes que de colonnes (c'est-à-dire une matrice de $K^{n \times n}$) est appelée *matrice carrée*. L'ordre d'une matrice carrée est donné par son nombre de lignes ou de colonnes, on appelle alors plus généralement une matrice de $K^{n \times n}$ *matrice carrée d'ordre n* . La *diagonale principale* d'une matrice carrée $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est formée des entrées dont les indices sont égaux, soit les éléments $A_{i,i}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$;
- Une matrice carrée dont les éléments hors de la diagonale principale sont nuls est appelée *matrice diagonale*. Formellement les éléments d'une matrice diagonale $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfont $A_{i,j} = 0$, pour $i \neq j$;
- La *matrice identité* d'ordre n , notée \mathbf{I}_n , ou plus simplement \mathbf{I} quand aucune ambiguïté n'est permise, est la matrice carrée diagonale dont les éléments diagonaux sont des 1 (*i.e.*, l'élément neutre de la multiplication dans K). Cette matrice satisfait donc pour tout $i, j = 1, \dots, n$ la condition $I_{i,j} = \delta_{ij}$, où δ_{ij} est le *symbole ou delta de Kronecker* défini comme

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}. \quad (1.2)$$

- Une matrice n'ayant des éléments non-nuls que sur la diagonale et exclusivement au-dessus ou au-dessous est appelée *matrice triangulaire*. On distingue deux cas de matrice triangulaire:
 1. La matrice *triangulaire supérieure* est telle que $A_{i,j} = 0$ si $i > j$;
 2. La matrice *triangulaires inférieure* est telle que $A_{i,j} = 0$ si $i < j$.

Lorsque la diagonale d'une matrice triangulaire est nulle, on parle de matrice *strictement* triangulaire.

- Pour m, n fixés, la *matrice nulle*, notée $\mathbf{0}_{m,n}$, ou plus simplement $\mathbf{0}$ quand aucune ambiguïté n'est possible, est la matrice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ dont chaque élément $A_{i,j} = 0$.
- ... et autres. Il existe une pléthore de sortes de matrices différentes avec leurs caractéristiques propres que vous aurez peut-être la chance de rencontrer dans le futur.

Exemple 1.2. Voici quelques exemples de matrices particulières listées ci-dessus :

- La matrice $(1 \ 0 \ 0 \ -1)$ une matrice ligne (ou un vecteur ligne) de $\mathbb{R}^{1 \times 4}$;

- La matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne (ou un vecteur colonne) de $\mathbb{R}^{4 \times 1}$;

- Soient $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Les matrices

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ e & d & a & b \\ f & e & d & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 420 \\ 2 & 1 & \sqrt{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & -1.2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad (1) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$$

sont des matrices carrées respectivement d'ordres 4, 3 et 1 ;

- Soit $a \in \mathbb{R}$. Les matrices

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{3} \end{pmatrix}; \quad (1)$$

sont des matrices diagonales ;

- Les matrices

$$(1); \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & 1 \end{pmatrix}$$

sont des matrices identité.

- Les matrices

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 19 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 19 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

sont des matrices triangulaires respectivement supérieure et inférieure. Les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 19 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 19 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

sont leurs équivalents strictement triangulaires supérieure et inférieure.

1.1.1 Opérations matricielles et propriétés

La notion de *matrice* étant à présent définie, nous pouvons maintenant définir les *opérations matricielles* qui nous permettront de les manipuler. De la même façon qu'on peut additionner deux nombres réels, on peut

additionner deux matrices sous certaines conditions. Pareillement pour la multiplication entre une matrice et un scalaire ou pour la multiplication entre deux matrices¹.

Définition 1.2 (Opérations matricielles)

1. **Somme de matrices:** Soient deux matrices de mêmes dimensions $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$, on définit leur *addition* (ou *somme*) comme suit:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j} \quad \forall i, j. \quad (1.3)$$

2. **Multiplication par un scalaire:** Soit une matrice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ et un scalaire $\alpha \in K$, on définit la *multiplication par un scalaire* comme suit:

$$(\alpha \mathbf{A})_{i,j} = \alpha A_{i,j} \quad \forall i, j. \quad (1.4)$$

3. **Multiplication matricielle:** Soient une matrice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ et une matrice $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$, on définit la *multiplication matricielle* comme suit:

$$(\mathbf{AB})_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j} \quad \forall i, j. \quad (1.5)$$

Ainsi, pour pouvoir additionner deux matrices, elles doivent être de *mêmes dimensions*. En revanche, pour pouvoir multiplier deux matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} , elles doivent être *compatibles*, c'est-à-dire, il faut que le nombre de colonnes de \mathbf{A} soit égal au nombre de lignes de \mathbf{B} .

Exemple 1.3. Soient $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

— On peut calculer

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1+(-1) & -1+1 & 2+0 & 4+(-2) \\ -2+2 & -3+1 & -1+0 & 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

— Soit $\alpha = 5$, on peut calculer

$$\alpha \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot (-1) & 5 \cdot 2 & 5 \cdot 4 \\ 5 \cdot (-2) & 5 \cdot (-3) & 5 \cdot (-1) & 5 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 10 & 20 \\ -10 & -15 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.4. Soient les matrices $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ et $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ définies comme suit :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Les matrices \mathbf{A} et \mathbf{C} se multiplient suivant la définition du produit matriciel comme suit :

$$\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 4 \\ \boxed{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

L'élément (i, j) du produit des matrices \mathbf{A} et \mathbf{C} est donc obtenu en "multipliant" la i -ème ligne de \mathbf{A} avec la j -ème colonne de \mathbf{C} , par exemple :

$$(\mathbf{AC})_{2,1} = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 2.$$

En revanche, les dimensions de \mathbf{A} et \mathbf{B} ne permettent pas de calculer \mathbf{AB} , qui n'est donc pas défini.

1. Les mathématiciens disent que les matrices forment une structure d'*algèbre*.

La définition du produit matriciel peut sembler particulière, voire contre-intuitive au premier abord. Ce produit revêt cependant une importance cruciale, notamment pour la facilité avec laquelle il permet de représenter les *combinaisons linéaires* (nous reviendrons plus en détail sur ce concept plus tard, voir Remarque 4.1). Une représentation graphique de la façon dont ce mystérieux produit s'effectue est donnée dans la Fig. 1.1.

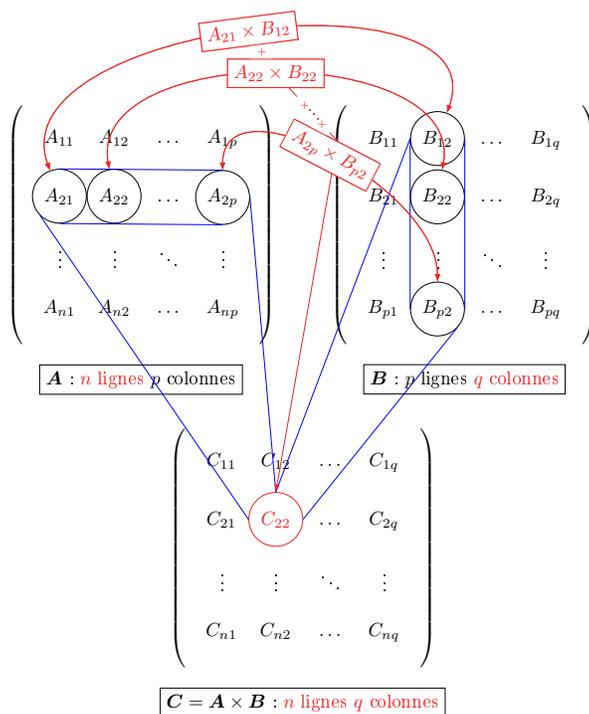


FIGURE 1.1 – Représentation graphique du produit matriciel $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}$: l'élément $C_{2,2}$ est obtenu en "multipliant" la 2-ème ligne de \mathbf{A} et la 2-ème colonne de \mathbf{B} .

On peut dès lors établir (par vérification directe) les différentes propriétés pour ces opérations.

Propriétés de l'addition : Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in K^{m \times n}$. L'addition matricielle

est associative :	$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C});$
est commutative :	$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A};$
possède un élément <i>neutre</i> :	$\mathbf{A} + \mathbf{0}_{m,n} = \mathbf{A} = \mathbf{0}_{m,n} + \mathbf{A};$
tout élément sauf le neutre possède un inverse additif:	$\mathbf{A} + (-1)\mathbf{A} = \mathbf{0}_{m,n} = (-1)\mathbf{A} + \mathbf{A}.$

Propriétés de la multiplication par un scalaire : Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ et $\alpha, \beta \in K$. La multiplication par un scalaire

est associative :	$(\alpha\beta)\mathbf{A} = \alpha(\beta\mathbf{A});$
possède un élément neutre :	$1\mathbf{A} = \mathbf{A};$
est distributive par rapport à l'addition de scalaires :	$(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A};$
est distributive par rapport à l'addition de matrices :	$\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}.$

Propriétés de la multiplication matricielle : Soient $\mathbf{A}, \mathbf{A}' \in K^{m \times n}$, $\mathbf{B}, \mathbf{B}' \in K^{n \times p}$, $\mathbf{C} \in K^{p \times q}$ et $\alpha \in K$. La multiplication matricielle

est associative :	$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC});$
possède un élément neutre :	$\mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A} = \mathbf{I}_m\mathbf{A};$
est distributive à gauche par rapport à l'addition matricielle :	$(\mathbf{A} + \mathbf{A}')\mathbf{B} = \mathbf{AB} + \mathbf{A}'\mathbf{B};$
est distributive à droite par rapport à l'addition matricielle :	$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{B}') = \mathbf{AB} + \mathbf{AB}';$
est associative par rapport à la multiplication par un scalaire :	$(\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \alpha(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}).$

Le lecteur attentif aura remarqué que deux propriétés pourtant habituelles manquent à l'appel pour la multiplication matricielle:

— Le produit matriciel **n'est pas commutatif** : en général

$\alpha.$

D'ailleurs, pour rappel, si $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ et $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$, alors \mathbf{AB} est toujours bien défini mais \mathbf{BA} n'est défini que si $m = p$.

— Contrairement aux nombres réels, on n'a pas la propriété que 'tout élément hormis le neutre pour l'addition possède un inverse multiplicatif'. Nous verrons en effet que certaines matrices, quoique non nulles, ne sont pas inversibles pour la multiplication!

Exemple 1.5. Soient les matrices \mathbf{A} et \mathbf{C} de l'Exemple 1.4:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Les produits \mathbf{AC} et \mathbf{CA} sont tous les deux bien définis et donnent:

$$\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{CA} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 12 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Même pour des matrices carrées, le produit matriciel peut ne pas être commutatif.

Exemple 1.6. Soient les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Les produits \mathbf{AB} et \mathbf{BA} sont:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Il apparaît ici clairement que le produit matriciel n'est pas commutatif.

Remarque 1.1. (L'identité est commutative) Si la commutativité du produit matriciel n'est généralement pas vraie, il arrive que ce soit le cas. En particulier, la matrice identité \mathbf{I}_n commute avec toute matrice carrée d'ordre n : pour $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ et $\alpha \in K$,

$$(\alpha\mathbf{I}_n)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{I}_n).$$

1.1.2 Opérations par blocs

Une pratique courante lorsqu'on manipule des matrices (surtout de grande taille) est de la subdiviser en plusieurs blocs plus petits qui, une fois assemblés convenablement, forment la matrice initiale. Nous allons voir que cette pratique permet de représenter l'addition et la multiplication de manière concise.

Il existe autant de façon de subdiviser une matrice que de décompositions de ses dimensions en somme de nombres entiers positifs. Ainsi, une matrice $\mathbf{A} \in K^{4 \times 6}$ admet autant de décompositions par blocs qu'il y a de décompositions de 4 et 6 en sommes d'entiers positifs. Un exemple d'une telle décomposition correspondant à

$$4 = 1 + 2 + 1; \qquad 6 = 2 + 4$$

est

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cc|cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} \end{pmatrix},$$

avec les blocs

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= (a_{11} \ a_{12}); & \mathbf{A}_{12} &= (a_{13} \ a_{14} \ a_{15} \ a_{16}); \\ \mathbf{A}_{21} &= \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}; & \mathbf{A}_{22} &= \begin{pmatrix} a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{pmatrix}; \\ \mathbf{A}_{31} &= (a_{41} \ a_{42}); & \mathbf{A}_{32} &= (a_{43} \ a_{44} \ a_{45} \ a_{46}). \end{aligned}$$

Les deux décompositions les plus fréquemment utilisées sont les suivantes :

- la *décomposition par lignes* désigne la décomposition d'une matrice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ en m blocs lignes, c'est-à-dire

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1,:} \\ \mathbf{A}_{2,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n,:} \end{pmatrix},$$

où $\mathbf{A}_{i,:} = (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in})$ désigne la i -ème ligne de \mathbf{A} ;

- la *décomposition par colonnes* désigne la décomposition d'une matrice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ en n blocs colonnes, c'est-à-dire

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right) = (\mathbf{A}_{:,1} \ \mathbf{A}_{:,2} \ \dots \ \mathbf{A}_{:,n}),$$

où $\mathbf{A}_{:,j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ désigne la j -ème colonne de \mathbf{A} .

Pour peu que les dimensions soient compatibles, la décomposition par blocs permet de réaliser les différentes opérations matricielles bloc par bloc, tel que par exemple

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ \mathbf{G} & \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{AE} + \mathbf{BG} & \mathbf{AF} + \mathbf{BH} \\ \mathbf{CE} + \mathbf{DG} & \mathbf{CF} + \mathbf{DH} \end{pmatrix}.$$

C'est ce qu'on nomme les *opérations par blocs*. La proposition suivante garantit que le résultat des opérations par blocs correspond bien au résultat obtenu sans passer par cette décomposition.

Proposition 1.1 (Opérations par blocs)

Le résultat d'opérations effectuées sur des matrices décomposées en blocs peut s'obtenir en appliquant les règles habituelles du calcul matriciel à ces blocs comme s'ils étaient les entrées des matrices (pour autant que les dimensions des blocs soient compatibles).

Démonstration : Les preuves pour l'addition et la multiplication par un scalaire sont triviales, et sont laissées en exercice au lecteur. Il ne reste alors qu'à prouver le résultat pour la multiplication matricielle. Soient deux matrices $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ et $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$, telles que le produit \mathbf{AB} est défini. Considérons les décompositions de \mathbf{A} et \mathbf{B} en blocs correspondant à

$$m = m_1 + \dots + m_r; \quad n = n_1 + \dots + n_s; \quad p = p_1 + \dots + p_t.$$

Dès lors,

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}_{1,1} & \dots & \mathbf{A}_{1,s} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{r,1} & \dots & \mathbf{A}_{r,s} \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{B}_{1,1} & \dots & \mathbf{B}_{1,t} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{B}_{s,1} & \dots & \mathbf{B}_{s,t} \end{array} \right),$$

avec $\mathbf{A}_{i,j} \in K^{m_i \times n_j}$ et $\mathbf{B}_{i,j} \in K^{n_i \times p_j}$. Définissons également la matrice

$$\overline{\mathbf{AB}} = \left(\begin{array}{c|c|c} \sum_{\gamma=1}^s \mathbf{A}_{1,\gamma} \mathbf{B}_{\gamma,1} & \dots & \sum_{\gamma=1}^s \mathbf{A}_{1,\gamma} \mathbf{B}_{\gamma,t} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{\gamma=1}^s \mathbf{A}_{r,\gamma} \mathbf{B}_{\gamma,1} & \dots & \sum_{\gamma=1}^s \mathbf{A}_{r,\gamma} \mathbf{B}_{\gamma,t} \end{array} \right). \quad (1.6)$$

On souhaite prouver que

$$\mathbf{AB} = \overline{\mathbf{AB}}.$$

Or, l'élément (i,j) de \mathbf{AB} est $(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j}$, que l'on peut décomposer en une somme de s termes, en suivant la décomposition $n = n_1 + \dots + n_s$:

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n_1} A_{i,k} B_{k,j} + \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} A_{i,k} B_{k,j} + \dots + \sum_{k=1+n_1+\dots+n_{s-1}}^n A_{i,k} B_{k,j}.$$

Pour $i \in [m_l, m_{l+1}]$ et $j \in [p_{l'}, p_{l'+1}]$, on reconnaît le bloc (l, l') dans Eq. (1.6) ci-dessus.

□

Exemple 1.7. Soient les matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ces matrices peuvent être partitionnées en blocs:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}$$

avec

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{21} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notons qu'il ne s'agit là que d'un exemple de partitionnement en blocs parmi d'autres.

On a

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 18 & 6 & 6 & 6 \\ 18 & 18 & 6 & 6 & 6 \\ 42 & 42 & 12 & 12 & 12 \\ 42 & 42 & 12 & 12 & 12 \\ 42 & 42 & 12 & 12 & 12 \end{pmatrix}.$$

1.1.3 Interpréter le produit matriciel à l'aide des opérations par blocs

La décomposition par blocs, et en particulier les décompositions par lignes et par colonnes, nous permet de revenir plus en détails sur l'interprétation du produit matriciel.

1. **Produit scalaire** : Comme nous l'avons précédemment vu, l'élément (i, j) du produit de deux matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} peut s'écrire comme le "produit" de la i -ème ligne de \mathbf{A} avec la j -ème colonne de \mathbf{B} . Cette approche peut s'écrire à l'aide des décompositions par lignes et colonnes :

$$(\mathbf{AB})_{i,j} = A_{i,:}B_{:,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k}B_{k,j}.$$

Cette interprétation se concentre sur les éléments de la matrice \mathbf{AB} .

2. **Décomposition par colonnes** : De même, on peut se concentrer sur l'interprétation des colonnes de la matrice \mathbf{AB} :

$$\mathbf{AB} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{:,1} & \mathbf{B}_{:,2} & \dots & \mathbf{B}_{:,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{AB}_{:,1} & \mathbf{AB}_{:,2} & \dots & \mathbf{AB}_{:,n} \end{pmatrix}.$$

Chaque colonne de \mathbf{AB} peut alors être vue comme une combinaison linéaire des colonnes de \mathbf{A} .

3. **Décomposition par lignes** : Une interprétation parallèle à la précédente se concentre sur les lignes de la matrice \mathbf{AB} :

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1,:} \\ \mathbf{A}_{2,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{m,:} \end{pmatrix} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1,:}\mathbf{B} \\ \mathbf{A}_{2,:}\mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{m,:}\mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

Chaque ligne de \mathbf{AB} peut alors être vue comme une combinaison linéaire des lignes de \mathbf{B} .

4. **Somme de matrices** : Finalement, une dernière interprétation repose sur la décomposition de \mathbf{AB} en une somme de matrices, exprimée comme :

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{:,1} & \mathbf{A}_{:,2} & \dots & \mathbf{A}_{:,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{1,:} \\ \mathbf{B}_{2,:} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{n,:} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \mathbf{A}_{:,k}\mathbf{B}_{k,:}.$$

Chaque terme de la somme ci-dessus est bien une matrice de dimension $m \times n$ qui constitue la composante du produit \mathbf{AB} issue de la combinaison de la première colonne de \mathbf{A} et de la première ligne de \mathbf{B} . Les éléments (i, j) de ces composantes constituent eux-même les éléments de la somme permettant de générer l'élément (i, j) par le biais du produit scalaire évoqué plus haut.

1.2 Transposition

Définition 1.3 (Transposée d'une matrice)

Soit une matrice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ définie sur un corps commutatif K . On note $\mathbf{A}^\top \in K^{n \times m}$ la *transposée* de \mathbf{A} qui est définie comme

$$(\mathbf{A}^\top)_{i,j} = A_{j,i}. \quad (1.7)$$

Intuitivement, l'opération de transposition d'une matrice consiste à la "renverser" en suivant sa diagonale. Tous les éléments du dessous vont se retrouver au-dessus et vice-versa. Cette opération peut s'appliquer sur des matrices de n'importe quelle dimension (cela inclut donc les vecteurs).

Exemple 1.8.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.2

1. $(\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}$
2. $(k\mathbf{A})^\top = k\mathbf{A}^\top$
3. Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$: $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top$
4. Soit $\mathbf{A} \in K^{m \times n}, \mathbf{B} \in K^{n \times p}$: $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$

Démonstration :

1,2,3. Trivial par la Définition 1.3.

4. Soit $\mathbf{C} = (\mathbf{AB})^\top$ et $\mathbf{D} = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$. Remarquez d'abord que $\mathbf{C}, \mathbf{D} \in K^{p \times m}$. Observons ensuite:

$$C_{i,j} = ((\mathbf{AB})^\top)_{i,j} = (\mathbf{AB})_{j,i} = \sum_{k=1}^n A_{j,k} B_{k,i}$$

et

$$D_{i,j} = (\mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top)_{i,j} = \sum_{k=1}^n (B^\top)_{i,k} (A^\top)_{k,j} = \sum_{k=1}^n B_{k,i} A_{j,k} = \sum_{k=1}^n A_{j,k} B_{k,i} = C_{i,j}.$$

On en conclut que $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{C} = \mathbf{D} = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$.

□

Remarque 1.2. (Transposée de plusieurs produits matriciels) *On peut étendre la proposition de la transposée du produit de deux matrices (Proposition 1.2) à un produit de k matrices. Soit K un corps commutatif et soient les matrices $\mathbf{A}_i \in K^{m_i \times n_i}$ pour $i = 1, \dots, k$ de dimensions compatibles pour le produit matriciel (i.e. $n_i = m_{i+1}$ pour $i = 1, \dots, k-1$), alors*

$$\left(\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{A}_k \right)^\top = \mathbf{A}_k^\top \mathbf{A}_{k-1}^\top \dots \mathbf{A}_1^\top. \quad (1.8)$$

Pour démontrer ce résultat, il suffit d'appliquer de manière itérative le même raisonnement que pour la démonstration de la Proposition 1.2. Cette démonstration est laissée en exercice pour le lecteur.

On peut ajouter aux matrices particulières données en Section 1.1 de nouvelles matrices dont la définition est basée sur la transposition.

Définition 1.4 (Matrice (anti-)symétrique)

Une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est

1. *symétrique* si sa transposée est égale à elle-même, c'est-à-dire que

$$\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}.$$

2. *anti-symétrique* si $\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}$.

Exemple 1.9. Les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

sont des matrices respectivement symétrique et anti-symétrique.

1.3 Inversion

Nous avons vu que la matrice identité est le neutre pour la multiplication (la multiplication par l'identité ne change rien).

Lorsque l'on travaille dans les nombre réels, on sait que pour tout nombre x (sauf zéro), il est possible de trouver un autre nombre réel y , tel que

$$x \cdot y = 1$$

où y est appelé *l'inverse* de x . On peut donc naturellement essayer de traduire ce concept dans le monde des matrices en essayant de trouver une matrice "inverse" telle que le produit d'une matrice par son inverse (en supposant que ce dernier existe) donne la matrice identité.

Comme nous venons de le voir, le produit entre deux matrices ne se comporte pas de la même façon que le produit entre deux nombres naturels. Il n'est en effet *pas commutatif*. On devra donc distinguer l'inverse à gauche et l'inverse à droite d'une matrice.

Définition 1.5 (Inversibilité)

Une matrice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ est dite

- *inversible à gauche* si il existe une matrice $\mathbf{B} \in K^{n \times m}$ telle que $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.
La matrice \mathbf{B} est alors appelée *inverse à gauche* de \mathbf{A} .
- *inversible à droite* si il existe une matrice $\mathbf{B} \in K^{n \times m}$ telle que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_m$.
La matrice \mathbf{B} est alors appelée *inverse à droite* de \mathbf{A} .
- *inversible* si elle est inversible à gauche et à droite.

Exemple 1.10. Soient les matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{I}_3.$$

La matrice \mathbf{B} est donc un inverse à droite de \mathbf{A} mais n'est pas un inverse à gauche de \mathbf{A} .

On peut alors se poser les questions suivantes:

- La matrice \mathbf{B} est elle le seul inverse à droite de \mathbf{A} ?
- Existe-t-il un inverse à gauche pour \mathbf{A} ?

L'exemple suivant montre que de manière générale, l'inverse à gauche ou à droite d'une matrice n'est pas unique.

Exemple 1.11. La matrice ligne $(1 \ 1 \ 1)$ est inversible à droite, en effet on a

$$(1 \ 1 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = 1 = \mathbf{I}_1.$$

Mais on a aussi

$$(1 \ 1 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1 = \mathbf{I}_1.$$

Proposition 1.3 (Unicité de l'inverse)

Si une matrice est inversible à gauche **et** à droite (c'est-à-dire si elle est inversible), alors elle admet un unique inverse à gauche, qui est aussi l'unique inverse à droite.

Démonstration : Soit $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ une matrice inversible à la fois à gauche et à droite. Supposons que $\mathbf{B} \in K^{n \times m}$ est un inverse à gauche et que $\mathbf{C} \in K^{n \times m}$ est un inverse à droite de \mathbf{A} , de sorte que

$$\mathbf{BA} = \mathbf{I}_n \text{ et } \mathbf{AC} = \mathbf{I}_m.$$

Il s'agit de prouver: $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. On considère pour cela le produit \mathbf{BAC} . Par la propriété d'associativité, on a:

$$\begin{aligned} \mathbf{BAC} &= \mathbf{B}(\mathbf{AC}) = \mathbf{BI}_m = \mathbf{B} \\ \mathbf{BAC} &= (\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{I}_n\mathbf{C} = \mathbf{C} \end{aligned}$$

donc $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. De plus, les équations ci-dessus montrent que tout inverse à gauche \mathbf{B}' est égal à \mathbf{C} et tout inverse à droite \mathbf{C}' est égal à \mathbf{B} . Il y a donc un seul inverse à gauche, qui est aussi l'unique inverse à droite. \square

Si une matrice \mathbf{A} est inversible, alors on désigne par \mathbf{A}^{-1} son unique inverse (à gauche et à droite).

On verra plus loin (Corollaire 3.5) que seules les matrices carrées peuvent être inversibles. Par ailleurs, on montrera dans la section suivante (Théorème 1.6) que pour une matrice carrée, l'inversibilité à gauche est équivalente à l'inversibilité à droite (et donc aussi à l'inversibilité de manière générale), et on donnera un procédé explicite pour calculer l'inverse au moyen d'opérations élémentaires sur les lignes.

Proposition 1.4

1. L'inverse de toute matrice carrée inversible est inversible:
si $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ est inversible, alors \mathbf{A}^{-1} est inversible et

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}.$$

2. Le produit de deux matrices carrées inversibles est inversible:
si $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ et $\mathbf{B} \in K^{n \times n}$ sont inversibles, alors le produit \mathbf{AB} est inversible et

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

3. La transposée de toute matrice carrée inversible est inversible:
si $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ est inversible, alors \mathbf{A}^\top est inversible et

$$(\mathbf{A}^\top)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^\top.$$

Démonstration :

1. Par définition de \mathbf{A}^{-1} , on a

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n. \quad (1.9)$$

Ces mêmes relations montrent que \mathbf{A} est l'inverse de \mathbf{A}^{-1} .

2. On a

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}\mathbf{B})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) &= \underbrace{\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1})\mathbf{A}^{-1}}_{\text{par associativité}} = \mathbf{A}\mathbf{I}_n\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n, \\ (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{A}\mathbf{B}) &= \underbrace{\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B}}_{\text{par associativité}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{I}_n\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}_n. \end{aligned}$$

Donc $\mathbf{A}\mathbf{B}$ est bien inversible, d'inverse $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

3. Cette relation s'obtient en transposant les relations Eq. (1.9).

□

1.4 Matrices élémentaires

Le calcul explicite de l'inverse peut s'exprimer à l'aide d'un produit de matrices très simples, appelées *matrices élémentaires*.

Définition 1.6 (*Matrices élémentaires*)

1. Une *matrice élémentaire de type I* est une matrice qui ne diffère de la matrice identité que par une seule entrée située hors de la diagonale principale.

Une telle matrice est donc carrée, et de la forme

$$\mathbf{E}_{i,j}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ i \rightarrow & & \lambda & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\lambda \neq 0$.

2. Une *matrice élémentaire de type II* est une matrice qui ne diffère de la matrice identité que par une permutation de ses lignes.

Une telle matrice est donc carrée, et de la forme

$$\mathbf{P}_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ i \rightarrow & & & 0 & & & 1 \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \\ j \rightarrow & & & 1 & & & 0 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Une *matrice élémentaire de type III* est une matrice qui ne diffère de la matrice identité que par une seule entrée (de valeur non nulle) située sur la diagonale principale.

Une telle matrice est donc carrée, et de la forme

$$\mathbf{M}_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\lambda \neq 0$.

Proposition 1.5

Soit $\mathbf{E}_{i,j}(\lambda), \mathbf{P}_{i,j}, \mathbf{M}_i(\lambda)$ des matrices élémentaires de type I,II,III respectivement.

1. La transposée de toute matrice élémentaire est une matrice élémentaire du même type.

$$\mathbf{E}_{i,j}(\lambda)^\top = \mathbf{E}_{j,i}(\lambda), \quad \mathbf{P}_{i,j}^\top = \mathbf{P}_{i,j}, \quad \mathbf{M}_i(\lambda)^\top = \mathbf{M}_i(\lambda).$$

2. Toute matrice élémentaire est inversible, et son inverse est une matrice élémentaire du même type:

$$\mathbf{E}_{i,j}(\lambda)^{-1} = \mathbf{E}_{i,j}(-\lambda), \quad \mathbf{P}_{i,j}^{-1} = \mathbf{P}_{i,j}, \quad \mathbf{M}_i(\lambda)^{-1} = \mathbf{M}_i\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Démonstration :

1. Trivial d'après la forme des matrices ainsi définies.
2. Considérons d'abord la matrice \mathbf{E} définie ci-dessus (Définition 1.6). Un calcul direct montre que la matrice

$$\mathbf{E}' = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & -\lambda & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

où l'entrée $-\lambda$ occupe la même place que l'entrée λ dans \mathbf{E} , est un inverse à gauche et à droite de \mathbf{E} . On a donc $\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E}'$. Pour les matrices \mathbf{P} et \mathbf{M} , on vérifie de même: $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}$ et

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \lambda^{-1} & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Exemple 1.12. (Matrices élémentaires)

Soient les matrices élémentaires respectivement de type I, type II et type III:

$$\mathbf{E}_{2,1}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_3(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Leurs inverses sont

$$\mathbf{E}_{2,1}(3)^{-1} = \mathbf{E}_{2,1}(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_{1,3}^{-1} = \mathbf{P}_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_3(4)^{-1} = \mathbf{M}_3\left(\frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

On vérifie en effet que $\mathbf{E}_{2,1}(-3)\mathbf{E}_{2,1}(3) = \mathbf{I}_3$, $\mathbf{P}_{1,3}\mathbf{P}_{1,3} = \mathbf{I}_3$, $\mathbf{M}_3\left(\frac{1}{4}\right)\mathbf{M}_3(4) = \mathbf{I}_3$.

1.5 Échelonnement

Définition 1.7 (Opérations élémentaires d'une matrice)

En notant \mathbf{L}_i la i -ème ligne de \mathbf{A} :

1. Une *opération élémentaire de type I* sur les lignes (resp. colonnes) d'une matrice consiste à ajouter un multiple d'une ligne (resp. colonne) à une autre ligne (resp. colonne)

$$\mathbf{L}_i \leftarrow \mathbf{L}_i + \lambda \mathbf{L}_j, \lambda \neq 0.$$

2. Une *opération élémentaire de type II* sur les lignes (resp. colonnes) d'une matrice consiste à permuter deux lignes (resp. colonnes) entre elles

$$\mathbf{L}_i \leftrightarrow \mathbf{L}_j.$$

3. Une *opération élémentaire de type III* sur les lignes (resp. colonnes) d'une matrice consiste à multiplier une ligne (resp. colonne) par un scalaire non nul

$$\mathbf{L}_i \leftarrow \lambda \mathbf{L}_i, \lambda \neq 0.$$

Observez que les matrices élémentaires (Définition 1.6) sont obtenues en appliquant une opération élémentaire (Définition 1.7) du même type sur la matrice identité.

Proposition 1.6

Effectuer une opération élémentaire sur les lignes (resp. colonnes) d'une matrice revient à multiplier cette matrice à gauche (resp. à droite) par une matrice élémentaire du même type. Plus précisément, soit $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ une matrice arbitraire et $\mathbf{A}' \in K^{m \times n}$ la matrice obtenue en effectuant une certaine opération élémentaire sur les lignes de \mathbf{A} . Soit encore $\mathbf{E} \in K^{m \times m}$ la matrice obtenue en effectuant la même opération élémentaire sur les lignes de la matrice identité \mathbf{I}_m . Alors \mathbf{E} est une matrice élémentaire et

$$\mathbf{A}' = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}.$$

Démonstration :

1. On calcule le produit $\mathbf{E}_{ij}(\lambda) \cdot \mathbf{A}$ en décomposant \mathbf{A} par lignes:

$$\mathbf{E}_{ij}(\lambda) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & \lambda & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{j:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{i:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{m:} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{j:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{i:} + \lambda \mathbf{A}_{j:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{m:} \end{pmatrix}.$$

2. La vérification est similaire pour les opérations élémentaires de type II ou III.

□

Exemple 1.13. Reprenons les matrices élémentaires de l'Exemple 1.12 et la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

On a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{2,1}(3) \cdot \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 8 & 10 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}; \\ \mathbf{P}_{1,3} \cdot \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \\ \mathbf{M}_3(4) \cdot \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 20 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On vérifie en effet que multiplier la matrice \mathbf{A} à gauche par la matrice élémentaire revient à effectuer sur les lignes de \mathbf{A} l'opération élémentaire associée. Par exemple, la matrice $\mathbf{E}_{2,1}(3) \cdot \mathbf{A}$ est la matrice \mathbf{A} à laquelle on a ajouté 3 fois la première ligne à la deuxième ligne.

Théorème 1.1 (Matrice à lignes échelonnées)

Toute matrice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ peut être transformée par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes, en une matrice $\mathbf{U} \in K^{m \times n}$ possédant la propriété suivante:

le nombre d'entrées nulles au début de chaque ligne augmente à chaque ligne, l'augmentation étant stricte pour les lignes qui suivent une ligne non nulle.

Une matrice \mathbf{U} possédant la propriété ci-dessus est appelée *matrice à lignes échelonnées*.

On appelle *pivot* la première entrée non nulle d'une ligne de \mathbf{U} .

Démonstration : (Résumé): On procède par induction sur les lignes de la matrice:

1. Si la première colonne est non nulle, on ramène un élément non nul (pivot) en position $(1, 1)$ à l'aide d'une opération élémentaire de type II. Si la première colonne est nulle, on va à l'étape 3;
2. A l'aide d'opérations élémentaires de type I, on peut alors annuler tous les éléments en dessous de l'élément $(1, 1)$;
3. On considère le bloc de dimension $(n - 1)$ obtenu en enlevant la première ligne et colonne, et on retourne à l'étape 1.

□

Exemple 1.14. *Considérons les matrices suivantes*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{6} & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{9} & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice \mathbf{A} est à lignes échelonnées (avec les pivots $a_{12} = 1, a_{24} = 6, a_{35} = 9$) mais la matrice \mathbf{B} n'est pas à ligne échelonnée.

L'algorithme décrit dans la preuve du Théorème 1.1 est constructif: il s'agit de la procédure d'échelonnement d'une matrice.

Exemple 1.15.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice à lignes échelonnées produite par le procédé indiqué dans la démonstration n'est nullement déterminée de manière unique, elle dépend (notamment) du choix des pivots, comme le montre l'exemple suivant (où le pivot choisi est encadré).

Exemple 1.16. *Échelonnons la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

avec différents choix de pivots :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_4 \leftarrow L_4 + L_2}]{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \boxed{2} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_1}]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1}} \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{\frac{3}{2}} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{\frac{3}{2}} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[\substack{L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{3}L_2}]{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{3}L_2} \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{\frac{3}{2}} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On constate que la matrice échelonnée est différente, mais le nombre de pivots (i.e. le nombre de lignes non nulles) est identique dans les deux cas.

Corollaire 1.2 (Forme de Gauss-Jordan)

Toute matrice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ peut être transformée par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes, en une matrice $\mathbf{R} \in K^{m \times n}$ possédant les propriétés suivantes:

- \mathbf{R} est une matrice à ligne échelonnée
- ses entrées situées au dessus des pivots sont nulles
- ses pivots sont égaux à 1.

Une matrice \mathbf{R} possédant les propriétés ci-dessus est appelée *matrice sous forme réduite de Gauss-Jordan* et est de la forme

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots \\ & & & & & & & \dots & & & & & & \dots \end{pmatrix}.$$

Démonstration : (Résumé): Après avoir échelonné les lignes d'une matrice, on peut encore poursuivre les opérations élémentaires pour annuler les entrées situées au-dessus des pivots (en commençant par le pivot le plus à gauche, de sorte que les zéros créés ne sont pas détruits par après). Ensuite, en utilisant les opérations de type III qui consistent à multiplier chaque ligne non nulle par l'inverse de son pivot, on parvient finalement à une matrice à lignes échelonnées dont tous les pivots sont égaux à 1 et toutes les entrées situées au-dessus d'un pivot sont nulles. \square

Alors que la matrice à ligne échelonnée \mathbf{U} de \mathbf{A} n'est pas unique, on peut prouver que la matrice sous forme réduite de Gauss-Jordan \mathbf{R} est unique. Ainsi, le nombre de pivots non nuls est un invariant appelé *rang* de \mathbf{A} . Nous verrons une preuve de cette assertion plus loin dans le cours et l'acceptons pour le moment sans démonstration.

Définition 1.8 (Rang)

On appelle *rang* d'une matrice \mathbf{A} , noté $\text{rang}(\mathbf{A})$, le nombre de pivots (autrement dit le nombre de lignes non nulles) de la matrice réduite de Gauss-Jordan.

Notons que le rang de \mathbf{A} étant défini par rapport à la forme réduite de Gauss-Jordan de \mathbf{A} , qui est unique, appliquer des opérations élémentaires sur \mathbf{A} ne modifie pas son rang.

Corollaire 1.3

Soit $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ une matrice arbitraire et soit $\mathbf{R} \in K^{m \times n}$ la matrice sous forme réduite de Gauss-Jordan obtenue en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de \mathbf{A} (voir Corollaire 1.2). Il existe une suite de matrices élémentaires $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_k$ telles que

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \dots \mathbf{E}_k \mathbf{R}.$$

Démonstration : Vu la Proposition 1.6, chacune des opérations élémentaires revient à la multiplication à gauche par une matrice élémentaire, on peut donc trouver des matrices élémentaires $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_k$ telles que

$$\mathbf{F}_k \dots \mathbf{F}_1 \mathbf{A} = \mathbf{R}. \tag{1.10}$$

D'après la Proposition 1.5, chaque matrice \mathbf{F}_i est inversible, et son inverse est aussi une matrice élémentaire. Notons $\mathbf{E}_i = \mathbf{F}_i^{-1}$. En multipliant les deux membres de Eq. (1.10) ci-dessus successivement par les matrices $\mathbf{F}_k^{-1} = \mathbf{E}_k, \dots, \mathbf{F}_1^{-1} = \mathbf{E}_1$, on obtient

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}_1^{-1} \dots \mathbf{F}_k^{-1} \mathbf{R} = \mathbf{E}_1 \dots \mathbf{E}_k \mathbf{R}.$$

□

1.6 Factorisation LU

La factorisation LU consiste à reformuler une matrice carrée \mathbf{A} comme le produit \mathbf{LU} entre une matrice triangulaire inférieure \mathbf{L} (comme "lower", "inférieure" en anglais) et une matrice triangulaire supérieure \mathbf{U} (comme "upper", "supérieure"). Nous verrons toutefois dans le Théorème 1.4 qu'il existe des matrices $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ qui n'admettent pas de telle factorisation. Afin de prouver ce théorème nous donnons d'abord le résultat préliminaire suivant.

Proposition 1.7

Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ deux matrices triangulaires inférieures, alors

1. \mathbf{A} est une matrice triangulaire inférieure si et seulement si \mathbf{A}^\top est triangulaire supérieure ;
2. $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ est une matrice triangulaire inférieure ;
3. \mathbf{AB} est triangulaire inférieure.

Démonstration : Les points 1. et 2. sont triviaux. Pour le point 3., on observe que pour $i < j$, on a $(\mathbf{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} = 0$ car $A_{ik} = 0$ pour $i < k$ et $B_{kj} = 0$ pour $k < j$. □

Théorème 1.4 (Factorisation LU)

Si la matrice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ peut être réduite sous forme de Gauss-Jordan sans opération de type II (permutation de ligne), alors on peut factoriser la matrice \mathbf{A} sous la forme

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U},$$

avec $\mathbf{L} \in K^{n \times n}$ une matrice triangulaire inférieure formée de 1 sur la diagonale et $\mathbf{U} \in K^{n \times n}$ une matrice triangulaire supérieure.

Démonstration : On suppose que $a_{11} \neq 0$. La première étape de la réduction de \mathbf{A} à la forme à ligne échelonnée consiste à remplacer la seconde ligne par la deuxième moins la première ligne après qu'elle ait été multipliée par le facteur $\frac{a_{21}}{a_{11}}$. On obtient alors la matrice

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13} & \dots & a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Cette opération élémentaire est équivalente à

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{E}_{2,1}\mathbf{A}$$

avec

$$\mathbf{E}_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

L'opération suivante de l'échelonnement de \mathbf{A} consiste à remplacer la troisième ligne par la troisième ligne moins la première ligne multipliée par le facteur $\frac{a_{31}}{a_{11}}$. Ceci revient à prémultiplier \mathbf{A}_1 par la matrice triangulaire inférieure

$$\mathbf{E}_{3,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

pour obtenir $\mathbf{A}_2 = \mathbf{E}_{3,1}\mathbf{A}_1$. On continue de cette manière jusqu'à avoir que des 0 dans la première colonne excepté au premier élément

$$\mathbf{A}_{n-1} = \mathbf{E}_{n,1} \dots \mathbf{E}_{3,1}\mathbf{E}_{2,1}\mathbf{A}.$$

La prochaine séquence d'opérations élémentaires à pour but d'annuler les entrées de la seconde colonne située sous la diagonale, où on fait l'hypothèse que $(\mathbf{A}_{n-1})_{22} \neq 0$.

On continue le processus jusqu'à obtenir une matrice triangulaire supérieure \mathbf{U}

$$\mathbf{E}_{n,n-1} \dots \mathbf{E}_{3,2}\mathbf{E}_{n,1} \dots \mathbf{E}_{3,1}\mathbf{E}_{2,1}\mathbf{A} = \mathbf{U}.$$

Durant le processus, on n'utilise que des opérations élémentaires de type I dont la matrice associée est \mathbf{E}_{ij} avec $i > j$. Par conséquent, la matrice \mathbf{E}_{ij} est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale (comme le montre l'Eq. (1.11)). De plus les matrices élémentaires de type I sont inversibles avec $\mathbf{E}_{ij}(\lambda)^{-1} = \mathbf{E}_{ij}(-\lambda)$

(Proposition 1.5). Par conséquent, les inverses de ces matrices élémentaires sont également des matrices triangulaires inférieures avec des 1 sur la diagonale.

Par la Proposition 1.7, un produit de matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure. Dès lors

$$\mathbf{L} = \mathbf{E}_{2,1}^{-1} \mathbf{E}_{3,1}^{-1} \cdots \mathbf{E}_{n,1}^{-1} \mathbf{E}_{3,2}^{-1} \cdots \mathbf{E}_{n,n-1}^{-1}$$

est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. Finalement on obtient la relation

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$$

qui conclut la preuve. □

En étudiant la démonstration constructive du Théorème précédent, on constate que la factorisation LU peut être vue comme la forme matricielle de l'élimination de Gauss-Jordan de la section précédente. La matrice \mathbf{U} est la matrice à lignes échelonnées de \mathbf{A} et la matrice \mathbf{L} s'obtient en accumulant les opérations élémentaires opérées sur les lignes lors de l'échelonnement (en changeant le signe de leur coefficient et leur ordre) dans la matrice identité.

Exemple 1.17. Soit la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir la factorisation $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$, on effectue d'abord des opérations élémentaires de type I sur les lignes de la matrice \mathbf{A} pour obtenir une forme échelonnée:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 8L_2} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -47 \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir la matrice \mathbf{L} , il suffit d'appliquer à la matrice identité \mathbf{I}_n les mêmes opérations élémentaire en **changeant** le signe de leur coefficient **et** leur ordre:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 8L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -8 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -47 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas général où des permutations de lignes sont requises afin de réaliser l'échelonnement de la matrice, il suffit d'inclure une matrice de permutation dans la factorisation, comme décrit dans le théorème suivant.

Théorème 1.5 (Factorisation PLU)

Toute matrice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ peut être factorisée sous la forme

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{L}\mathbf{U},$$

avec $\mathbf{L} \in K^{n \times n}$ une matrice triangulaire inférieure formée de 1 sur la diagonale, $\mathbf{U} \in K^{n \times n}$ une matrice triangulaire supérieure et $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ une matrice de permutation (i.e. \mathbf{P} est une matrice résultant de l'application d'opération élémentaire de type II sur la matrice identité).

Démonstration : La preuve est omise dans le cadre de ce cours. □

1.7 Inversibilité d'une matrice carrée

Dans cette section, on considère le cas particulier des matrices carrées. Soit $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ et soit $\mathbf{R} \in K^{n \times n}$ une matrice sous forme réduite de Gauss-Jordan obtenue en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de \mathbf{A} . Comme \mathbf{R} est carrée, on a l'alternative:

- soit le nombre de pivots de \mathbf{R} est n , et alors $\mathbf{R} = \mathbf{I}_n$;
- soit le nombre de pivots de \mathbf{R} est strictement inférieur à n , ce qui implique donc qu'au moins la dernière ligne de \mathbf{R} est nulle.

Le théorème suivant permet de caractériser l'inversibilité des matrices carrées.

— Théorème 1.6 —

Soit $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ une matrice carrée arbitraire. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- (a) \mathbf{A} est inversible;
- (b) \mathbf{A} est inversible à gauche;
- (c) \mathbf{A} est inversible à droite;
- (d) Toute matrice \mathbf{R} sous forme réduite de Gauss-Jordan obtenue en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de \mathbf{A} est la matrice identité \mathbf{I}_n ;
- (e) \mathbf{A} est un produit de matrices élémentaires;
- (f) $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$.

Démonstration : Il suffit de démontrer les implications selon le schéma suivant :

$$(a) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e) \Rightarrow (a)$$

pour prouver l'équivalence des conditions (a), (c), (d), (e). On montrera ensuite

$$(a) \Leftrightarrow (b) \quad \text{et} \quad (d) \Leftrightarrow (f).$$

(a) \Rightarrow (c): Trivial par définition de matrice inversible.

(c) \Rightarrow (d): Grâce à la propriété (c), on sait qu'il existe une matrice $\mathbf{C} \in K^{n \times n}$ telle que $\mathbf{AC} = \mathbf{I}_n$. Supposons maintenant par contradiction que la condition (d) ne soit pas satisfaite. Il existe donc une matrice \mathbf{R} obtenue en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de \mathbf{A} avec un nombre de pivots strictement inférieur à n et donc avec au moins la dernière ligne qui ne contient que des zéros. On a donc:

$$\mathbf{E}_k \dots \mathbf{E}_1 \mathbf{A} = \mathbf{R}$$

où $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_k$ sont des matrices élémentaires que l'on peut réécrire sous la forme

$$\mathbf{F}_1 \dots \mathbf{F}_k \mathbf{R} = \mathbf{A}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{F}_i = \mathbf{E}_i^{-1}.$$

Ce qui nous permet de réécrire $\mathbf{AC} = \mathbf{I}_n$ comme

$$\mathbf{F}_1 \dots \mathbf{F}_k \mathbf{RC} = \mathbf{I}_n. \tag{1.12}$$

Cependant, puisqu'au moins la dernière ligne de \mathbf{R} ne contient que des zéros, le résultat du produit dans la partie gauche de l'équation (1.12) doit nécessairement aussi avoir au moins sa dernière ligne qui est nulle. Il est donc impossible d'obtenir \mathbf{I}_n de cette façon, ce qui est une contradiction, et donc (d) est vraie.

(d) \Rightarrow (e): Résulte du Corollaire 1.3.

- (e) \Rightarrow (a): Soit $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \dots \mathbf{E}_k$, où $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_k$ sont des matrices élémentaires. D'après la Proposition 1.5, toute matrice élémentaire est inversible. Comme tout produit de matrices inversibles est inversible (voir la Proposition 1.4), on en déduit que \mathbf{A} est inversible (et que $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_k^{-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{E}_1^{-1}$).
- (a) \Rightarrow (b): Résulte directement de la définition de matrice inversible.
- (b) \Rightarrow (a): Soit \mathbf{B} un inverse à gauche de \mathbf{A} . En transposant la relation $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$, on a $\mathbf{A}^\top \mathbf{B}^\top = \mathbf{I}_n^\top = \mathbf{I}_n$ et on voit que \mathbf{B}^\top est un inverse à droite de \mathbf{A}^\top . Vu la partie de l'énoncé déjà démontrée, on sait que toute matrice carrée inversible à droite est inversible, dès lors \mathbf{A}^\top est inversible et \mathbf{A} l'est aussi, d'après la Proposition 1.4.
- (d) \Leftrightarrow (f): Résulte directement de la définition du rang.

□

Une matrice carrée satisfaisant les conditions équivalentes ci-dessus est qualifiée de *inversible* ou de *régulière*. Une matrice carrée ne satisfaisant pas les conditions équivalentes ci-dessus est qualifiée de *non-inversible* ou de *singulière*. Toutefois, dans ce cours, on utilisera exclusivement les termes *inversible/non-inversible*.

Corollaire 1.7

Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$.

Si \mathbf{A} est non-inversible, alors \mathbf{AB} et \mathbf{BA} sont non-inversibles.

Démonstration :

1. Si \mathbf{A} est non-inversible, cela implique qu'il existe des matrices élémentaires $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_k$ telles que $\mathbf{E}_k \dots \mathbf{E}_1 \mathbf{A} = \mathbf{R}$, où \mathbf{R} est sous forme de Gauss-Jordan, avec une dernière ligne nulle. En multipliant à droite par la matrice \mathbf{B} , il vient: $\mathbf{E}_k \dots \mathbf{E}_1 \mathbf{AB} = \mathbf{RB} = \mathbf{V}$, avec la dernière ligne de \mathbf{V} nulle. Comme le rang est invariant sous transformation élémentaire, on a

$$\text{rang}(\mathbf{AB}) = \text{rang}(\mathbf{E}_k \dots \mathbf{E}_1 \mathbf{AB}) = \text{rang}(\mathbf{RB}) = \text{rang}(\mathbf{V}) < n.$$

Dès lors, par Théorème 1.6, la matrice \mathbf{AB} est non-inversible.

2. Un argument similaire permet de montrer que \mathbf{BA} est également non-inversible si \mathbf{A} est non-inversible.

□

Application de l'échelonnement au calcul de l'inverse

La relation entre l'inversibilité de \mathbf{A} et la forme de \mathbf{R} établie dans Théorème 1.6 suggère une manière pratique de déterminer l'inverse de \mathbf{A} (si elle existe): on forme une matrice $n \times 2n$ en juxtaposant \mathbf{A} et la matrice identité \mathbf{I}_n :

$$(\mathbf{A} | \mathbf{I}_n),$$

puis on effectue sur les lignes de cette matrice les mêmes opérations élémentaires que pour réduire \mathbf{A} à la forme de Gauss-Jordan.

Comme chaque opération élémentaire sur les lignes est équivalente à la multiplication à gauche par une matrice élémentaire, on peut écrire

$$\mathbf{F}_k \dots \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_1 \mathbf{A} = \mathbf{R}$$

où \mathbf{R} est la forme de Gauss-Jordan de \mathbf{A} . En appliquant les mêmes opérations élémentaires sur les lignes de la matrice $(\mathbf{A} | \mathbf{I}_n)$, on a

$$\mathbf{F}_k \dots \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_1 (\mathbf{A} | \mathbf{I}_n) = (\mathbf{F}_k \dots \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_1 \mathbf{A} | \mathbf{F}_k \dots \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_1 \mathbf{I}_n) = (\mathbf{R} | \mathbf{B})$$

avec $\mathbf{B} = \mathbf{F}_k \dots \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_1$ et on a la relation

$$\mathbf{BA} = \mathbf{R}.$$

On peut alors analyser les deux cas:

- Si $\mathbf{R} \neq \mathbf{I}_n$, alors le Théorème 1.6 montre que \mathbf{A} n'est pas inversible.
- Si $\mathbf{R} = \mathbf{I}_n$, alors \mathbf{B} est un inverse à gauche de \mathbf{A} . Par le Théorème 1.6 et la Proposition 1.3, on sait donc que \mathbf{A} est aussi l'inverse à droite de \mathbf{A} et que \mathbf{A} est inversible, donc $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Exemple 1.18. Par exemple calculons l'inverse de la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

On forme la matrice $(\mathbf{A}|\mathbf{I}_3)$ et on applique la procédure décrite ci-dessus:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{5}{8}L_3}]{L_2 \leftarrow L_2 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & -\frac{7}{8} & -\frac{5}{8} & \frac{5}{8} \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow -\frac{1}{8}L_3}]{\substack{L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{array} \right). \end{aligned}$$

L'inverse de \mathbf{A} est donc la matrice

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

En appliquant la méthodologie décrite ci-dessus à des matrices particulières, on peut démontrer les propriétés d'inversibilité suivantes:

1. Si $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ est diagonale, \mathbf{A} est inversible si et seulement si aucun élément diagonal n'est nul et on a

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}.$$

2. Si \mathbf{A} est triangulaire supérieure (ou inférieure), \mathbf{A} est inversible si et seulement si aucun élément diagonal n'est nul.
3. Si \mathbf{A} est diagonalement dominante, alors \mathbf{A} est inversible. Une matrice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ est diagonalement dominante si

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

1.8 Déterminant

À chaque matrice carrée \mathbf{A} sur un corps K , on peut associer un élément de K , appelé déterminant de \mathbf{A} et noté $\det(\mathbf{A})$. Comme nous le verrons tout au long de ce cours, le déterminant contient une quantité importante d'information sur la matrice. Il y a plusieurs façons de définir le déterminant d'une matrice carrée. Dans ce texte, nous procéderons comme suit:

1. définir le déterminant par ses propriétés caractéristiques;
2. montrer l'unicité de la fonction satisfaisant ces propriétés (en supposant qu'il en existe une);
3. montrer l'existence d'une telle fonction;
4. établir une formule explicite pour le déterminant d'une matrice.

Définition 1.9 (Déterminant)

Le *déterminant* est une fonction

$$\det: K^{n \times n} \rightarrow K$$

qui satisfait trois conditions

1. La fonction déterminant est *multilinéaire*, c'est-à-dire linéaire par rapport à chaque ligne:
 $\forall i = 1, \dots, n$ et $\forall \alpha, \beta \in K$ et $\forall \mathbf{A}_{1:}, \dots, \mathbf{A}_{n:}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K^n$:

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{i-1:} \\ \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \\ \mathbf{A}_{i+1:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n:} \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{i-1:} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{A}_{i+1:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n:} \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{i-1:} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{A}_{i+1:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n:} \end{pmatrix}.$$

2. La fonction déterminant est *alternée*, c'est-à-dire que si dans \mathbf{A} il y a deux lignes égales, alors $\det(\mathbf{A}) = 0$.
 Si $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_j$ pour certains indices $i \neq j$, alors $\det(\mathbf{A}) = 0$.
3. La fonction déterminant est telle que $\det(\mathbf{I}_n) = 1$ (où \mathbf{I}_n est la matrice identité d'ordre n).

La proposition suivante décrit comment le déterminant d'une matrice change après l'application d'une opération élémentaire.

Proposition 1.8

Supposons qu'il existe une application $\det: K^{n \times n} \rightarrow K$ possédant les propriétés de la Définition 1.9 ci-dessus.

1. Si \mathbf{A}' est obtenue de \mathbf{A} en ajoutant à une ligne un multiple d'une autre ligne, alors

$$\det(\mathbf{A}') = \det(\mathbf{A}).$$

2. Si \mathbf{A}' est obtenue de \mathbf{A} en permutant deux lignes, alors

$$\det(\mathbf{A}') = -\det(\mathbf{A}).$$

3. Si \mathbf{A}' est obtenue de \mathbf{A} en multipliant une ligne par un coefficient $\lambda \in K$, alors

$$\det(\mathbf{A}') = \lambda \det(\mathbf{A}).$$

Démonstration :

1. En utilisant la linéarité de \det suivant la i -ème ligne, on trouve

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{i,:} + \lambda \mathbf{A}_{j,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{j,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n,:} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{i,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{j,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n,:} \end{pmatrix} + \lambda \det \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{j,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{j,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n,:} \end{pmatrix}.$$

Par la propriété 2 de la Définition 1.9 on sait que le deuxième terme de la partie de droite est nul vu que la ligne $\mathbf{A}_{j,:}$ apparaît deux fois, on a donc bien $\det(\mathbf{A}') = \det(\mathbf{A})$.

2. Considérons la matrice suivante:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{i,:} + \mathbf{A}_{j,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{i,:} + \mathbf{A}_{j,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n,:} \end{pmatrix}.$$

Comme \det est une fonction alternée des lignes (propriété 2 de la Définition 1.9), la matrice dont les i -ème et la j -ème lignes sont égales à $\mathbf{A}_{i,:} + \mathbf{A}_{j,:}$ annule \det , et donc $\det(\mathbf{B}) = 0$.

On peut cependant aussi utiliser la linéarité de \det suivant la i -ème et la j -ème ligne pour développer \mathbf{B} :

$$\det(\mathbf{B}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{i,:} + \mathbf{A}_{j,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{i,:} + \mathbf{A}_{j,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n,:} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{i,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{i,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n,:} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{i,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{j,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n,:} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{j,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{i,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n,:} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{j,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{j,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n,:} \end{pmatrix}.$$

Dans le membre de droite, les deux termes extrêmes sont nuls puisque tous deux possèdent deux lignes égales et que \det est une fonction alternée (propriété 2 de la Définition 1.9). En faisant disparaître les termes nuls, il reste:

$$0 = \det \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{i,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{j,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n,:} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{j,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{i,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n,:} \end{pmatrix},$$

ce qui établit la propriété.

3. Cette propriété résulte directement de la linéarité de \det suivant la i -ème ligne.

□

Corollaire 1.8

Supposons qu'il existe une application $\det : K^{n \times n} \rightarrow K$ possédant les propriétés de la Définition 1.9. Le déterminant d'une matrice élémentaire peut être aisément calculé:

1. Si \mathbf{E} est une matrice élémentaire de type I, alors

$$\det(\mathbf{E}) = 1.$$

2. Si \mathbf{P} est une matrice élémentaire de type II, alors

$$\det(\mathbf{P}) = -1.$$

3. Si \mathbf{M} est une matrice élémentaire de type III, de facteur λ , alors

$$\det(\mathbf{M}) = \lambda.$$

Démonstration : Les matrices élémentaires peuvent être obtenues en effectuant les opérations élémentaires correspondantes sur les lignes de la matrice identité. Comme $\det(\mathbf{I}_n) = 1$ par la condition 3 de Définition 1.9, les formules ci-dessus se déduisent de la Proposition 1.8 précédente. □

Théorème 1.9 (Unicité de la fonction déterminant)

Si il existe une fonction $\det : K^{n \times n} \rightarrow K$ qui satisfait aux conditions de la Définition 1.9, alors elle est unique.

Démonstration : On doit prouver que si $\delta, \delta' : K^{n \times n} \rightarrow K$ sont deux applications satisfaisant les conditions de la Définition 1.9, alors $\delta = \delta'$. Soit $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ et soit $\mathbf{R} \in K^{n \times n}$, une matrice sous forme réduite de Gauss-Jordan obtenue par des opérations élémentaires sur les lignes de \mathbf{A} . Supposons avoir fait, pour passer de \mathbf{A} à \mathbf{R} , un nombre r d'opérations élémentaires de type II et un nombre s d'opérations élémentaires de type III, de facteurs $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ (et un certain nombre d'opérations élémentaires de type I). D'après le Corollaire 1.8, on a alors

$$\delta(\mathbf{R}) = (-1)^r \lambda_1 \dots \lambda_s \delta(\mathbf{A}) \text{ et } \delta'(\mathbf{R}) = (-1)^r \lambda_1 \dots \lambda_s \delta'(\mathbf{A}). \quad (1.13)$$

Or, la matrice \mathbf{R} est une matrice carrée sous forme réduite de Gauss-Jordan. Comme observé précédemment (Section 1.7), on a alors l'alternative

1. soit $\mathbf{R} = \mathbf{I}_n$
2. soit la dernière ligne de \mathbf{R} est nulle.

Dans le premier cas, on a $\delta(\mathbf{R}) = 1 = \delta'(\mathbf{R})$ d'après la Définition 1.9.3, d'où, vu Eq. (1.13):

$$\delta(\mathbf{A}) = (-1)^r (\lambda_1 \dots \lambda_s)^{-1} = \delta'(\mathbf{A}).$$

Dans le second cas, on a $\delta(\mathbf{R}) = 0 = \delta'(\mathbf{R})$ d'après Proposition 1.8.3 avec $\lambda = 0$. L'Eq. (1.13) donne alors

$$\delta(\mathbf{A}) = 0 = \delta'(\mathbf{A}).$$

□

La théorème précédent montre que les conditions de la Définition 1.9 suffisent à caractériser de manière unique le déterminant. Cependant, à ce stade, il n'est pas clair que le déterminant existe, c'est-à-dire qu'il y a bien une fonction satisfaisant ces 3 conditions pour toute matrice carrée.

Théorème 1.10 (Existence de la fonction déterminant)

Il existe une fonction $\det : K^{n \times n} \rightarrow K$ qui satisfait aux conditions de la Définition 1.9.

Démonstration : Preuve par induction sur n . On suppose que le déterminant des matrices d'ordre $n - 1$ est défini (satisfait les 3 conditions de la Définition 1.9) et on l'utilise pour définir le déterminant des matrices d'ordre n .

— *Cas de base:* ($n = 1$)

La fonction

$$\det(a) = a \quad \forall a \in K$$

satisfait les 3 conditions de Définition 1.9 (trivial).

— *Hypothèse inductive:*

Fixons un entier $n \geq 2$ et supposons l'existence de la fonction déterminant des matrices d'ordre $n - 1$.

— *Étape inductive:*

Soit $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ une matrice carrée d'ordre n . Pour $i, j = 1, \dots, n$, on note \mathbf{A}_{ij} la matrice d'ordre $n - 1$ obtenue en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne de \mathbf{A} . On fixe une valeur arbitraire de $j \in \{1, \dots, n\}$ et on définit le déterminant de \mathbf{A} comme

$$\delta_j(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{ij}). \quad (1.14)$$

Remarquons que les matrices \mathbf{A}_{ij} sont des matrices carrées d'ordre $n - 1$, et donc qu'elles ont un déterminant par hypothèse inductive. Il faut démontrer que la formule du déterminant donnée en Eq. (1.14) satisfait les 3 conditions de la Définition 1.9.

(Condition 1) Montrons que δ_j est linéaire suivant la k -ème ligne de \mathbf{A} . Considérons pour cela tous les termes

$$(-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{ij}).$$

— Si $k \neq i$, alors a_{ij} ne dépend pas de la k -ème ligne de \mathbf{A} , et $\det(\mathbf{A}_{ij})$ est linéaire suivant cette ligne.

— Si $k = i$, alors a_{ij} dépend linéairement de la k -ème ligne et $\det(\mathbf{A}_{ij})$ n'en dépend pas.

Dans tous les cas le produit $(-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{ij})$ dépend linéairement de la k -ème ligne de \mathbf{A} ; il en est donc de même de δ_j .

(Condition 2) On procède en 3 étapes.

— Démontrons d'abord que $\delta_j(\mathbf{A}) = 0$ si \mathbf{A} a deux lignes consécutives identiques, soit $\mathbf{A}_{k,:} = \mathbf{A}_{k+1,:}$. Les matrices \mathbf{A}_{ij} contiennent alors deux lignes identiques pour $i \neq k, k + 1$, donc les termes de la somme (Eq. (1.14)) d'indices $i \neq k, k + 1$ sont nuls. Il reste

$$\delta_j(\mathbf{A}) = (-1)^{k+j} a_{kj} \det(\mathbf{A}_{kj}) + (-1)^{k+1+j} a_{k+1,j} \det(\mathbf{A}_{k+1,j}).$$

Comme la k -ème et la $(k + 1)$ -ème lignes de \mathbf{A} sont identiques, on a $a_{kj} = a_{k+1,j}$ et $\mathbf{A}_{kj} = \mathbf{A}_{k+1,j}$, donc les deux termes du second membre s'annulent et $\delta_j(\mathbf{A}) = 0$.

— Le même raisonnement que dans la Proposition 1.8 montre alors que δ_j change de signe quand on permute deux lignes consécutives de \mathbf{A} .

— Supposons enfin que \mathbf{A} contienne deux lignes identiques: $\mathbf{A}_{k,:} = \mathbf{A}_{l,:}$ pour certains indices $k \neq l$. Par des échanges de lignes consécutives, on peut amener les lignes identiques à être consécutives. Or, des échanges de lignes consécutives ne changent au plus que le signe de $\delta_j(\mathbf{A})$, donc $\delta_j(\mathbf{A}) = 0$.

(Condition 3) Comme toutes les entrées de la j -ème colonne de \mathbf{I}_n sont nulles sauf la j -ème qui est égale à 1, seul le terme d'indice j de la somme $\delta_j(\mathbf{A})$ subsiste:

$$\delta_j(\mathbf{I}_n) = (-1)^{j+j} 1 \det(\mathbf{I}_{n-1}) = 1.$$

□

Notons que la preuve du Théorème 1.10 est constructive dans le sens où elle nous fournit la formule du déterminant d'une matrice d'ordre n . Il s'agit de *l'expansion de Laplace*.

Corollaire 1.11 (*Formule récursive du déterminant (Expansion de Laplace)*)

Soit une matrice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$

- $n = 1$: $\det(\mathbf{A}) = a$;
- $n \geq 2$: pour $j = 1, \dots, n$

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{ij}) \quad (1.15)$$

où \mathbf{A}_{ij} est la sous-matrice obtenue en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne de \mathbf{A} .

Démonstration : Pour $j = 1, \dots, n$, les fonctions $\delta_j : K^{n \times n} \rightarrow K$ définies par Eq. (1.14) satisfont les conditions de la Définition 1.9. De plus, comme le déterminant est unique (Théorème 1.9), ces fonctions sont donc toutes égales et définissent le déterminant des matrices d'ordre n . \square

Exemple 1.19. *A partir de la formule récursive Eq. (1.15) du déterminant, on peut obtenir une expression plus simple pour des cas particuliers*

- $n = 2$:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- $n = 3$:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned}$$

Cette formule est aussi connue sous le nom de formule de Sarrus.

Exemple 1.20. ($n = 4$) *Pour calculer le déterminant de la matrice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

on applique la formule d'expansion de Laplace sur la ligne/colonne ayant le plus d'entrées nulles, à savoir la troisième colonne. On a

$$\det(\mathbf{A}) = 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 18 + 3 \cdot 1 \cdot 2 = -30.$$

Proposition 1.9 (*Quelques propriétés du déterminant*)

Soit $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$.

1. Si \mathbf{A} possède une ligne de 0, le déterminant de \mathbf{A} est nul
2. Si \mathbf{A} possède deux lignes identiques le déterminant de \mathbf{A} est nul.
3. $\det(k\mathbf{A}) = k^n \det(\mathbf{A})$
4. Si \mathbf{A} est triangulaire, $\det(\mathbf{A})$ est égal au produit des éléments diagonaux

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}.$$

Démonstration :

1. Trivial par la formule du Corollaire 1.11.
2. En utilisant la Proposition 1.8.1, on peut soustraire l'une des deux lignes identiques à l'autre sans changer le déterminant. On se retrouve donc avec une ligne de zéros, ce qui, par la propriété précédente, implique que le déterminant est nul.
3. En utilisant la Proposition 1.8.3, on se retrouve dans le cas où les lignes sont multipliées par un coefficient k . Comme il y a n lignes, le déterminant est multiplié par k^n .
4. Ceci est facile à montrer par induction en utilisant la formule Corollaire 1.11 avec $j = 1$.

□

Parfois, appliquer directement la formule de Laplace sur une matrice peut être fastidieux. Dès lors, il peut être utile d'appliquer au préalable des opérations élémentaires sur la matrice qui ne modifient que très peu le déterminant (Proposition 1.8) afin de simplifier sa forme comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple 1.21. Soit la matrice $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, la matrice identité (avec des 1 sur la diagonale et des zéros partout ailleurs), et la matrice $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que $M_{ij} = 1, \forall i, j$ (la matrice dont toutes les entrées sont égales à 1). On souhaite calculer le déterminant de la matrice $\mathbf{A} := \mathbf{I} - \mathbf{M}$ qui a la forme suivante

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

i.e. la matrice dont les éléments diagonaux sont égaux à 0 et les autres à -1 .

Pour rappel, l'opération sur les lignes ne change pas le déterminant (Proposition 1.8.1). En ajoutant toutes les lignes à la dernière on trouve

$$\det(\mathbf{A}) = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(n-1) & -(n-1) & \dots & -(n-1) \end{pmatrix}.$$

On peut également sortir un coefficient sur une ligne entière (Proposition 1.8.2)

$$\det(\mathbf{A}) = (1-n) \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

En ajoutant la dernière ligne à toutes les autres (Proposition 1.8.1), on a

$$\det(\mathbf{A}) = (1-n) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de droite est triangulaire inférieure, son déterminant est donc simplement le produit de ses éléments diagonaux (Proposition 1.9.4) et donc

$$\det(\mathbf{A}) = 1 - n.$$

Proposition 1.10

Pour $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$,

1. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ si et seulement si \mathbf{A} est inversible.
2. $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$.
3. $\det(\mathbf{A}^\top) = \det(\mathbf{A})$.

Démonstration :

1. Découle des remarques faites dans la preuve du Théorème 1.9 sur la manière de calculer le déterminant. En effet, on montre que

$$\det(\mathbf{A}) \neq 0 \Leftrightarrow \det(\mathbf{R}) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{A} \text{ est inversible}$$

où \mathbf{R} est la matrice sous forme réduite de Gauss-Jordan de \mathbf{A} . Les conditions équivalentes du Théorème 1.6 sont équivalentes à $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

2. On distingue 2 cas.

— Si \mathbf{A} est non-inversible, alors le Corollaire 1.7 montre que \mathbf{AB} est non-inversible. Dans ce cas, on a donc

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{AB}) = 0,$$

et la relation $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$ est satisfaite.

— Si \mathbf{A} est inversible, alors la matrice réduite de Gauss-Jordan \mathbf{R} obtenue par des opérations élémentaires sur les lignes de \mathbf{A} est alors \mathbf{I}_n . Soient $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_k$ les matrices élémentaires correspondantes, parmi lesquelles on compte r matrices élémentaires de type II et s matrices élémentaires de type III, de facteurs $\lambda_1, \dots, \lambda_s$

$$\mathbf{E}_k \dots \mathbf{E}_1 \mathbf{A} = \mathbf{R} = \mathbf{I}_n.$$

Donc

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_1^{-1} \dots \mathbf{E}_k^{-1}$$

et

$$\mathbf{AB} = \mathbf{E}_1^{-1} \dots \mathbf{E}_k^{-1} \mathbf{B}.$$

Comme l'inverse d'une matrice élémentaire est une matrice élémentaire de même type (mais de facteur inverse, en ce qui concerne le type III), l'égalité précédente montre que la matrice \mathbf{AB} est obtenue en effectuant les opérations élémentaires qui correspondent à $\mathbf{E}_1^{-1} \dots \mathbf{E}_k^{-1}$ sur les lignes de \mathbf{B} . Parmi ces opérations élémentaires, on compte r opérations de type II et s opérations de type III, de facteurs $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_s^{-1}$ (et un certain nombre d'opérations élémentaires de type I). Comme l'effet d'une opération élémentaire sur le déterminant a été déterminé dans la Proposition 1.8, on en déduit

$$\det(\mathbf{AB}) = (-1)^r \lambda_1^{-1} \dots \lambda_s^{-1} \det(\mathbf{B}).$$

Or, les observations précédentes sur le calcul de $\det(\mathbf{A})$ donnent

$$\det(\mathbf{A}) = (-1)^r \lambda_1^{-1} \dots \lambda_s^{-1}.$$

La relation $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$ est donc démontrée.

3. On distingue 2 cas.

— Si \mathbf{A} est non-inversible, alors \mathbf{A}^\top est non-inversible (Proposition 1.4). Dans ce cas on a

$$\det(\mathbf{A}) = 0 = \det(\mathbf{A}^\top).$$

— Si \mathbf{A} est inversible, alors \mathbf{A} est un produit de matrices élémentaires (Théorème 1.6)

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}_1 \dots \mathbf{F}_k, \quad (1.16)$$

où $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_k$ sont des matrices élémentaires. En transposant les deux membres de cette égalité, on trouve

$$\mathbf{A}^\top = \mathbf{F}_k^\top \dots \mathbf{F}_1^\top. \quad (1.17)$$

Or, la transposée d'une matrice élémentaire est une matrice élémentaire de même type (et de même facteur, en ce qui concerne le type III). D'après le Corollaire 1.8, on a donc

$$\det(\mathbf{F}_i) = \det(\mathbf{F}_i^\top) \text{ pour } i = 1, \dots, k. \quad (1.18)$$

Dès lors, en prenant le déterminant des deux membres des égalités Eq. (1.16) et Eq. (1.17), et en appliquant la propriété de multiplicativité du déterminant (c'est-à-dire la deuxième partie de l'énoncé) démontrée ci-dessus, on trouve

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{F}_1) \dots \det(\mathbf{F}_k) \text{ et } \det(\mathbf{A}^\top) = \det(\mathbf{F}_k^\top) \dots \det(\mathbf{F}_1^\top).$$

Combiné avec Eq. (1.18), on a bien

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^\top).$$

□

Comme le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de sa transposée, toute propriété du déterminant établie pour les lignes des matrices vaut également pour les colonnes, en particulier, les 3 propriétés de la définition du déterminant (Définition 1.9) sont également vraies pour les colonnes.

Corollaire 1.12

Pour $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ avec \mathbf{A} inversible,

1. $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$.
2. $\det(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{B})$.

Démonstration :

1. En utilisant la multiplicativité du déterminant (Proposition 1.10), on a

$$\det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{I}_n) = 1,$$

et donc

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}.$$

2. En utilisant la multiplicativité du déterminant (Proposition 1.10), on a

$$\det(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) \det(\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{B}).$$

En effet, comme les déterminants sont des éléments de K , leur produit est commutatif, donc on peut simplifier le premier facteur du second membre avec le dernier.

□

Le déterminant, et plus particulièrement la formule de Laplace, nous permettent d'obtenir une formule pour l'inverse d'une matrice. Pour ce faire, on introduit la définition suivante:

Définition 1.10 (Cofacteur)

On appelle *cofacteur d'indices i, j* de la matrice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, l'expression

$$(-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ij})$$

où \mathbf{A}_{ij} est la sous-matrice obtenue en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne de \mathbf{A} .

On appelle *matrice des cofacteurs* de \mathbf{A} la matrice définie comme

$$\text{cof}(\mathbf{A}) = ((-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Corollaire 1.13

Pour toute matrice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$,

$$\mathbf{A} \cdot \text{cof}(\mathbf{A})^\top = \text{cof}(\mathbf{A})^\top \cdot \mathbf{A} = \det(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{I}_n.$$

Démonstration : L'élément d'indices i, j de la matrice $\mathbf{A} \cdot \text{cof}(\mathbf{A})^\top$ est

$$(\mathbf{A} \cdot \text{cof}(\mathbf{A})^\top)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{j+k} \det(\mathbf{A}_{jk}). \quad (1.19)$$

Le membre de droite de Eq. (1.19) est le déterminant de la matrice \mathbf{A}' obtenue en remplaçant la ligne j par la ligne i de \mathbf{A} .

— Si $i \neq j$, la matrice \mathbf{A}' a deux lignes identiques et par conséquent son déterminant est nul, on a donc $(\mathbf{A} \cdot \text{cof}(\mathbf{A})^\top)_{ij} = \det(\mathbf{A}') = 0$.

— Si $i = j$, $(\mathbf{A} \cdot \text{cof}(\mathbf{A})^\top)_{ij} = \det(\mathbf{A}') = \det(\mathbf{A})$ d'après le développement du déterminant de \mathbf{A} suivant la i -ème ligne.

Dès lors, le produit $\mathbf{A} \cdot (\text{cof}(\mathbf{A}))^\top$ est une matrice diagonale, tous les éléments diagonaux étant égaux à $\det(\mathbf{A})$. \square

D'après ce Corollaire 1.13, l'inverse de toute matrice carrée inversible est donné par

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \text{cof}(\mathbf{A})^\top.$$

Exemple 1.22. Reprenons la même matrice que l'Exemple 1.18. Soit la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

On calcule

$$\det(\mathbf{A}) = 32 \text{ et } \text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -4 & -16 & 12 \\ 20 & 0 & 4 \\ -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, on a

$$\text{cof}(\mathbf{A})_{1,2} = (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = -16.$$

L'inverse de \mathbf{A} est donc

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \text{cof}(\mathbf{A})^\top = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} -4 & 20 & -4 \\ -16 & 0 & 8 \\ 12 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Après avoir donné la définition du déterminant (Définition 1.9), nous avons obtenu une formule pour le calculer (Corollaire 1.11). Il s'agit d'une formule *réursive*, dans le sens où le déterminant d'une matrice d'ordre n est obtenu en calculant le déterminant de matrices d'ordre $n - 1$. On peut également obtenir une formule *explicite* pour le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n , c'est-à-dire, une formule qui dépend directement et uniquement des entrées de la matrice.

Théorème 1.14 (Formule explicite du déterminant)

Soit une matrice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, on a

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\mathbf{i}} (-1)^{\ell(\mathbf{i})} a_{1i_1} \dots a_{ni_n} \quad (1.20)$$

où

- $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n)$ parcourt l'ensemble des permutations de $(1, \dots, n)$;
- $\ell(\mathbf{i})$ est la *parité* de la permutation \mathbf{i} définie comme le nombre de permutations de deux éléments de \mathbf{i} nécessaires pour ramener \mathbf{i} à l'ordre standard $(1, \dots, n)$.

Les n -uplets $a_{1i_1}, a_{2i_2}, \dots, a_{ni_n}$ où $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n)$ est une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ sont appelés les *quasi-diagonales* de \mathbf{A} . Par conséquent, nous pouvons voir qu'une quasi-diagonale est toujours constituée de n éléments de la matrice \mathbf{A} de telle sorte que deux d'entre eux ne se trouvent pas dans la même ligne ou colonne de \mathbf{A} .

Démonstration : Pour démontrer ce résultat, on va utiliser systématiquement la propriété de linéarité du déterminant suivant chaque ligne. Soit $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ une matrice carrée d'ordre n que l'on décompose par lignes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n:} \end{pmatrix}.$$

Soient les vecteurs lignes \mathbf{e}_i de dimensions n définis comme

$$\mathbf{e}_i = (0 \ \dots \ 0 \ \underset{\uparrow}{1} \ 0 \ \dots \ 0) \text{ pour } i = 1, \dots, n.$$

Dès lors, on peut décomposer la première ligne de \mathbf{A} comme une somme pondérée de ces vecteurs $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$:

$$\mathbf{A}_{1:} = (a_{11} \ \dots \ a_{1n}) = a_{11}\mathbf{e}_1 + \dots + a_{1n}\mathbf{e}_n.$$

Comme le déterminant est linéaire suivant la première ligne, on en déduit:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= a_{11} \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{A}_{2:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n:} \end{pmatrix} + a_{12} \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{A}_{2:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n:} \end{pmatrix} + \dots + a_{1n} \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_n \\ \mathbf{A}_{2:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n:} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i_1=1}^n a_{1i_1} \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{i_1} \\ \mathbf{A}_{2:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n:} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Décomposons ensuite la deuxième ligne:

$$\mathbf{A}_{2:} = (a_{21} \ \dots \ a_{2n}) = a_{21}\mathbf{e}_1 + \dots + a_{2n}\mathbf{e}_n.$$

Comme le déterminant est linéaire suivant la deuxième ligne, on obtient:

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{i_1} \\ \mathbf{A}_{2:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n:} \end{pmatrix} = \sum_{i_2=1}^n a_{2i_2} \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{i_1} \\ \mathbf{e}_{i_2} \\ \mathbf{A}_{3:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n:} \end{pmatrix},$$

d'où

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i_1, i_2=1}^n a_{1, i_1} a_{2, i_2} \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{i_1} \\ \mathbf{e}_{i_2} \\ \mathbf{A}_{3:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n:} \end{pmatrix}.$$

En décomposant de même chaque ligne de \mathbf{A} , on obtient:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n a_{1, i_1} \dots a_{n, i_n} \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{i_1} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{i_n} \end{pmatrix}.$$

Si deux des indices i_1, \dots, i_n prennent la même valeur, alors la suite $\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_n}$ contient deux fois le même vecteur, donc

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{i_1} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{i_n} \end{pmatrix} = 0.$$

Si tous les indices i_1, \dots, i_n prennent des valeurs différentes, alors la suite $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n)$ est une permutation de $(1, \dots, n)$. Par un certain nombre $\ell(\mathbf{i})$ d'opérations de type II (échanges de deux vecteurs), les vecteurs de la suite $(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_n})$ peuvent être rangés dans l'ordre naturel $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. D'après la Proposition 1.8, on a alors

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{i_1} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{i_n} \end{pmatrix} = (-1)^{\ell(\mathbf{i})} \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix}$$

et comme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_n,$$

on en déduit:

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{i_1} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{i_n} \end{pmatrix} = (-1)^{\ell(\mathbf{i})}.$$

On obtient le résultat final

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\mathbf{i}} (-1)^{\ell(\mathbf{i})} a_{1i_1} \dots a_{ni_n}$$

où la somme parcourt l'ensemble des permutations $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n)$ de $(1, \dots, n)$. □

Remarquons que le nombre de termes de la somme de la formule explicite du déterminant Eq. (1.20) est le nombre de permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$, soit $n!$ termes.

Exemple 1.23. *A partir de la formule explicite Eq. (1.20) du déterminant, on peut obtenir une expression plus simple pour les cas particuliers*

— $n = 2$: *on a $\ell(1, 2) = 0$ et $\ell(2, 1) = 1$ car il suffit d'échanger 1 et 2 pour revenir à l'ordre naturel. Dès lors,*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

— $n = 3$: *on a $\ell(1, 2, 3) = 0$, $\ell(1, 3, 2) = \ell(2, 1, 3) = \ell(3, 2, 1) = 1$ et $\ell(2, 3, 1) = 2$ car pour passer de $(2, 3, 1)$ à $(1, 2, 3)$ il suffit de deux échanges: par exemple, on échange d'abord 1 et 2, puis 2 et 3. De même, $\ell(3, 1, 2) = 2$. Donc*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

On obtient bien les même formules que dans l'Exemple 1.18.

Chapitre 2

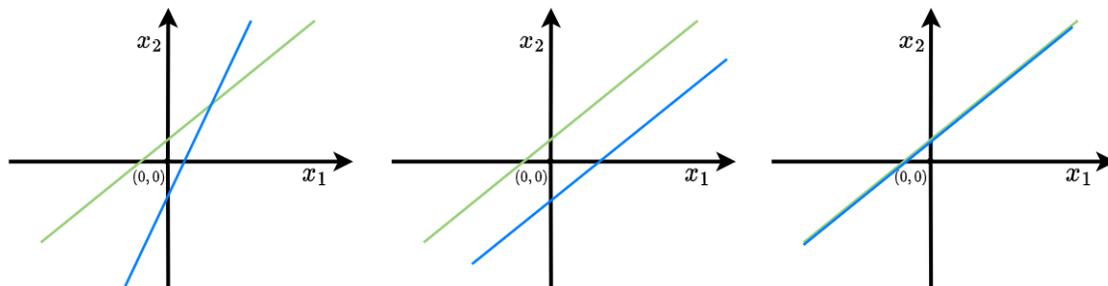
Systemes linéaires

Soit un système de m équations en n inconnues x_1, \dots, x_n de la forme:

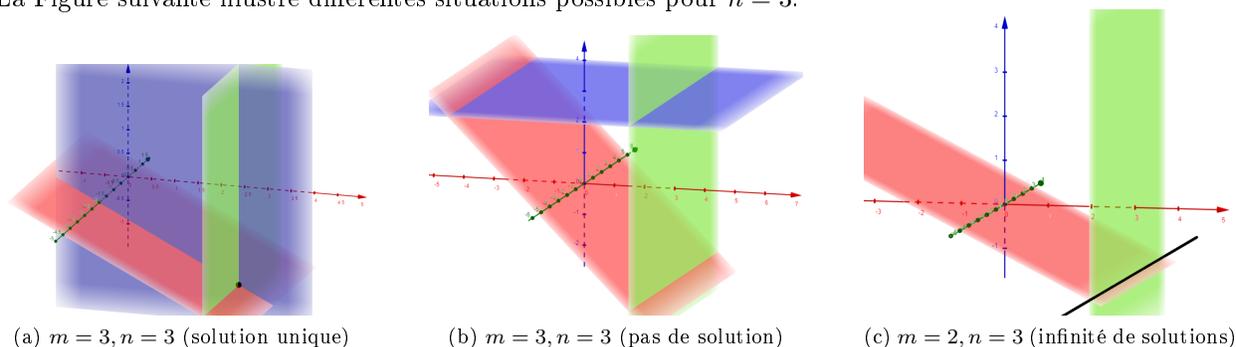
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

où les coefficients a_{ij} pour $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$, et les termes indépendants b_i pour $i = 1, \dots, m$ sont des nombres réels ou complexes, ou plus généralement des éléments d'un corps (commutatif) arbitraire K . Résoudre ce système consiste à trouver dans K des valeurs des inconnues x_1, \dots, x_n pour lesquelles ces équations sont satisfaites.

On peut donc donner une interprétation graphique, les solutions sont les points de \mathbb{R}^n dans l'intersection des m droites déterminées par les m équations du système. Le cas particulier $m = n = 2$ est représenté sur la figure ci-dessous. Comme on le voit, trois situations sont possibles: soit le système admet une unique solution (les droites se rencontrent graphiquement en un seul point), aucune solution (les droites ne se rencontrent jamais, elles sont parallèles) ou une infinité de solutions (les droites sont confondues).



La Figure suivante illustre différentes situations possibles pour $n = 3$.



A travers ce chapitre, on va chercher à répondre aux questions suivantes pour tout m et n

1. (*existence*) Sous quelles conditions existe-t-il des solutions ?
2. (*unicité*) Sous quelles conditions existe-t-il une solution unique ?
3. (*résolution*) Comment déterminer l'ensemble des solutions ?

2.1 Opérations élémentaires

Les techniques que l'on utilise pour résoudre les systèmes d'équations algébriques linéaires se fondent sur trois types d'opérations sur les équations d'un système qui ont la propriété de ne pas changer l'ensemble des solutions du système.

Définition 2.1 (Opérations élémentaires d'un système d'équations)

1. Opération élémentaire de type I

Dans un système d'équations, on peut remplacer une des équations par la somme de celle-ci et d'un multiple d'une autre équation du système sans modifier l'ensemble des solutions. Les systèmes

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n = b_j \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ (a_{i1} + \lambda a_{j1})x_1 + \dots + (a_{in} + \lambda a_{jn})x_n = b_i + \lambda b_j \\ \vdots \\ a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n = b_j \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

admettent les mêmes solutions.

2. Opération élémentaire de type II

Dans un système d'équations, on peut échanger deux équations sans modifier l'ensemble des solutions. Les systèmes

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n = b_j \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n = b_j \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

admettent les mêmes solutions.

3. Opération élémentaire de type III

Dans un système d'équations, on peut multiplier les deux membres d'une équation par un élément non nul du corps K sans modifier l'ensemble des solutions. Les systèmes

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ \lambda a_{i1}x_1 + \dots + \lambda a_{in}x_n = \lambda b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

admettent les mêmes solutions si $\lambda \neq 0$.

2.2 Représentation matricielle

Pour faire apprécier la portée des opérations élémentaires dans la résolution d'un système d'équations algébriques linéaires, il est commode d'adopter la notation suivante: à un système arbitraire de m équations à n inconnues:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2.1)$$

on associe

— une matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$$

que l'on appelle *matrice des coefficients* du système.

— un vecteur

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m$$

que l'on appelle *vecteur des termes indépendants* du système.

— un vecteur

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$$

que l'on appelle *vecteur des inconnues (des variables)* du système.

On peut alors reformuler le problème consistant à trouver les solutions du système Eq. (2.1) comme le problème qui consiste à trouver les vecteurs $\mathbf{x} \in K^n$ tel que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

On considère également la *matrice complète* du système obtenue en adjoignant à la matrice des coefficients du système la colonne des termes indépendants

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in K^{m \times (n+1)}.$$

Comme les équations du système correspondent aux lignes de la matrice complète, les opérations élémentaires pour un système d'équations (Définition 2.1) correspondent à des opérations élémentaires telles que définie dans la Définition 1.7 sur les lignes de la matrice complète, à savoir:

1. ajouter à une ligne le multiple d'une autre ligne;
2. permuter deux lignes;
3. multiplier une ligne par une constante non nulle.

Grâce à cette représentation matricielle du système d'équations, on va pouvoir utiliser de nombreuses propriétés dérivées dans le chapitre précédent sur les matrices pour répondre aux 3 questions posées dans l'introduction de ce chapitre.

2. Si $r < m$ et $c_{r+1} = \dots = c_m = 0$, alors le système peut se réécrire sous la forme

$$\begin{cases} x_1 = -(R_{1,r+1}x_{r+1} + R_{1,r+2}x_{r+2} + \dots + R_{1n}x_n) + c_1 \\ x_2 = -(R_{2,r+1}x_{r+1} + R_{2,r+2}x_{r+2} + \dots + R_{2n}x_n) + c_2 \\ \vdots \\ x_r = -(R_{r,r+1}x_{r+1} + R_{r,r+2}x_{r+2} + \dots + R_{rn}x_n) + c_r. \end{cases} \quad (2.2)$$

Les variables x_1, \dots, x_r correspondant aux colonnes contenant un pivot sont appelées *variables pivots*, alors que les autres variables x_{r+1}, \dots, x_n sont appelées *variables libres*.

En effet, le système Eq. (2.2) donne les valeurs des variables x_1, \dots, x_r en fonction des autres qui peuvent être choisies librement. Ainsi, dans ce cas, le système admet une *infinité* de solutions caractérisées par l'ensemble suivant

$$V = \left\{ \left(c_1 - \sum_{j=r+1}^n R_{1j}x_j, c_2 - \sum_{j=r+1}^n R_{2j}x_j, \dots, c_r - \sum_{j=r+1}^n R_{rj}x_j, x_{r+1}, \dots, x_n \right)^\top \mid x_{r+1}, \dots, x_n \in K \right\}. \quad (2.3)$$

3. Si $r = n \leq m$ et $c_{r+1} = \dots = c_m = 0$, alors le système se réécrit sous la forme

$$\mathbf{R} = r \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

et admet une solution *unique*: $\mathbf{x} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^\top$.

Systèmes homogènes Un système d'équations linéaires est dit *homogène* si les seconds membres b_1, \dots, b_m sont tous nuls. Un tel système est donc de la forme:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Ce système admet toujours une *solution triviale* $x_1 = \dots = x_n = 0$. Pour déterminer s'il en existe d'autres, on procède comme pour les autres systèmes d'équations linéaires généraux. La condition d'unicité de la solution devient

- Si $r = n$: la solution est unique (et est la solution triviale);
- Si $r < n$, il y a des solutions non triviales, qui s'obtiennent en donnant aux variables libres des valeurs arbitraires (non toutes nulles) et aux variables pivots les valeurs données par le système.

On peut également dériver une condition nécessaire et suffisante pour caractériser l'existence et l'unicité des solutions d'un système d'équations linéaires basée sur le rang de la matrice complète et de la matrice des coefficients du système.

Théorème 2.1 (Théorème de Rouché)

Soit $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ et $\mathbf{b} \in K^m$. Le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ admet une solution si et seulement si

$$\text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \text{rang}(\mathbf{A}).$$

En supposant cette condition satisfaite, la solution du système est unique si et seulement si $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$.

Démonstration : Soit $(\mathbf{R}|\mathbf{c})$ la matrice sous forme réduite de Gauss-Jordan obtenue par des opérations élémentaires sur les lignes de $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$. On a vu que la condition nécessaire et suffisante pour que le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ admette une solution est que la matrice $(\mathbf{R}|\mathbf{c})$ ne contienne pas de pivot dans la dernière colonne. Cela revient à dire que le nombre de lignes non nulles de $(\mathbf{R}|\mathbf{c})$ doit être le même que celui de \mathbf{R} . Comme les matrices \mathbf{R} et $(\mathbf{R}|\mathbf{c})$ sont à lignes échelonnées, le nombre de lignes non nulles de ces matrices est leur rang. Par ailleurs, on a

$$\text{rang}(\mathbf{R}|\mathbf{c}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \quad \text{et} \quad \text{rang}(\mathbf{R}) = \text{rang}(\mathbf{A})$$

puisque les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice ne modifient pas son rang. Dès lors, la condition nécessaire et suffisante pour que le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ admette une solution est:

$$\text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \text{rang}(\mathbf{A}).$$

De plus d'après les observations ci-dessus, la solution du système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ existe et est unique si et seulement si la matrice $\text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \text{rang}(\mathbf{A}) = n$. \square

Théorème 2.2 (*Extension du Théorème 1.6*)

Soit $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, une matrice carrée. Les conditions suivantes sont équivalentes aux conditions du Théorème 1.6:

- (g) Le système homogène $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ n'admet que la solution triviale;
- (h) Pour tous $\mathbf{b} \in K^m$, le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ admet une et une seule solution.

Démonstration : Pour prouver l'équivalence, on prouve que

$$(a) \Rightarrow (h) \Rightarrow (g) \Rightarrow (f).$$

(a) \Rightarrow (h): Si \mathbf{A} est inversible, le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ admet $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ pour unique solution.

(h) \Rightarrow (g): C'est clair, puisque (g) est un cas particulier de (h) (vu que tout système homogène admet au moins la solution triviale).

(g) \Rightarrow (f): Voir Théorème 2.1. \square

Le Théorème suivant résume les différents cas de figure caractérisant l'existence et l'unicité des solutions d'un système linéaire de m équations à n inconnues.

Théorème 2.3

Soit le système linéaire $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ avec $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ une matrice de rang r et $\mathbf{b} \in K^m$. Si

- $r = m = n$: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ possède une solution unique ;
- $r = m < n$: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ possède une infinité de solutions ;
- $r = n < m$: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ possède aucune **ou** une unique solution ;
- $r < m, r < n$: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ possède aucune **ou** une infinité de solutions.

Remarque 2.1. Les assertions du Théorème 2.3 ne dépendent que de la matrice \mathbf{A} et pas du vecteur de termes indépendants \mathbf{b} . Ainsi, la connaissance de \mathbf{A} permet soit de totalement caractériser l'existence et l'unicité des solutions (quel que soit \mathbf{b}) ou au moins de restreindre le champ des possibilités. Pour trancher parmi les différents cas de figure restant (**ou**), il est alors nécessaire de disposer explicitement de \mathbf{b} (et d'appliquer le Théorème 2.1).

Exemple 2.1. Soit le système de 3 équations à 4 inconnues:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 = b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 6x_4 = b_2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = b_3 \end{cases}$$

avec les paramètres $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$.

On peut réécrire ce système sous forme matricielle: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Pour résoudre le système, on échelonne la matrice complète $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ sous forme de Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 4 & b_1 \\ 2 & 5 & 7 & 6 & b_2 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & b_3 \end{array} \right) & \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 4 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & b_3 - b_1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 4 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - 2b_1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & -4 & 5b_1 - 4b_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - 2b_1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & \frac{5}{2}b_1 - 2b_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - 2b_1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Le système admet au moins une solution si et seulement si $b_3 + b_2 - 2b_1 = 0$. En effet, si $b_3 + b_2 - 2b_1 \neq 0$, on a $\text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3 \neq 2 = \text{rang}(\mathbf{A})$.

Pour la suite, on considère

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

la matrice complète associée s'écrit:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Le système admet au moins une solution comme $\text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2 = \text{rang}(\mathbf{A})$. Les variables pivots sont x_1, x_2 et les variables libres sont x_3, x_4 . Le système admet une infinité de solutions caractérisées par l'ensemble

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 4 - x_3 + 2x_4 \\ -1 - x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \forall x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Chapitre 3

Espaces Vectoriels

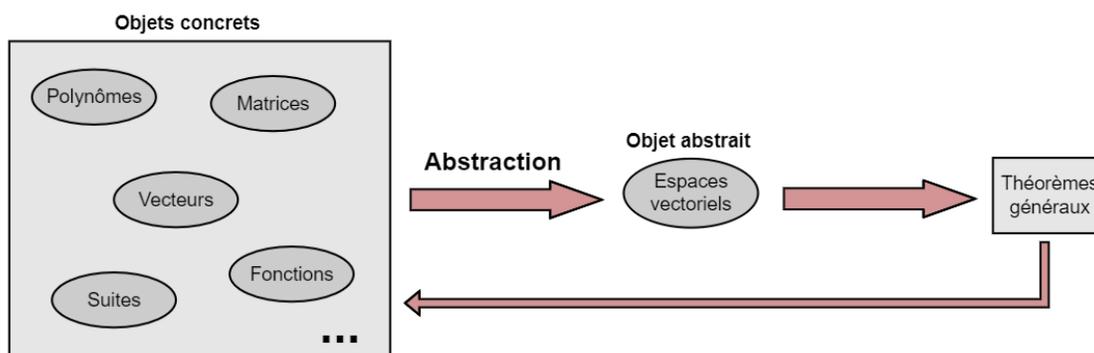
Nous atteignons ici un troisième stade dans l'abstraction mathématique.

- Le premier stade remonte à l'Antiquité, il concerne l'introduction des *nombres*, qui permettent de compter des objets et de mesurer des grandeurs. Additionner trois pommes ou trois pierres donnent le même résultat, indépendamment de la nature concrète de ces objets.
- Le second stade remonte à la Renaissance, on introduit des *symboles* (des lettres), qui désignent des nombres quelconques. En effet, au lieu de résoudre chacune de ces équations du second degré séparément $x^2 - 2x - 15 = 0$ et $x^2 - 6x - 7 = 0$, on peut les étudier simultanément en résolvant une unique fois l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ où on a *abstrait* les coefficients au moyen de lettre $a, b, c \in \mathbb{R}$. Soit $\rho = b^2 - 4ac$, on peut alors démontrer que l'équation admet une solution unique si $\rho = 0$ donnée par $x = -b/(2a)$, deux solutions distinctes si $\rho > 0$ données par $x_1 = (-b - \sqrt{\rho})/(2a)$ et $x_2 = (-b + \sqrt{\rho})/(2a)$, et aucune solution réelle si $\rho < 0$.
- Le troisième stade commence au dix-neuvième siècle avec l'apparition des *structures algébriques*, qui permettent l'étude simultanée d'objets mathématiques de nature différentes mais partageant des propriétés communes.

De manière générale, le processus d'*abstraction* consiste à définir un objet *abstrait* à partir d'objets *concrets* de nature différentes qui partagent des *propriétés communes*.

Un exemple typique et fort important est la structure d'*espace vectoriel*. Les entités dont il est question dans ce contexte sont appelées des *vecteurs*. En pratique, selon le cas, un vecteur peut être un n -uplet de nombres, une suite infinie de nombres, une matrice, un polynôme, une fonction, ou d'autres choses encore. La motivation de l'introduction de la notion abstraite d'espace vectoriel découle de la volonté d'extraire les propriétés communes à plusieurs objets mathématiques. Par exemple, on peut additionner deux vecteurs du plan et aussi multiplier un vecteur par un réel. Mais on peut aussi additionner deux fonctions, ou multiplier une fonction par un réel. Même chose avec les polynômes, les matrices,...

L'utilisation d'une structure commune (les espaces vectoriels) permet d'éviter d'étudier les objets séparément. On peut alors produire une théorie sur les espaces vectoriels qui fonctionnera sur toutes ces structures mathématiques en même temps.



Nous commencerons par la définition d'un espace vectoriel, qui est un ensemble de vecteurs qui peuvent être combinés linéairement à l'aide des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire. Nous explorerons ensuite les sous-espaces vectoriels, qui sont des ensembles de vecteurs qui sont eux-mêmes des espaces vectoriels. Nous étudierons également les bases d'un espace vectoriel, qui sont des ensembles de vecteurs linéairement indépendants qui peuvent être utilisés pour représenter tous les vecteurs de l'espace. Nous verrons comment construire des bases pour les espaces vectoriels, ainsi que comment déterminer la dimension d'un espace vectoriel à partir de sa base.

3.1 La notion d'espace vectoriel

— **Définition 3.1** (*Espace vectoriel*) —

Un **espace vectoriel** sur un *corps commutatif* K , est un ensemble E muni de deux opérations qui satisfont les 10 conditions listées ci-dessous. Les éléments de E sont communément appelés *vecteurs*¹. Les éléments de K sont appelés des *scalaires*.

- La première opération appelée **addition vectorielle** $+$: $E \times E \rightarrow E$ prend deux vecteurs $x, y \in E$ et leur associe un troisième vecteur qui est communément écrit $x + y$ et appelé la somme de ces deux vecteurs.
- La deuxième opération appelée **multiplication scalaire** \cdot : $K \times E \rightarrow E$ prend un *scalaire* $\alpha \in K$ et un vecteur $x \in E$ pour donner un nouveau vecteur que l'on note $\alpha \cdot x$. Toutefois pour la suite, on utilisera le plus souvent la notation raccourcie αx plutôt que $\alpha \cdot x$.

Afin de mériter le titre d'*espace vectoriel* sur un corps commutatif K , l'ensemble E et les opérations $(+)$ et (\cdot) doivent satisfaire les 10 règles suivantes. Les 8 premières conditions concernent les opérations d'addition vectorielle et de multiplication scalaire.

Soit $x, y, z \in E$, et $c, c_1, c_2 \in K$:

- (1) $x + y = y + x$, commutativité de l'addition vectorielle.
- (2) $x + (y + z) = (x + y) + z$, associativité de l'addition vectorielle.
- (3) $\exists 0 \in E : \forall x \in E, x + 0 = x$, existence d'un neutre additif.
- (4) $\forall x \in E, \exists y \in E : y + x = 0$, existence d'un inverse additif pour un vecteur donné.
- (5) $\forall x \in E, \exists 1 \in K : 1 \cdot x = x$, existence d'un neutre multiplicatif.
- (6) $(c_1 c_2) \cdot x = c_1 \cdot (c_2 \cdot x)$, associativité de la multiplication scalaire.
- (7) $c \cdot (x + y) = c \cdot x + c \cdot y$, distributivité de la multiplication scalaire par rapport à l'addition vectorielle.
- (8) $(c_1 + c_2) \cdot x = c_1 \cdot x + c_2 \cdot x$, distributivité de la multiplication scalaire par rapport à l'addition sur le corps commutatif K .

En plus des 8 conditions précédentes, un espace vectoriel E doit également remplir les 2 conditions suivantes qui garantissent la stabilité de E sous les opérations $(+)$ et (\cdot) :

- (9) $\forall x, y \in E : x + y \in E$.
- (10) $\forall \alpha \in K, \forall x \in E : \alpha \cdot x \in E$.

Notons que les conditions (9) et (10) peuvent être combinées en une seule condition équivalente qui garanti la stabilité sous combinaison linéaire

$$\forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in E : \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in E. \tag{3.1}$$

Les scalaires sont le plus souvent des nombres réels ($K = \mathbb{R}$) ou, plus généralement, des nombres complexes ($K = \mathbb{C}$). On parle alors d'espace vectoriel réel ou complexe, respectivement. Lorsque que le corps n'est pas défini explicitement, on suppose qu'il s'agit du corps des réels \mathbb{R} .

1. Les vecteurs dans ces espaces ne sont pas nécessairement des vecteurs colonnes au sens des matrices comme défini dans les chapitres précédents.

Voici quelques propriétés élémentaires sur les espaces vectoriels.

Proposition 3.1

Soit E un espace vectoriel.

1. Un espace vectoriel est non vide.
2. Le vecteur nul est unique.
Si $x + 0 = x$ et $x + 0' = x$ alors $0 = 0'$.
3. Si $c \in K$ alors $c \cdot 0 = 0$.
4. Si $x \in E$, alors $0 \cdot x = 0$.
5. L'inverse additif d'un vecteur est unique.
Si $x + x' = 0$ et $x + x'' = 0$ alors $x' = x''$.
6. L'inverse additif d'un vecteur $x \in E$ est $-1 \cdot x$ où -1 est l'inverse additif (dans K) du neutre multiplicatif.

Démonstration :

1. Par définition il contient un élément neutre additif: 0 .
2. Supposons que $0 \in E$ et $0' \in E$ soient deux vecteurs nuls de E .
On a donc $\forall x \in E : x + 0 = x$ et $x + 0' = x$.
Par conséquent,

$$\begin{aligned} 0' &= 0' + 0, && (0 \text{ est un vecteur nul}) \\ &= 0 + 0', && (\text{commutativité de l'addition vectoriel}) \\ &= 0. && (0' \text{ est un vecteur nul}) \end{aligned}$$

3. $\forall c \in K$:

$$\begin{aligned} c \cdot 0 &= c \cdot (0 + 0), && (0 \text{ est le vecteur nul}) \\ &= c \cdot 0 + c \cdot 0. && (\text{distributivité}) \end{aligned}$$

On a aussi $c \cdot 0 = c \cdot 0 + 0$. En combinant les deux on a

$$c \cdot 0 + c \cdot 0 = c \cdot 0 + 0$$

et donc $c \cdot 0 = 0$.

4. Soit $x \in E$ et x' un inverse additif de x :

$$\begin{aligned} 0 \cdot x &= 0 \cdot x + 0, && (0 \text{ est le vecteur nul}) \\ &= 0 \cdot x + (x + x'), && (\text{inverse additif}) \\ &= (0 \cdot x + x) + x', && (\text{associativité de l'addition vectorielle}) \\ &= (0 \cdot x + 1 \cdot x) + x', && (\text{neutre multiplicatif}) \\ &= (0 + 1) \cdot x + x', && (\text{distributivité de la multiplication scalaire}) \\ &= 1 \cdot x + x', && (\text{élément neutre de l'addition scalaire}) \\ &= x + x', && (\text{neutre multiplicatif}) \\ &= 0. && (\text{inverse additif}) \end{aligned}$$

5. Soit $x \in E$. Supposons que $x + x' = 0$ et $x + x'' = 0$ pour $x, x'' \in E$.
Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 x'' &= x'' + 0, && (0 \text{ est le vecteur nul}) \\
 &= x'' + (x + x'), && (x' \text{ est un inverse additif}) \\
 &= (x'' + x) + x', && (\text{associativité de l'addition vectorielle}) \\
 &= (x + x'') + x', && (\text{commutativité de l'addition vectorielle}) \\
 &= 0 + x', && (x'' \text{ est un inverse additif}) \\
 &= x' + 0, && (\text{commutativité de l'addition vectorielle}) \\
 &= x'. && (0 \text{ est le vecteur nul}).
 \end{aligned}$$

6. Soit $x \in E$:

$$\begin{aligned}
 x + (-1 \cdot x) &= 1 \cdot x + (-1 \cdot x), && (\text{existence d'un neutre multiplicatif}) \\
 &= (1 + (-1)) \cdot x, && (\text{distributivité de la multiplication scalaire}) \\
 &= 0 \cdot x, && (\text{inverse additif scalaire}) \\
 &= 0. && (\text{voir point 4.})
 \end{aligned}$$

□

Remarque 3.1. *Insistons sur la présence d'un vecteur nul, noté 0. Il est caractérisé par la propriété $x+0 = x$ pour tout $x \in E$. On a démontré dans la Proposition 3.1 que*

$$0 \cdot x = 0.$$

Dans cette dernière écriture, il ne faut pas confondre les "zéro" qui sont de nature différente. Le symbole "0" qui figure à gauche est le scalaire nul (un élément de K), celui qui figure à droite "0" est le vecteur nul (un élément de E).

Remarque 3.2. *Par la Proposition 3.1, on a que l'inverse additif d'un vecteur $x \in E$ est unique et donné par $-1 \cdot x$. C'est pourquoi par abus de langage pour la suite du cours, on note l'inverse additif $-x$.*

— **Définition 3.2 (Combinaison linéaire)** —

Soient v_1, \dots, v_n un nombre fini de vecteurs d'un espace vectoriel E . Une *combinaison linéaire* (ou combili) de v_1, \dots, v_n est un vecteur $x \in E$ qui admet une décomposition comme somme de multiples de v_1, \dots, v_n :

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

pour certains coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$.

Exemple 3.1. (Exemples d'espaces vectoriels)

1. Pour tout corps K , l'ensemble $E = K^n$ des n -uples d'éléments de K muni des opérations d'addition vectorielle et de multiplication scalaire définies pour $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ et $c \in K$ par

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \mathbf{z}, \text{ avec } z_i = x_i + y_i \quad \forall i = 1, \dots, n; \\
 c \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{z} \text{ avec } z_i = cx_i \quad \forall i = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

est un espace vectoriel.

2. L'ensemble $E = K^{m \times n}$ des matrices de dimensions $m \times n$ sur le corps K muni des opérations d'addition vectorielle et de multiplication scalaire définies pour $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in E$ et $c \in K$ par

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \mathbf{C}, \text{ avec } C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n; \\
 c \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{C} \text{ avec } C_{ij} = cA_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

est un espace vectoriel.

3. L'ensemble E des fonctions $f : K \rightarrow K$ muni des opérations d'addition vectorielle et de multiplication scalaire respectivement définies pour $f, g \in E$ et $c \in K$ par

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x);$$

$$(c \cdot f)(x) = cf(x)$$

est un espace vectoriel.

4. Pour tout corps K , l'ensemble $E = K[x]$ des polynômes à une variable x et coefficients dans K est un espace vectoriel sur K ; l'addition des polynômes et le produit d'un polynôme par un élément de K sont définis de manière usuelle.

Vous pouvez vérifier que ces opérations vérifient les 8 premières conditions requises pour faire de ces triplets $(E, +, \cdot)$ des espaces vectoriels.

Comme on l'a vu, pour définir formellement un espace vectoriel E sur un corps K il faut définir le triplet $(E, +, \cdot)$, c'est-à-dire l'espace lui-même **mais aussi** les opérations d'addition vectorielle et de multiplication scalaire. Lorsque ces opérations ne sont pas précisées explicitement, on considère les opérations d'addition et de multiplication *usuelles* des éléments de l'espace E . Il s'agit des opérations données dans l'Exemple 3.1 ci-dessus.

3.2 Sous-espace vectoriel

Définition 3.3 (Sous-espace vectoriel)

Un *sous-espace vectoriel* V d'un espace vectoriel E sur un corps K (ou, en termes abrégés, un s.e.v) est un sous-ensemble non vide V de E ($V \subset E$) satisfaisant les conditions suivantes

1. $\forall x, y \in V : x + y \in V$
2. $\forall \alpha \in K, \forall x \in V : \alpha \cdot x \in V$.

Proposition 3.2

Un sous-espace vectoriel V d'un espace vectoriel E avec les mêmes opérations $(+)$ et (\cdot) est un espace vectoriel qui est un sous-ensemble de E .

Démonstration : En effet, on vérifie aisément que la définition de sous-espace vectoriel (Définition 3.3) satisfait les 10 conditions requises pour être un espace vectoriel (Définition 3.1). Comme V est un sous-ensemble de E , alors V satisfait par héritage 6 propriétés (1,2,5,6,7,8) pour les mêmes opérations. Les conditions (9,10) sont satisfaites par les hypothèses de la Définition 3.3. Par conséquent, pour prouver que V est un espace vectoriel, il reste juste à vérifier les conditions

- (3) $\exists 0 \in V : \forall x \in V, x + 0 = x$;
- (4) $\forall x \in V, \exists y \in V : y + x = 0$.

Comme E est un espace vectoriel et que $V \subset E$, on a $\forall x \in V : x + 0 = x$ et $0 \cdot x = 0$ où 0 est le vecteur nul de E . De plus, comme V est non vide il existe $x \in V$ et comme $\forall \alpha \in K : \alpha \cdot x \in V$, on a $0 \in V$ (avec $\alpha = 0$).

De même si $x \in V$, alors son inverse additif, qui s'écrit $-1 \cdot x$ d'après la Proposition 3.1, est aussi dans V (avec $\alpha = -1$).

□

En résumé, on peut prouver de deux façons qu'un ensemble V est un espace vectoriel sur K .

- Soit on prouve que V satisfait les 8 premières conditions et on prouve que toute combinaison linéaire de ses éléments reste dans V .

- Soit on montre que V est un sous-ensemble d'un espace vectoriel E défini sur le même corps K et avec les mêmes opérations $(+)$ et (\cdot) (ce qui implique que les conditions 1, 2, 5, 6, 7, 8 sont satisfaites). Il ne reste alors plus qu'à prouver que toute combinaison linéaire d'éléments de V appartient elle aussi à V (ce qui implique que les conditions 3, 4, 9, 10 sont satisfaites).

Pour démontrer qu'un ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel, il suffit de trouver un contre-exemple. Vérifiez d'abord si 0 appartient à l'ensemble: si ce n'est pas le cas, c'est terminé. Sinon trouvez une combinaison linéaire de deux vecteurs particuliers de l'ensemble qui n'y soit pas.

Exemple 3.2. *Exemples de sous-espaces vectoriels.*

1. L'ensemble des solutions d'un système de m équations linéaires homogènes à n inconnues est un sous-espace vectoriel de K^n .
2. L'ensemble $C((a, b), \mathbb{R})$ des fonctions continues sur un intervalle (a, b) à valeurs dans \mathbb{R} est un sous-espace vectoriel de l'espace $F((a, b), \mathbb{R})$ de toutes les fonctions de (a, b) dans \mathbb{R} .
3. Pour tout entier d , l'ensemble $K_d[x]$ des polynômes de degré au plus d est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $K[x]$ de tous les polynômes à coefficients dans K .
4. L'ensemble $V = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}_2[x] : p''(x) = p'(0) + p(0) \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$, l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. En effet, on a par définition $V \subseteq \mathbb{R}_2[x]$ et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall p_1, p_2 \in V$:

$$\begin{aligned} (\alpha p_1 + \beta p_2)''(x) &= \alpha p_1''(x) + \beta p_2''(x) = \alpha(p_1'(0) + p_1(0)) + \beta(p_2'(0) + p_2(0)) \\ &= (\alpha p_1 + \beta p_2)'(0) + (\alpha p_1 + \beta p_2)(0) \end{aligned}$$

ce qui, par définition de V , montre que les combinaisons linéaires d'éléments de V restent dans V .

Pour tout vecteur v d'un espace vectoriel E , l'ensemble des multiples scalaires de v :

$$\text{sev}\langle v \rangle = \{ \alpha v \mid \alpha \in K \}$$

est un sous-espace vectoriel de E . C'est même le plus "petit" (dans un sens qui sera donné dans la section suivante: la *dimension*) sous-espace vectoriel de E contenant v , puisque tout sous-espace qui contient v doit aussi contenir ses multiples, c'est pourquoi on l'appelle *sous-espace vectoriel engendré* par v . Plus généralement, on définit la notion de *sous-espace vectoriel engendré* par plusieurs vecteurs.

Définition 3.4 (*Sous-espace vectoriel engendré*)

Soit un espace vectoriel E et soient $v_1, \dots, v_n \in E$, on définit le *sous-espace vectoriel engendré* par les vecteurs v_1, \dots, v_n comme l'ensemble

$$\text{sev}\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K \}.$$

Proposition 3.3

Soit un espace vectoriel E et soient $v_1, \dots, v_n \in E$, le sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs $\text{sev}\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration : On a par définition que $V = \text{sev}\langle v_1, \dots, v_n \rangle \subseteq E$. Soient $a, b \in K$ et $u_1, u_2 \in V$. Comme $u_1, u_2 \in V$, il existe $\beta_1, \dots, \beta_n \in K$ et $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in K$ tels que

$$u_1 = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n, \quad u_2 = \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_n v_n.$$

Donc

$$\begin{aligned} au_1 + bu_2 &= a(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n) + b(\gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_n v_n) \\ &= (a\beta_1 + b\gamma_1)v_1 + \dots + (a\beta_n + b\gamma_n)v_n \\ &= \delta_1 v_1 + \dots + \delta_n v_n \end{aligned}$$

où on a posé $\delta_i = a\beta_i + b\gamma_i \in K$ pour $i = 1, \dots, n$. Par conséquent, le vecteur $au_1 + bu_2 \in V$. □

Exemple 3.3. Soit $E = K_2[x]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2. Le sous-espace vectoriel

$$V = \text{sev}\langle 1, x^2 \rangle = \{\alpha_1 + \alpha_2 x^2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in K\}$$

est le sous-espace vectoriel des polynômes de degré 2 sans terme de degré 1.

3.2.1 Opérations sur les sous-espaces vectoriels

On s'intéresse ici aux espaces résultant de l'application d'opérations (intersection, union, somme) sur des sous-espaces vectoriels.

Définition 3.5

Soit un espace vectoriel E et soient V et W des sous-espaces vectoriels de E . On définit

1. *Intersection:* $V \cap W = \{u \mid u \in V \text{ et } u \in W\}$.
2. *Union:* $V \cup W = \{u \mid u \in V \text{ ou } u \in W\}$.
3. *Somme:* $V + W = \{u \mid \text{il existe } v \in V \text{ et } w \in W : u = v + w\} = \{v + w \mid v \in V, w \in W\}$.

Proposition 3.4

Soit un espace vectoriel E et soient V et W des sous-espaces vectoriels de E . L'intersection $V \cap W$ et la somme $V + W$ sont des sous-espaces vectoriels de E .

Démonstration :

1. On a par définition $V \cap W \subseteq E$. Soient $\alpha, \beta \in K$ et $u_1, u_2 \in V \cap W$. On a $u_1, u_2 \in V$ et $u_1, u_2 \in W$. Comme V et W sont des sous-espaces vectoriels, $\alpha u_1 + \beta u_2 \in V$ et $\alpha u_1 + \beta u_2 \in W$. Donc $\alpha u_1 + \beta u_2 \in V \cap W$.
2. On a par définition $V + W \subseteq E$. Soient $\alpha, \beta \in K$ et $u_1, u_2 \in V + W$. Comme $u_1, u_2 \in V + W$, il existe $v_1, v_2 \in V$ et $w_1, w_2 \in W$ tels que

$$u_1 = v_1 + w_1, \quad u_2 = v_2 + w_2.$$

Donc

$$\begin{aligned} \alpha u_1 + \beta u_2 &= \alpha(v_1 + w_1) + \beta(v_2 + w_2) \\ &= (\alpha v_1 + \beta v_2) + (\alpha w_1 + \beta w_2) \\ &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

où on a posé $x_1 = \alpha v_1 + \beta v_2 \in V$ et $x_2 = \alpha w_1 + \beta w_2 \in W$.

Par conséquent, le vecteur $\alpha u_1 + \beta u_2 \in V + W$. □

L'union de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un espace vectoriel en général. On a notamment:

Proposition 3.5

Soit un espace vectoriel E et soient V et W des sous-espaces vectoriels de E . Si ni V ni W n'est un sous-ensemble de l'autre, alors leur union $V \cup W$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration : Puisque V n'est pas contenu dans W , il existe un vecteur $v \in V$ tel que $v \notin W$. De la même manière, puisque W n'est pas contenu dans V , il existe un vecteur $w \in W$ tel que $w \notin V$.

Par contradiction, on suppose que l'union $V \cup W$ est un sous-espace vectoriel de E . Les vecteurs $v, w \in V \cup W$. Comme on suppose que $V \cup W$ est un espace vectoriel, on a $v + w \in V \cup W$. Ce qui implique que on a

$$v + w \in V \text{ ou } v + w \in W.$$

- Si $v + w \in V$, alors il existe $v' \in V$ tel que $v + w = v'$. Puisque les vecteurs v et v' sont tous deux dans V , leur différence $v' - v$ est également dans V . Par conséquent, nous avons $w = v' - v \in V$, ce qui contredit le choix du vecteur $w \notin V$.
- Si $v + w \in W$, alors il existe $w' \in W$ tel que $v + w = w'$. Puisque les vecteurs w et w' sont tous deux dans W , leur différence $w' - w$ est également dans W . Par conséquent, nous avons $v = w' - w \in W$, ce qui contredit le choix du vecteur $v \notin W$.

Par conséquent, nous avons obtenu une contradiction. Ainsi, l'union $V \cup W$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E . \square

Proposition 3.6

Soit un espace vectoriel E et soient V et W des sous-espaces de E . On a

$$V \cup W \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \Leftrightarrow V \subseteq W \text{ ou } W \subseteq V.$$

Démonstration :

\Rightarrow Preuve par contradiction avec la Proposition 3.5.

\Leftarrow Si $V \subseteq W$ alors $V \cup W = W$ et est un sous-espace vectoriel de E . De la même manière, si $W \subseteq V$ alors $V \cup W = V$ et est un sous-espace vectoriel de E .

\square

Exemple 3.4. Soient l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ et les sous-espaces vectoriels $U = \text{sev}\langle u \rangle$ et $V = \text{sev}\langle v \rangle$ de E illustré sur la Fig. 3.1. Les sous-espaces vectoriels U et V correspondent donc à des droites dans le plan. On s'intéresse aux espaces engendrés par des opérations (intersection, somme, union) sur les sous-espaces vectoriels U et V :

- L'intersection $U \cap V = \{0\}$ est illustrée sur la Fig. 3.2. Comme attendu il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E .
- La somme $U + V = \mathbb{R}^2$ est illustrée sur la Fig. 3.3. Comme attendu il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E .
- L'union $U \cup V$ est illustrée sur la Fig. 3.4. Comme attendu par la Proposition 3.5, $U \cup V$ est un sous-espace de E mais **n'est pas un sous-espace vectoriel** de E . On vérifie en effet que le vecteur $u + v \notin U \cup V$.

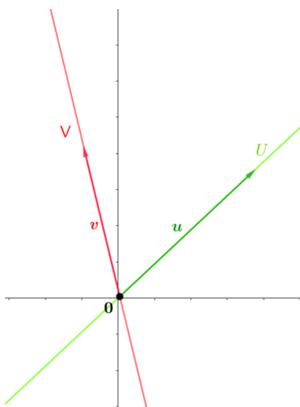


FIGURE 3.1

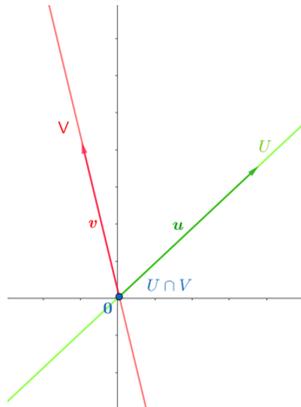


FIGURE 3.2

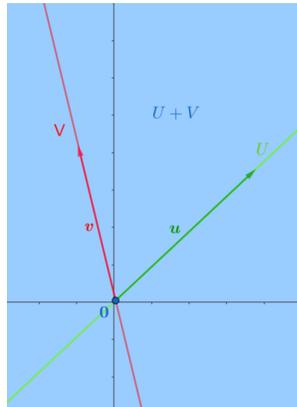


FIGURE 3.3

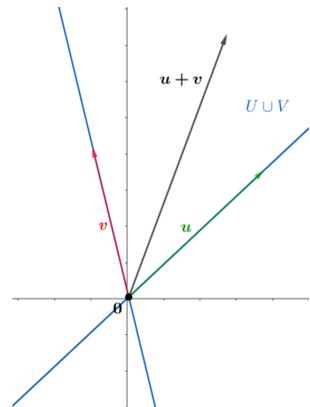


FIGURE 3.4

3.2.2 Somme directe

On peut étendre la définition de la somme de deux sous-espaces vectoriels. Si V_1, \dots, V_n sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E , on définit la somme de $V_1 + \dots + V_n$ par:

$$V_1 + \dots + V_n = \{v_1 + \dots + v_n \mid v_1 \in V_1, \dots, v_n \in V_n\}.$$

Définition 3.6 (Somme directe)

Soient V_1, \dots, V_n des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E . On dit que la somme $V_1 + \dots + V_n$ est directe si la condition suivante est satisfaite:

$$\text{Pour tout } v_1 \in V_1, \dots, v_n \in V_n : \quad v_1 + \dots + v_n = 0 \Leftrightarrow v_1 = \dots = v_n = 0. \quad (3.2)$$

La somme $V_1 + \dots + V_n$ est alors notée $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ pour attirer l'attention sur la propriété de "somme directe" Eq. (3.2).

Proposition 3.7 (Somme directe)

1. Tout vecteur $x \in V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ s'écrit de manière unique comme somme de vecteurs de V_1, \dots, V_n .
2. Dans le cas particulier où il n'y a que deux termes, la condition de somme directe Eq. (3.2) se simplifie: la somme $V + W$ est directe si et seulement si

$$V \cap W = \{0\}.$$

Démonstration :

1. Supposons

$$x = v_1 + \dots + v_n = v'_1 + \dots + v'_n,$$

où $v_1, v'_1 \in V_1, \dots, v_n, v'_n \in V_n$. La dernière égalité donne, en rassemblant tous les termes dans un membre :

$$(v_1 - v'_1) + \dots + (v_n - v'_n) = 0.$$

Comme $v_i - v'_i \in V_i$ pour tout i , la condition de somme directe entraîne alors

$$v_1 - v'_1 = \dots = v_n - v'_n = 0,$$

c'est-à-dire: $v_i = v'_i$ pour tout i .

2. Supposons d'abord $V \cap W = \{0\}$, alors toute relation

$$v + w = 0, \quad v \in V, w \in W$$

entraîne $v = -w$, donc $v \in V \cap W = \{0\}$ et par conséquent $v = w = 0$, ce qui prouve que $V + W$ est directe.

Réciproquement, si la somme est directe et si $x \in V \cap W$, alors dans l'équation

$$x + (-x) = 0,$$

on peut considérer le premier terme comme un élément de V et le second comme un élément de W , la condition de somme directe entraîne alors : $x = -x = 0$, ce qui prouve : $V \cap W = \{0\}$.

□

Exemple 3.5.

1. L'ensemble des matrices symétriques S et l'ensemble des matrices antisymétriques T

$$S = \{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \mathbf{A} = \mathbf{A}^\top\}$$

$$T = \{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \mathbf{A} = -\mathbf{A}^\top\}.$$

sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{n \times n}$ dont la somme est directe:

$$S \oplus T = \mathbb{R}^{n \times n}.$$

En effet, on a pour toute matrice $\mathbf{A} = \left(\frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top}{2}\right) + \left(\frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top}{2}\right)$ où le premier terme appartient à S et le second à T , ce qui implique $S + T = E$. De plus $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$ car $\mathbf{A} \in S \cap T \Leftrightarrow \mathbf{A} = -\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$, par conséquent $S \oplus T$.

2. L'ensemble des matrices triangulaires inférieures L , l'ensemble des matrices triangulaires supérieures U et l'ensemble des matrices diagonales D

$$L = \{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A_{ij} = 0 \text{ si } i < j\}$$

$$U = \{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$$

$$D = \{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j\}$$

sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{n \times n}$. On a

$$L + U = \mathbb{R}^{n \times n},$$

mais la somme n'est pas directe car $L \cap U = D \neq \{\mathbf{0}\}$.

3.3 Bases et dimension

3.3.1 Bases

Définition 3.7

Soit (e_1, \dots, e_n) une suite de vecteurs d'un espace vectoriel E sur un corps K . On dit que la suite (e_1, \dots, e_n) est

1. *génératrice* de E si le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs de cette suite est E tout entier :

$$\text{sev}\langle e_1, \dots, e_n \rangle = E.$$

Ce qui revient à dire que tout vecteur $x \in E$ est combinaison linéaire de (e_1, \dots, e_n) :

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \text{ pour certains scalaires } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K.$$

2. *libre* (ou que les vecteurs e_1, \dots, e_n sont linéairement indépendants) si la seule combinaison linéaire nulle de cette suite est celle dont tous les coefficients sont nuls :

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

3. une *base* de E si elle est à la fois génératrice de E et libre.

On dit qu'un espace vectoriel E est *finiment engendré*² si il existe une suite génératrice finie (c'est-à-dire constituée d'un nombre fini de vecteurs) de E .

Théorème 3.1 (Existence d'une base)

Tout espace vectoriel finiment engendré admet une base.

2. Si un espace vectoriel E n'est pas finiment engendré, alors il existe une suite libre constituée d'un nombre infini de vecteurs de E .

Démonstration : Soit (e_1, \dots, e_n) une suite génératrice de l'espace E . Si l'un des vecteurs de cette suite (par exemple e_n) est combinaison linéaire des autres, la suite obtenue en retirant ce vecteur est également génératrice:

$$\text{sev}\langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle = \text{sev}\langle e_1, \dots, e_n \rangle = E.$$

Ainsi, à partir d'une suite génératrice donnée, on peut donc obtenir une nouvelle suite génératrice plus courte en supprimant tous les vecteurs qui sont combinaisons linéaires des autres. Pour la commodité des notations, supposons que l'on ait éliminé les derniers vecteurs de la suite donnée, de sorte que la nouvelle suite génératrice soit (e_1, \dots, e_m) pour un certain $m \leq n$. On va prouver que cette dernière suite est une base. Comme elle est génératrice, il suffit de prouver que cette suite est libre. Supposons par contradiction que la suite n'est pas libre:

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_m e_m = 0,$$

avec $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ non tous nuls. Supposons par exemple $\alpha_m \neq 0$. En divisant la relation précédente par α_m et en isolant e_m , on obtient alors

$$e_m = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_m}\right) e_1 + \dots + \left(-\frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}\right) e_{m-1}.$$

C'est une contradiction, puisque, par construction, aucun des vecteurs (e_1, \dots, e_m) n'est combinaison linéaire des autres. \square

Proposition 3.8

Si $e = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , alors tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de e .

Démonstration : Comme la suite e est génératrice, tout vecteur $x \in E$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de ces éléments. Supposons par l'absurde qu'il existe deux combinaisons linéaires des éléments de cette base générant le vecteur x :

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n.$$

L'expression ci-dessus est vraie si et seulement si

$$(\alpha_1 - \beta_1)e_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)e_n = 0.$$

Or, comme e est une suite libre, cette dernière égalité n'est vérifiée que si $\alpha_i = \beta_i$ pour tout i , ce qui contredit l'hypothèse. La combinaison linéaire générant x à l'aide de la base e est donc unique, ce qui conclut la preuve. \square

3.3.2 Dimension

La *dimension* d'un espace vectoriel finiment engendré est le nombre d'éléments d'une base quelconque. Pour justifier cette définition, il faut prouver que toutes les bases d'un espace vectoriel finiment engendré ont le même nombre d'éléments, c'est ce que l'on se propose de faire dans cette section.

Le principal outil technique est la propriété suivante, connue sous le nom de *lemme d'échange*.

Lemme 3.1 (Lemme d'échange)

Soient e_1, \dots, e_r, x, y des vecteurs d'un espace vectoriel E . Supposons que $y \in \text{sev}\langle e_1, \dots, e_r, x \rangle$ et que le coefficient de x dans une expression de y comme combinaison linéaire de e_1, \dots, e_r, x soit non nul:

$$y = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r + \beta x \quad \text{avec } \beta \neq 0 \tag{3.3}$$

alors $x \in \text{sev}\langle e_1, \dots, e_r, y \rangle$ et $\text{sev}\langle e_1, \dots, e_r, x \rangle = \text{sev}\langle e_1, \dots, e_r, y \rangle$.

Démonstration : En divisant les deux membres de la relation Eq. (3.3) par β et en isolant x dans un membre, on obtient

$$x = \left(-\frac{\alpha_1}{\beta}\right)e_1 + \dots + \left(-\frac{\alpha_r}{\beta}\right)e_r + \frac{1}{\beta}y.$$

□

Proposition 3.9

Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une suite génératrice d'un espace vectoriel E et $f = (f_1, \dots, f_m)$ une suite libre de E , alors $n \geq m$ et on peut prolonger la suite f en une suite génératrice de n éléments au moyen de $n - m$ éléments de la suite e .

Démonstration : Comme e est une suite génératrice de E , on peut écrire

$$f_1 = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

pour certains coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. L'un des coefficients est non nul, sinon $f_1 = 0$, ce qui contredit l'hypothèse que f est une suite libre. Quitte à changer la numérotation de e_1, \dots, e_n , on peut supposer $\alpha_1 \neq 0$. D'après le Lemme 3.1, on a alors

$$\text{sev}\langle e_1, \dots, e_n \rangle = \text{sev}\langle f_1, e_2, \dots, e_n \rangle,$$

donc la suite (f_1, e_2, \dots, e_n) est aussi génératrice.

On répète le même raisonnement successivement pour f_2, f_3, \dots . Supposons par exemple avoir établi que la suite $(f_1, \dots, f_i, e_{i+1}, \dots, e_n)$ est génératrice. Alors f_{i+1} est combinaison linéaire de cette suite

$$f_{i+1} = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_i f_i + \alpha_{i+1} e_{i+1} + \dots + \alpha_n e_n$$

pour certains $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. L'un des coefficients $\alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n$ est non nul car sinon on a

$$\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_i f_i + (-1) f_{i+1} = 0$$

(avec le coefficient de f_{i+1} non nul), ce qui contredit l'hypothèse que f est une suite libre. Quitte à changer la numérotation de e_{i+1}, \dots, e_n , on peut supposer $\alpha_{i+1} \neq 0$. D'après le Lemme 3.1, on peut alors échanger e_{i+1} par f_{i+1} dans la suite $(f_1, \dots, f_i, e_{i+1}, \dots, e_n)$ pour conclure que la suite $(f_1, \dots, f_{i+1}, e_{i+2}, \dots, e_n)$ est génératrice.

Si $m > n$, alors après avoir appliqué n fois le raisonnement précédent, on voit que la suite (f_1, \dots, f_n) est génératrice. Le vecteur f_{n+1} est donc combinaison linéaire de cette suite, ce qui contredit l'hypothèse que la suite f est libre. On a donc $m \leq n$ et après m itérations les arguments ci-dessus montrent que la suite $(f_1, \dots, f_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$ est génératrice. La suite f a donc été prolongée au moyen de $n - m$ élément de e en une suite génératrice de E . □

Théorème 3.2

Toutes les bases d'un espace vectoriel finiment engendré ont le même nombre d'éléments.

Démonstration : Soient (e_1, \dots, e_n) et (f_1, \dots, f_m) deux bases d'un espace vectoriel E .

— Comme (e_1, \dots, e_n) est une suite génératrice et (f_1, \dots, f_m) une suite libre, la Proposition 3.9 montre que $m \leq n$.

— Comme (f_1, \dots, f_m) est génératrice et que (e_1, \dots, e_n) est libre, la Proposition 3.9 montre que $n \leq m$. Ainsi, $n = m$ et toutes les bases de E ont donc le même nombre d'éléments. □

Le nombre d'éléments d'une base d'un espace vectoriel finiment engendré étant un invariant, il s'agit d'une grandeur bien définie que l'on appelle *dimension* de l'espace vectoriel.

Définition 3.8 (Dimension)

Soit E , un espace vectoriel finiment engendré, on appelle *dimension* de E (noté $\dim(E)$) le nombre d'éléments d'une base quelconque de E .

Corollaire 3.3

Dans un espace vectoriel E de dimension finie n ,

1. de toute suite génératrice de E on peut extraire une base ;
2. toute suite génératrice de E de n éléments est une base ;
3. toute suite libre peut être prolongée en base ;
4. toute suite libre de n éléments est une base.

Démonstration :

1. Voir démonstration du Théorème 3.1.
2. Supposons que $g = (g_1, \dots, g_n)$ est une suite génératrice mais non-libre de E . Par le point 1, on peut extraire de g une base $g' = (g_1, \dots, g_m)$ de E ($m < n$). La suite g' étant une base de E , on a $m = n$ par le Théorème 3.2, ce qui contredit l'hypothèse que g n'est pas libre.
3. Résulte de la Proposition 3.9 et de 2.
4. Supposons que $l = (l_1, \dots, l_n)$ est une suite libre mais non-génératrice de E . Par le point 3, on peut prolonger l en une base $l' = (l_1, \dots, l_n, l'_{n+1}, \dots, l'_m)$ de E ($m > n$). La suite l' étant une base de E , on a $m = n$ par le Théorème 3.2, ce qui contredit l'hypothèse que l n'est pas génératrice.

□

Exemple 3.6. *Quelques exemples de bases d'espaces vectoriels.*

1. L'espace vectoriel K^n sur un corps K admet une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ appelée *base canonique* (ou *standard*), dont le i -ème vecteur est:

$$e_i = (0, \dots, 0, \underset{\uparrow}{1}, 0, \dots, 0).$$

On a donc $\dim(K^n) = n$.

2. L'espace vectoriel $K_n[x]$ des polynômes de degré au plus n admet pour base la suite

$$e = (1, x, x^2, \dots, x^n).$$

On a donc: $\dim(K_n[x]) = n + 1$.

En revanche, l'espace $K[x]$ de tous les polynômes est de dimension infinie. En effet, si $(p_1(x), \dots, p_m(x))$ est une suite finie de polynômes, on peut toujours trouver un entier d strictement plus grand que les degrés de $p_1(x), \dots, p_m(x)$. Un polynôme de degré d n'est donc pas combinaison linéaire de $(p_1(x), \dots, p_m(x))$.

L'espace $K[x]$ n'est donc pas finiment engendré, d'où $\dim K[x] = \infty$.

3. L'espace vectoriel $K^{2 \times 2}$ des matrices carrées d'ordre 2 admet pour base la suite

$$e = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

On a donc: $\dim(K^{2 \times 2}) = 4$.

3.4 Bases de sous-espaces

Dans cette section, on se propose de donner des indications générales sur les dimensions de sous-espaces d'un espace vectoriel fixé et de mettre au point diverses techniques permettant de trouver des bases de sous-espaces.

Lemme 3.2

Soit V un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E sur un corps K et soit (v_1, \dots, v_m) une suite libre de V . Si u est un vecteur de E qui n'est pas dans V ($u \in E \setminus V$), alors la suite (v_1, \dots, v_m, u) est une suite libre de E .

Démonstration : Supposons que

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m + \beta u = 0 \quad (3.4)$$

pour certains $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta \in K$. Il faut prouver que $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = \beta = 0$. Si $\beta \neq 0$, on peut écrire

$$u = \left(-\frac{\alpha_1}{\beta}\right) v_1 + \dots + \left(-\frac{\alpha_m}{\beta}\right) v_m.$$

Dès lors u est une combinaison linéaire de v_1, \dots, v_m et il est donc dans V . On doit donc avoir $\beta = 0$. Alors la relation Eq. (3.4) ci-dessus entraîne $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$ puisque v_1, \dots, v_m forment une suite libre. \square

Proposition 3.10

Soit V un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E finiment engendré.

1. V est finiment engendré.
2. Toute base de V peut être prolongée en une base de E .
3. $\dim(V) \leq \dim(E)$.
4. Si $\dim(V) = \dim(E)$, alors $V = E$.

Démonstration :

1. Supposons au contraire que V n'admette pas de suite génératrice finie. On peut alors construire une suite libre de V donc aussi de E dont le nombre d'éléments dépasse celui d'une suite génératrice de E . Cela contredit le fait que E soit finiment engendré. Il est donc absurde de supposer que V n'admette pas de suite génératrice finie.
2. Cela résulte directement du Corollaire 3.3: toute suite libre de E peut être prolongée en une base de E . En effet, les bases de V sont des suites libres de E .
3. Découle de la propriété précédente.
4. Si $\dim(V) = \dim(E)$, alors toute base de V est une suite libre de E dont le nombre d'éléments est égal à la dimension de E , c'est donc une base de E , d'après le Corollaire 3.3. L'espace engendré par cette suite est donc $V = E$.

\square

De la même manière que l'on avait défini des opérations élémentaires pour les matrices (Définition 1.7) et les systèmes d'équations linéaires (Définition 2.1), on définit 3 opérations élémentaires agissant sur les éléments d'une suite de vecteurs d'un espace vectoriel.

Définition 3.9 (*Opérations élémentaires sur les suites de vecteurs d'espace vectoriel*)

Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une suite de vecteurs appartenant à un espace vectoriel E .

1. Une *opération élémentaire de type I* consiste à remplacer un des vecteurs de la suite par la somme de ce même vecteur et d'un multiple d'un autre vecteur de la suite

$$(e_1, \dots, e_{i-1}, e_i + \lambda e_j, e_{i+1}, \dots, e_n), \quad i \neq j, \lambda \neq 0.$$

2. Une *opération élémentaire de type II* consiste à échanger deux vecteurs de la suite

$$(e_1, \dots, e_j, \dots, e_i, \dots, e_n), \quad i < j.$$

3. Une *opération élémentaire de type III* consiste à multiplier un vecteur par un scalaire non nul

$$(e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n), \quad \lambda \neq 0.$$

On ne modifie pas le sous-espace vectoriel engendré par une suite de vecteurs quand on effectue sur celle-ci une ou plusieurs opérations élémentaires.

Proposition 3.11

Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une suite de vecteurs appartenant à un espace vectoriel E , on a

1. $\text{sev}\langle e_1, \dots, e_n \rangle = \text{sev}\langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_i + \lambda e_j, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle, \quad i \neq j, \lambda \neq 0;$
2. $\text{sev}\langle e_1, \dots, e_n \rangle = \text{sev}\langle e_1, \dots, e_j, \dots, e_i, \dots, e_n \rangle, \quad i < j;$
3. $\text{sev}\langle e_1, \dots, e_n \rangle = \text{sev}\langle e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n \rangle, \quad \lambda \neq 0.$

Démonstration : Soit $V = \text{sev}\langle e_1, \dots, e_n \rangle$.

1. Pour les opérations élémentaires de type I, il s'agit de prouver:

$$\text{sev}\langle e_1, \dots, e_n \rangle = \text{sev}\langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_i + \lambda e_j, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle$$

où $i \neq j$ et λ est un scalaire arbitraire. Or, la forme des vecteurs de la suite de droite montre que chacun de ceux-ci est combinaison linéaire de ceux de gauche. Inversement, montrons que chaque vecteur de gauche est combinaison linéaire de ceux de droite: il suffit de le vérifier pour e_i , puisque tous les autres apparaissent aussi à droite. Pour e_i , on a:

$$e_i = (e_i + \lambda e_j) - \lambda e_j.$$

2. La proposition est évidente pour les opérations de type II et III.

□

3.5 Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels

Proposition 3.12

Si V_1, \dots, V_n sont des sous-espaces d'un espace vectoriel E , alors

1. une suite génératrice de $V_1 + \dots + V_n$ s'obtient en juxtaposant des suites génératrices de V_1, \dots, V_n .
2. si de plus la somme $V_1 + \dots + V_n$ est directe, alors une base de $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ s'obtient en juxtaposant des bases de V_1, \dots, V_n .

Démonstration : Soient

$$\begin{aligned} (e_1, \dots, e_r) & \text{ une suite génératrice de } V_1 \\ (f_1, \dots, f_s) & \text{ une suite génératrice de } V_2 \\ & \dots \\ (g_1, \dots, g_t) & \text{ une suite génératrice de } V_n \end{aligned}$$

et soit la suite constituée de la juxtaposition de ces suites.

$$u = (e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_s, \dots, g_1, \dots, g_t).$$

1. Il faut prouver que la suite u engendre $V_1 + \dots + V_n$. Tout vecteur de cette somme s'écrit

$$x = v_1 + \dots + v_n$$

où $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \dots, v_n \in V_n$. En décomposant chaque v_i comme combinaison linéaire de la suite génératrice donnée de V_i , on obtient

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r, \\ v_2 &= \beta_1 f_1 + \dots + \beta_s f_s, \\ & \dots \\ v_n &= \gamma_1 g_1 + \dots + \gamma_t g_t. \end{aligned}$$

D'où, en additionnant

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r + \beta_1 f_1 + \dots + \beta_s f_s + \dots + \gamma_1 g_1 + \dots + \gamma_t g_t \in \text{sev}\langle e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_s, \dots, g_1, \dots, g_t \rangle.$$

Cela montre que la suite u engendre $V_1 + \dots + V_n$.

2. Supposons que la somme $V_1 + \dots + V_n$ soit directe et que les suites génératrices choisies dans V_1, \dots, V_n soient des bases. Par le point précédent, on sait que u est une suite génératrice de $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$. Il reste donc à prouver que cette suite est libre. Supposons

$$\underbrace{\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r}_{\in V_1} + \underbrace{\beta_1 f_1 + \dots + \beta_s f_s}_{\in V_2} + \dots + \underbrace{\gamma_1 g_1 + \dots + \gamma_t g_t}_{\in V_n} = 0 \quad (3.5)$$

pour certains $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s, \dots, \gamma_1, \dots, \gamma_t \in K$. Comme la somme de V_1, \dots, V_n est directe, cette relation entraîne

$$\begin{aligned} \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r &= 0, \\ \beta_1 f_1 + \dots + \beta_s f_s &= 0, \\ & \dots \\ \gamma_1 g_1 + \dots + \gamma_t g_t &= 0. \end{aligned}$$

Comme par ailleurs les suites $(e_1, \dots, e_r), (f_1, \dots, f_s), \dots, (g_1, \dots, g_t)$ sont libres (puisque ce sont des bases de V_1, V_2, \dots, V_n respectivement), on en déduit

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \dots = \alpha_r = 0, \\ \beta_1 &= \dots = \beta_s = 0, \\ & \dots \\ \gamma_1 &= \dots = \gamma_t = 0. \end{aligned}$$

Tous les coefficients de la relation de dépendance linéaire Eq. (3.5) sont donc nuls, et la suite u est libre. C'est donc bien une base de $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$.

□

Lorsque la somme $V_1 + \dots + V_n$ n'est pas directe, il est plus difficile d'en trouver une base. Voici cependant une indication utile concernant les sommes de deux sous-espaces.

Proposition 3.13 (Formule de Grassmann)

Si V et W sont deux sous-espaces de dimension finie d'un espace vectoriel E , alors $V + W$ est de dimension finie et

$$\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W).$$

Démonstration : Soient

(u_1, \dots, u_r) une base de $V \cap W$

$(u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s)$ une base de V

$(u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_t)$ une base de W .

On peut prolonger une base de $V \cap W$ en une base de V car $V \cap W \subset V$.

De la même manière, on peut prolonger une base de $V \cap W$ en une base de W car $V \cap W \subset W$.

Par définition

$$\begin{aligned} V + W &= \{x + y \mid x \in V, y \in W\} \\ &= \left\{ \underbrace{\sum_{i=1}^r \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^s \beta_i v_i}_{x \in V} + \underbrace{\sum_{i=1}^r \gamma_i u_i + \sum_{i=1}^t \delta_i w_i}_{y \in W}, \forall \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in K \right\} \\ &= \text{sev}(u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_t). \end{aligned}$$

La suite $(u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_t)$ est donc génératrice de $V + W$. On va maintenant démontrer que cette suite est libre. Les vecteurs u_i , v_j et w_k forment une suite libre s'ils vérifient la propriété suivante

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^s \beta_j v_j + \sum_{k=1}^t \gamma_k w_k = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = \beta_j = \gamma_k = 0 \quad \forall i, j, k. \quad (3.6)$$

Soient des coefficients α_i , β_j et γ_k tels que

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^s \beta_j v_j + \sum_{k=1}^t \gamma_k w_k = 0. \quad (3.7)$$

On définit $x := \sum_{i=1}^r \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^s \beta_j v_j$, et on a $x \in V$. L'Eq. (3.7) devient donc

$$x + \sum_{k=1}^t \gamma_k w_k = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^t \gamma_k w_k = -x.$$

Ainsi, $\sum_{k=1}^t \gamma_k w_k \in V$ (car $x \in V$), et $\sum_{k=1}^t \gamma_k w_k \in W$ par définition. Dès lors, $\sum_{k=1}^t \gamma_k w_k \in V \cap W$, et on peut exprimer ce vecteur comme une combinaison linéaire des vecteurs u_1, \dots, u_r :

$$\sum_{k=1}^t \gamma_k w_k = \sum_{i=1}^r \alpha'_i u_i.$$

On réécrit alors Eq. (3.7) comme suit :

$$\sum_{i=1}^r (\alpha_i + \alpha'_i) u_i + \sum_{j=1}^s \beta_j v_j = 0.$$

Les vecteurs u_i et v_j définissant une base de V , ils forment une suite libre, et on a

$$\alpha_i + \alpha'_i = 0 \quad (1 \leq i \leq r) \qquad \boxed{\beta_j = 0} \quad (1 \leq j \leq s).$$

Dès lors, on réécrit Eq. (3.7) avec $\beta_j = 0$ pour $1 \leq j \leq s$:

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i u_i + \sum_{k=1}^t \gamma_k w_k = 0.$$

Les vecteurs u_i et w_k définissant une base de W , ils forment une suite libre, et on a

$$\boxed{\alpha_i = 0} \quad (1 \leq i \leq r) \qquad \boxed{\gamma_k = 0} \quad (1 \leq k \leq t).$$

La condition décrite en Eq. (3.6) est donc bien remplie.

On a donc démontré que la suite $(u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_t)$ est génératrice de $V + W$ et libre. Il s'agit donc d'une base de $V + W$. La dimension d'un espace vectoriel étant le nombre d'éléments constituant la base, on a la relation suivante :

$$\dim(V + W) = r + s + t = (r + s) + (r + t) - r = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W).$$

□

3.6 Retour sur les matrices et systèmes linéaires

Dans cette section, nous revenons à un sujet précédant: les matrices (Chapitre 1) et les systèmes d'équations linéaires (Chapitre 2), et illustrons comment la notion d'espace vectoriel permet d'établir un certain nombre de nouvelles propriétés particulièrement importantes en pratique.

3.6.1 Les 4 sous-espaces vectoriels fondamentaux d'une matrice

On commence par définir 4 espaces vectoriels particuliers associés à une matrice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

Définition 3.10

1. L'*espace colonne* de \mathbf{A} , noté $\mathcal{C}(\mathbf{A})$, est le sous-ensemble de K^m engendré par ses colonnes

$$\mathcal{C}(\mathbf{A}) = \text{sev}\langle \mathbf{A}_{:,1}, \dots, \mathbf{A}_{:,n} \rangle.$$

Autrement dit,

$$\mathcal{C}(\mathbf{A}) = \{ \mathbf{y} \in K^m : \exists \mathbf{x} \in K^n : \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \}.$$

2. L'*espace ligne* de \mathbf{A} , noté $\mathcal{L}(\mathbf{A})$, est le sous-ensemble de K^n engendré par ses lignes

$$\mathcal{L}(\mathbf{A}) = \text{sev}\langle \mathbf{A}_{1,:}, \dots, \mathbf{A}_{m,:} \rangle.$$

Autrement dit

$$\mathcal{L}(\mathbf{A}) = \{ \mathbf{y} \in K^n : \exists \mathbf{x} \in K^m : \mathbf{y} = \mathbf{A}^\top \mathbf{x} \} = \mathcal{C}(\mathbf{A}^\top).$$

3. L'*espace annulateur* de \mathbf{A} , noté $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, est le sous-ensemble de K^n défini comme

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{ \mathbf{x} \in K^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \}.$$

4. L'*espace annulateur* de \mathbf{A}^\top , noté $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\top)$, est le sous-ensemble de K^m défini comme

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}^\top) = \{ \mathbf{x} \in K^m : \mathbf{A}^\top \mathbf{x} = \mathbf{0} \}.$$

Proposition 3.14

Les ensembles $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ et $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\top)$ sont des sev de K^m , les ensembles $\mathcal{L}(\mathbf{A})$ et $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ sont des sev de K^n .

Démonstration :

1.,2. Découle directement de la définition de $\text{sev}\langle \rangle$.

3. Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ et $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$, on a

$$\mathbf{A}(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2) = \alpha_1 \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \alpha_1 \mathbf{0} + \alpha_2 \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

et par conséquent $\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$.

4. Démonstration analogue à 3. □

Proposition 3.15

Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ des matrices sur un corps K telles que

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}$$

alors $\mathcal{C}(\mathbf{A}) \subset \mathcal{C}(\mathbf{B})$ et $\mathcal{L}(\mathbf{A}) \subset \mathcal{L}(\mathbf{C})$.

Démonstration :

— Soient $\mathbf{B} \in K^{m \times n}$ et $\mathbf{C} \in K^{n \times p}$, de sorte que $\mathbf{A} \in K^{m \times p}$. Si l'on effectue le produit \mathbf{BC} en décomposant \mathbf{B} par colonnes, on obtient la matrice \mathbf{A} décomposée par colonnes:

$$(\mathbf{A}_{:,1} \quad \dots \quad \mathbf{A}_{:,p}) = (\mathbf{B}_{:,1} \quad \dots \quad \mathbf{B}_{:,p}) \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{np} \end{pmatrix}.$$

Cette égalité donne

$$\mathbf{A}_{:,j} = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_{:,i} c_{ij} \text{ pour } j = 1, \dots, p,$$

ce qui montre que les colonnes de \mathbf{A} sont des combinaisons linéaires des colonnes de \mathbf{B} et par conséquent $\mathcal{C}(\mathbf{A}) \subset \mathcal{C}(\mathbf{B})$.

— De la même manière, si l'on effectue le produit \mathbf{BC} en décomposant \mathbf{C} par lignes, on obtient

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{m,:} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{1,:} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{n,:} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\mathbf{A}_{i,:} = \sum_{j=1}^n b_{ij} \mathbf{C}_{j,:} \text{ pour } i = 1, \dots, m,$$

ce qui montre que les lignes de \mathbf{A} sont des combinaisons linéaires des lignes de \mathbf{C} et par conséquent $\mathcal{L}(\mathbf{A}) \subset \mathcal{L}(\mathbf{C})$. □

Cette proposition admet une sorte de réciproque.

Proposition 3.16

Soient $\mathbf{A} \in K^{m \times p}$, $\mathbf{B}_1 \in K^{m \times n}$, $\mathbf{C}_2 \in K^{n \times p}$.

1. Si $\mathcal{C}(\mathbf{A}) \subset \mathcal{C}(\mathbf{B}_1)$, alors il existe une matrice $\mathbf{C}_1 \in K^{n \times p}$ telle que

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_1.$$

2. Si $\mathcal{L}(\mathbf{A}) \subset \mathcal{L}(\mathbf{C}_2)$, alors il existe une matrice $\mathbf{B}_2 \in K^{m \times n}$ telle que

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_2.$$

Démonstration : Il suffit de parcourir les mêmes étapes que dans la démonstration précédente en sens inverse: si $\mathcal{C}(\mathbf{A}) \subset \mathcal{C}(\mathbf{B}_1)$, alors les colonnes de \mathbf{A} sont combinaisons linéaires des colonnes de \mathbf{B}_1 (dans l'espace vectoriel K^m), donc on a des relations du type:

$$\mathbf{A}_{:,j} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{B}_1)_{:,i} c_{ij} \text{ pour } j = 1, \dots, p,$$

pour certains c_{ij} . En posant $(\mathbf{C}_1)_{ij} = c_{ij}$, on a donc

$$(\mathbf{A}_{:,1} \quad \dots \quad \mathbf{A}_{:,p}) = ((\mathbf{B}_1)_{:,1} \quad \dots \quad (\mathbf{B}_1)_{:,n}) \cdot \mathbf{C}_1$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_1.$$

La deuxième partie se démontre de manière analogue. \square

Théorème 3.4

La dimension du sous-espace vectoriel de K^m engendré par les n colonnes de $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ est égale à la dimension du sous-espace vectoriel de K^n engendré par les m lignes de \mathbf{A} :

$$\dim(\mathcal{C}(\mathbf{A})) = \dim(\mathcal{L}(\mathbf{A})).$$

Démonstration : Soit $l = \dim(\mathcal{L}(\mathbf{A}))$ et $c = \dim(\mathcal{C}(\mathbf{A}))$. Il s'agit de prouver: $l = c$.

Il suffit pour cela de prouver: $l \leq c$ et $l \geq c$.

- Considérons d'abord une matrice $\mathbf{B}_1 \in K^{m \times c}$ dont les c colonnes forment une base de $\mathcal{C}(\mathbf{A})$. Alors $\mathcal{C}(\mathbf{A}) = \mathcal{C}(\mathbf{B}_1)$, donc la Proposition 3.16 précédente livre une matrice $\mathbf{C}_1 \in K^{c \times n}$ telle que

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_1.$$

La Proposition 3.15 montre alors que $\mathcal{L}(\mathbf{A}) \subset \mathcal{L}(\mathbf{C}_1)$, donc $l \leq \dim(\mathcal{L}(\mathbf{C}_1))$. Comme la matrice \mathbf{C}_1 n'a que c lignes, on a forcément $\dim(\mathcal{L}(\mathbf{C}_1)) \leq c$ et en combinant les deux inégalités précédentes on obtient

$$l \leq c.$$

- Pour démontrer l'inégalité réciproque, on considère une matrice $\mathbf{C}_2 \in K^{l \times n}$ dont les l lignes forment une base de $\mathcal{L}(\mathbf{A})$. Comme précédemment, on a alors

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_2$$

pour une certaine matrice $\mathbf{B}_2 \in K^{m \times l}$, d'où $\mathcal{C}(\mathbf{A}) \subset \mathcal{C}(\mathbf{B}_2)$. Comme \mathbf{B}_2 n'a que l colonnes, on en déduit:

$$c \leq l.$$

\square

3.6.2 Rang

Proposition 3.17

Soit $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, on a

$$\text{rang}(\mathbf{A}) = \dim(\mathcal{L}(\mathbf{A})) = \dim(\mathcal{C}(\mathbf{A}))$$

où $\text{rang}(\mathbf{A})$ est défini dans la Définition 1.8.

Démonstration : Comme les opérations élémentaires sur une suite de vecteurs ne modifient pas le sous-espace engendré (Proposition 3.11), les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice ne modifient pas $\mathcal{L}(\mathbf{A})$. On a donc

$$\dim(\mathcal{L}(\mathbf{A})) = \dim(\mathcal{L}(\mathbf{R}))$$

où \mathbf{R} est la matrice réduite sous forme de Gauss-Jordan de \mathbf{A} . Par ailleurs, si une matrice est à lignes échelonnées, alors ses lignes non nulles sont linéairement indépendantes, et forment donc une base de l'espace des lignes de \mathbf{A} . Le rang de \mathbf{A} étant le nombre de lignes non nulles de \mathbf{R} , on a $\text{rang}(\mathbf{A}) = \dim(\mathcal{L}(\mathbf{A}))$. Enfin par le Théorème 3.4, on a

$$\text{rang}(\mathbf{A}) = \dim(\mathcal{L}(\mathbf{A})) = \dim(\mathcal{C}(\mathbf{A})).$$

\square

De cette nouvelle interprétation du rang, on déduit la proposition suivante.

Proposition 3.18

Soit $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{C} \in K^{n \times p}$

1. $\text{rang}(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$;
2. $\text{rang}(\mathbf{A}^\top) = \text{rang}(\mathbf{A})$;
3. $\text{rang}(\mathbf{BC}) \leq \min(\text{rang}(\mathbf{B}), \text{rang}(\mathbf{C}))$.

Démonstration :

1. Évident à partir de Proposition 3.17 comme $\mathcal{L}(\mathbf{A}) \subset K^n$ et $\mathcal{C}(\mathbf{A}) \subset K^m$.
2. En utilisant la Proposition 3.17, on a $\text{rang}(\mathbf{A}^\top) = \dim(\mathcal{C}(\mathbf{A}^\top)) = \dim(\mathcal{L}(\mathbf{A})) = \text{rang}(\mathbf{A})$.
3. On pose $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$. La Proposition 3.15 indique que $\mathcal{C}(\mathbf{A}) \subset \mathcal{C}(\mathbf{B})$, donc

$$\text{rang}(\mathbf{A}) \leq \text{rang}(\mathbf{B})$$

puisque $\text{rang}(\mathbf{A}) = \dim(\mathcal{C}(\mathbf{A}))$ et $\text{rang}(\mathbf{B}) = \dim(\mathcal{C}(\mathbf{B}))$. De même, la Proposition 3.15 indique que $\mathcal{L}(\mathbf{A}) \subset \mathcal{L}(\mathbf{C})$, donc

$$\text{rang}(\mathbf{A}) \leq \text{rang}(\mathbf{C}).$$

□

Proposition 3.19

Une matrice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ est inversible à gauche (resp. à droite) si et seulement si $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$ (resp. $\text{rang}(\mathbf{A}) = m$).

Démonstration :

— Supposons d'abord que \mathbf{A} soit inversible à gauche, il existe alors une matrice $\mathbf{B} \in K^{n \times m}$ telle que

$$\mathbf{BA} = \mathbf{I}_n.$$

Il résulte de la Proposition 3.15 que $\mathcal{L}(\mathbf{I}_n) \subset \mathcal{L}(\mathbf{A})$, ce qui implique (Proposition 3.10) que

$$\dim(\mathcal{L}(\mathbf{I}_n)) \leq \dim(\mathcal{L}(\mathbf{A})) \leq n.$$

Comme les lignes de \mathbf{I}_n forment la base canonique de K^n , on a $\dim(\mathcal{L}(\mathbf{I}_n)) = n$. Par conséquent, l'espace engendré par les lignes de \mathbf{A} est K^n tout entier, donc la dimension de cet espace est n :

$$\text{rang}(\mathbf{A}) = \dim(\mathcal{L}(\mathbf{A})) = n.$$

Réciproquement, si $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$, alors les lignes de \mathbf{A} forment une suite génératrice de K^n , donc $\mathcal{L}(\mathbf{I}_n) \subset \mathcal{L}(\mathbf{A})$. D'après la Proposition 3.16, on peut alors trouver une matrice $\mathbf{B} \in K^{n \times m}$ telle que

$$\mathbf{BA} = \mathbf{I}_n.$$

— Pour prouver que \mathbf{A} est inversible à droite si et seulement si $\text{rang}(\mathbf{A}) = m$, on utilise les mêmes arguments que ci-dessus, mais on raisonne sur les colonnes au lieu des lignes et avec K^m au lieu de K^n . On peut aussi déduire la condition d'inversibilité à droite de la condition d'inversibilité à gauche, en utilisant la propriété: $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$ pour montrer d'abord qu'une matrice est inversible à droite si et seulement si sa transposée est inversible à gauche. Les détails de cette démonstration sont laissés au lecteur.

□

Corollaire 3.5

Toute matrice inversible est carrée.

Démonstration : Si une matrice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ est inversible, alors elle est inversible à gauche et à droite, et la proposition précédente montre alors que

$$\text{rang}(\mathbf{A}) = m \quad \text{et} \quad \text{rang}(\mathbf{A}) = n,$$

d'où $m = n$ et \mathbf{A} est donc carrée. □

Corollaire 3.6

Le rang d'une matrice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ est l'ordre de la plus grande sous-matrice (carrée) inversible de \mathbf{A} .

Démonstration : Soit $r = \text{rang}(\mathbf{A})$, on peut donc trouver r lignes de \mathbf{A} linéairement indépendantes. La sous-matrice \mathbf{A}' de \mathbf{A} formée de ces r lignes est alors de dimension $r \times n$ et de rang r . D'après la définition du rang d'une matrice, on peut trouver r colonnes de \mathbf{A}' linéairement indépendantes. La sous-matrice \mathbf{A}'' de \mathbf{A}' formée de ces r colonnes est une sous-matrice carrée d'ordre r de \mathbf{A} qui est inversible puisque son rang est r . Cela prouve que la plus grande sous-matrice inversible de \mathbf{A} est d'ordre au moins égal au rang de \mathbf{A} .

Inversement, si \mathbf{A}'' est une sous-matrice inversible d'ordre s de \mathbf{A} , alors les lignes et les colonnes de \mathbf{A}'' sont linéairement indépendantes. Soit \mathbf{A}' la sous-matrice de dimension $s \times n$ de \mathbf{A} qui contient \mathbf{A}'' (la matrice \mathbf{A}' est donc obtenue à partir de \mathbf{A}'' en lui adjoignant les colonnes de \mathbf{A} qui lui manquent). Comme la matrice \mathbf{A}' contient s colonnes linéairement indépendantes (à savoir celles de \mathbf{A}''), son rang est s . Ses s lignes sont donc linéairement indépendantes et comme les lignes de \mathbf{A}' sont des lignes de \mathbf{A} , la matrice \mathbf{A} est de rang au moins égal à s . Cela montre que le rang de \mathbf{A} est au moins égal à l'ordre de la plus grande sous-matrice inversible, et achève la démonstration. □

En résumé, l'ensemble des quantités suivantes sont égales et porte le nom de $\text{rang}(\mathbf{A})$

1. le nombre de pivots de la forme de Gauss-Jordan de \mathbf{A} ;
2. le nombre de lignes non nulles de la forme de Gauss-Jordan de \mathbf{A} ;
3. $\dim(\mathcal{C}(\mathbf{A}))$;
4. $\dim(\mathcal{L}(\mathbf{A}))$;
5. le nombre de lignes linéairement indépendantes de \mathbf{A} ;
6. le nombre de colonnes linéairement indépendantes de \mathbf{A} ;
7. l'ordre de la plus grande sous-matrice (carrée) inversible de \mathbf{A} .

3.6.3 Solutions d'un système d'équations linéaires

Dans la Section 2.3, on a détaillé comment résoudre un système d'équations linéaires. Le but de la présente section est de

- prouver que l'ensemble des solutions d'un système homogène d'équations linéaires en n indéterminées est un sous-espace vectoriel de K^n ;
- montrer comment déterminer une base de ce sous-espace (et donc sa dimension) ;
- caractériser l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires non-homogène.

Cas homogène

Soit un système d'équations linéaires homogènes

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

avec $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ la matrice des coefficients du système.

Pour rappel, l'ensemble des solutions est défini comme

$$V = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in K^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, m \right. \right\}.$$

Proposition 3.20

L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogène en n inconnues est un sous-espace vectoriel de K^n .

Démonstration : Soit $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, la matrice des coefficients du système d'équations. En notation matricielle, un système de m équations linéaires homogènes à n inconnues sur le corps K s'écrit sous la forme $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Par conséquent, le sous-ensemble V de K^n qui contient toutes les solutions du système considéré est l'espace annulateur de la matrice \mathbf{A} qui est un sous-espace vectoriel de K^n . On peut donc écrire

$$V = \{\mathbf{x} \in K^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \mathcal{N}(\mathbf{A}).$$

□

On revient sur le cas non trivial $r < m$ où $r = \text{rang}(\mathbf{A})$. En reprenant le développement de la Section 2.3 et plus précisément Eq. (2.3), les solutions ont la forme

$$V = \left\{ \left(- \sum_{j=r+1}^n R_{1j}x_j - \sum_{j=r+1}^n R_{2j}x_j, \dots, - \sum_{j=r+1}^n R_{rj}x_j, x_{r+1}, \dots, x_n \right) \left| x_{r+1}, \dots, x_n \in K \right. \right\}$$

où \mathbf{R} est la matrice réduite sous forme de Gauss-Jordan de \mathbf{A} .

On considère les solutions particulières suivantes obtenues en donnant à l'une des variables libres x_{r+1}, \dots, x_n la valeur 1 et aux autres la valeur 0:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{r+1} &= (-R_{1,r+1}, -R_{2,r+1}, \dots, -R_{r,r+1}, 1, 0, \dots, 0) \\ \mathbf{s}_{r+2} &= (-R_{1,r+2}, -R_{2,r+2}, \dots, -R_{r,r+2}, 0, 1, \dots, 0) \\ &\vdots \\ \mathbf{s}_n &= (-R_{1n}, -R_{2n}, \dots, -R_{rn}, 0, 0, \dots, 1). \end{aligned}$$

On appelle $\mathbf{s}_{r+1}, \dots, \mathbf{s}_n$ les *solutions spéciales* du système d'équations linéaires.

On peut alors réécrire une solution dont les variables libres sont x_{r+1}, \dots, x_n à partir des solutions spéciales

$$\left(- \sum_{j=r+1}^n R_{1j}x_j - \sum_{j=r+1}^n R_{2j}x_j, \dots, - \sum_{j=r+1}^n R_{rj}x_j, x_{r+1}, \dots, x_n \right) = x_{r+1}\mathbf{s}_{r+1} + x_{r+2}\mathbf{s}_{r+2} + \dots + x_n\mathbf{s}_n.$$

Par conséquent, l'ensemble des solutions peut être réécrit comme

$$V = \left\{ \sum_{j=r+1}^n x_j \mathbf{s}_j \mid x_{r+1}, \dots, x_n \in K \right\} = \text{sev}\langle \mathbf{s}_{r+1}, \dots, \mathbf{s}_n \rangle.$$

Par ailleurs, pour $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n \in K$,

$$\alpha_{r+1}\mathbf{s}_{r+1} + \dots + \alpha_n\mathbf{s}_n = (*, \dots, *, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n),$$

donc le membre de gauche ne peut être nul que si $\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_n = 0$. Cela prouve que la suite $(\mathbf{s}_{r+1}, \dots, \mathbf{s}_n)$ est libre, c'est donc une base de V , et par conséquent

$$\dim(V) = n - r.$$

On a ainsi prouvé le résultat suivant.

Proposition 3.21 (*Solutions d'un système d'équations linéaires homogène*)

L'ensemble des solutions d'un système de m équations linéaires homogènes à n inconnues est un sous-espace vectoriel de K^n de dimension $n - r$ où r est le rang de la matrice des coefficients du système.

De la Proposition 3.21, on déduit le Corollaire suivant.

Corollaire 3.7

Soit $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, on a $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) + \dim(\mathcal{C}(\mathbf{A})) = n$.

Cas non-homogène

Considérons un système d'équations linéaires non-homogène de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (3.8)$$

avec $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ la matrice des coefficients et $\mathbf{b} \in K^m$ le vecteur de termes indépendants.

Pour rappel, l'ensemble des solutions est défini comme

$$V = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \text{ pour } i = 1, \dots, m \right\}.$$

Contrairement au cas homogène, l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires non-homogènes ($\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$) n'est pas un espace vectoriel.

Proposition 3.22 (*Solutions d'un système d'équations linéaires non homogène*)

Soit le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Supposons que le système admet une solution \mathbf{x}_p . L'ensemble des solutions de ce système est alors l'ensemble

$$V = \{\mathbf{x}_p\} + \mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h \mid \mathbf{x}_h \in \mathcal{N}(\mathbf{A})\}.$$

Démonstration : Pour tout $\mathbf{x}_h \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$, on a $\mathbf{A}(\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h) = \mathbf{Ax}_p + \mathbf{Ax}_h = \mathbf{b} + \mathbf{0}$.

Inversement, si \mathbf{s} est une solution de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, alors

$$\mathbf{A}(\mathbf{s} - \mathbf{x}_p) = \mathbf{As} - \mathbf{Ax}_p = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

donc $\mathbf{s} - \mathbf{x}_p \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ et $\mathbf{s} = \mathbf{x}_p + (\mathbf{s} - \mathbf{x}_p)$. □

Ce système possède au moins une solution si il existe $\mathbf{x} \in K^n$ tel que

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{:,i}x_i,$$

ce qui revient exactement à exprimer \mathbf{b} comme une combinaison linéaire des colonnes de \mathbf{A}

$$\mathbf{b} \in \text{sev}\langle \mathbf{A}_{:,1}, \dots, \mathbf{A}_{:,n} \rangle = \mathcal{C}(\mathbf{A}).$$

Ce système possède donc au moins une solution si $\mathbf{b} \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$. On a donc les équivalences suivantes

1. le système $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet (au moins) une solution ;
2. $\mathbf{b} \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$;
3. $\mathcal{C}((\mathbf{A} \mid \mathbf{b})) = \mathcal{C}(\mathbf{A})$;
4. $\dim(\mathcal{C}((\mathbf{A} \mid \mathbf{b}))) = \dim(\mathcal{C}(\mathbf{A}))$;
5. $\text{rang}((\mathbf{A} \mid \mathbf{b})) = \text{rang}(\mathbf{A})$.

Exemple 3.7. Reprenons le système de l'Exemple 2.1:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

dont la matrice complète $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ échelonnée sous forme de Gauss-Jordan est

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Le système admet au moins une solution comme $\text{rang}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = 2 = \text{rang}(\mathbf{A})$. Les variables pivots sont x_1, x_2 et les variables libres sont x_3, x_4 .

- Une fois le système réécrit sous forme de Gauss-Jordan, les solutions spéciales s'obtiennent en mettant successivement une variable libre à 1 et les autres à 0, et en résolvant le système **homogène** associé.

Les solutions spéciales sont $\mathbf{s}_1 = (-1, -1, \mathbf{1}, \mathbf{0})^\top$ et $\mathbf{s}_2 = (2, -2, \mathbf{0}, \mathbf{1})^\top$. Elles forment une base de l'ensemble des solutions du système homogène associé: $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \text{sev}\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle$.

- Une fois le système réécrit sous forme de Gauss-Jordan, une solution particulière du système **non-homogène** s'obtient en donnant n'importe quelle valeur aux variables libres. Par facilité, on leur donne la valeur 0. Une solution particulière du système non-homogène est $\mathbf{x}_p = (4, -1, \mathbf{0}, \mathbf{0})^\top$.

L'ensemble des solutions du système non-homogène est

$$V = \{\mathbf{x}_p\} + \text{sev}\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle = \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle + \text{sev}\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 4 - a + 2b \\ -1 - a - 2b \\ a \\ b \end{pmatrix}, \forall a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

On obtient bien le même ensemble de solutions que dans l'Exemple 2.1.

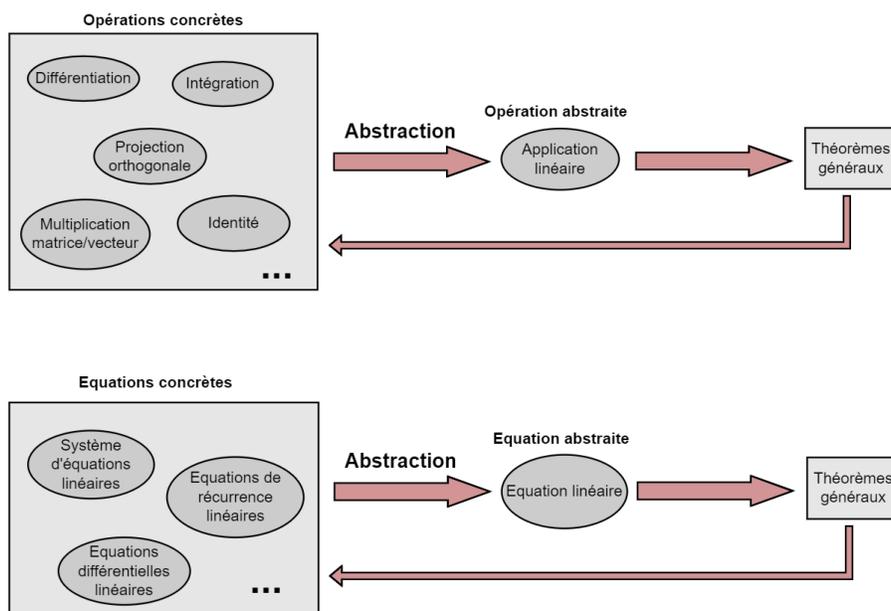
Chapitre 4

Applications linéaires

Dans le chapitre précédent, nous avons abstrait des objets mathématiques concrets (matrices, fonctions, polynômes, suites, ...) partageant des propriétés communes (stabilité linéaire) en un objet abstrait (espace vectoriel). Dans ce chapitre, nous allons cette fois abstraire des opérations mathématiques concrètes (différentiation, intégration, identité, ...) partageant des propriétés communes (linéarité) en une opération abstraite (application linéaire).

Après avoir étudié les propriétés d'ensembles particuliers que sont les espaces vectoriels, on va maintenant étudier des transformations qui associent à tout vecteur d'un espace vectoriel E un vecteur d'un autre espace vectoriel F . Dans ce cours, on va s'intéresser à une classe très particulière de ces fonctions: les *applications linéaires*. Comme nous le verrons, les matrices sont des représentations canoniques des applications linéaires entre des espaces vectoriels de dimension finie.

A travers ce chapitre, on verra que de nombreux résultats démontrés précédemment à propos des systèmes d'équations linéaires s'avèreront être un cas particulier d'une notion beaucoup plus générale: les *équations linéaires*.



Nous verrons comment les applications linéaires peuvent être représentées à l'aide de matrices, ainsi que comment trouver la matrice d'une application linéaire dans différentes bases. Enfin, nous examinerons les changements de base, qui sont des applications linéaires qui permettent de passer d'une représentation d'un vecteur dans une base à une autre représentation dans une autre base. Nous verrons comment trouver la matrice de changement de base, ainsi que comment utiliser cette matrice pour effectuer des transformations dans différentes bases.

4.1 Notions fondamentales

Définition 4.1 (Application linéaire)

Une *application linéaire* est une fonction $L : E \rightarrow F$ entre espaces vectoriels sur un même corps commutatif K telle que

1. $\forall x, y \in E: L(x + y) = L(x) + L(y)$;
2. $\forall \alpha \in K, \forall x \in E: L(\alpha x) = \alpha L(x)$.

De manière équivalente, l'application L est linéaire si

$$\forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in E : L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y).$$

En conséquence de cette définition ($\alpha = 0$), toute application linéaire $L : E \rightarrow F$ vérifie

$$L(0_E) = 0_F,$$

où 0_E et 0_F dénotent respectivement le vecteur nul de E et le vecteur nul de F . C'est une condition nécessaire de linéarité importante car elle peut servir pour prouver facilement qu'une application n'est pas linéaire dans la mesure où elle n'est pas vérifiée.

Une terminologie particulière s'attache à certains types d'applications linéaires:

1. un *endomorphisme* est une application linéaire $L : E \rightarrow E$, i.e. $F = E$ (aussi appelées *opérateurs linéaires sur E*);
2. un *isomorphisme* est une application linéaire bijective.

Certaines opérations telle que la combinaison linéaire et la composition préservent la linéarité des applications linéaires.

Proposition 4.1

1. L'ensemble E des applications linéaires de V vers W , où V et W sont deux espaces vectoriels, est un espace vectoriel. Autrement dit, la combinaison linéaire de deux applications linéaires de V vers W est une application linéaire de V vers W .
2. La composée de deux applications linéaires est linéaire.

Démonstration :

1. Pour prouver que E est un espace vectoriel, il faut démontrer que

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in K, \forall L_1, L_2 \in E : \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 \in E.$$

Pour cela, on doit montrer que

- (a) $\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 : V \rightarrow W$;
- (b) $\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2$ est une application linéaire.

Prouvons ces deux points:

- (a) $\forall v \in V : (\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2)(v) = \alpha_1 L_1(v) + \alpha_2 L_2(v) \in W$ car $L_1(v), L_2(v) \in W$ et W est un espace vectoriel. On a donc $\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 : V \rightarrow W$.
- (b) $\forall \beta_1, \beta_2 \in K$ et $\forall v_1, v_2 \in V$:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2)(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) &= \alpha_1 L_1(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) + \alpha_2 L_2(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) \\ &= \alpha_1(\beta_1 L_1(v_1) + \beta_2 L_1(v_2)) + \alpha_2(\beta_1 L_2(v_1) + \beta_2 L_2(v_2)) \\ &= \beta_1(\alpha_1 L_1(v_1) + \alpha_2 L_2(v_1)) + \beta_2(\alpha_1 L_1(v_2) + \alpha_2 L_2(v_2)) \\ &= \beta_1(\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2)(v_1) + \beta_2(\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2)(v_2) \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que L_1 et L_2 sont des applications linéaires.

2. Soit E, F, G , des espaces vectoriels définis sur un même corps K . Soit $L_1 : E \rightarrow F$ et $L_2 : F \rightarrow G$, des applications linéaires.

On a $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in E$:

$$\begin{aligned}(L_2 \circ L_1)(\alpha x + \beta y) &= L_2(L_1(\alpha x + \beta y)) \\ &= L_2(\alpha L_1(x) + \beta L_1(y)) \\ &= \alpha L_2(L_1(x)) + \beta L_2(L_1(y)) \\ &= \alpha(L_2 \circ L_1)(x) + \beta(L_2 \circ L_1)(y).\end{aligned}$$

□

Exemple 4.1. Voici plusieurs exemples d'applications linéaires.

1. Toute matrice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ définit une application linéaire

$$L : K^n \rightarrow K^m : L(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

On vérifie en effet que $\forall \alpha, \beta \in K, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K^n$:

$$L(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \mathbf{A}(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha \mathbf{A}\mathbf{x} + \beta \mathbf{A}\mathbf{y} = \alpha L(\mathbf{x}) + \beta L(\mathbf{y}).$$

2. La dérivation $D : \mathcal{C}^i((a, b), \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^{i-1}((a, b), \mathbb{R})$ est une application linéaire.
3. L'application $L : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x] : p \rightarrow L(p) = p + (1-x)p'$ où p' dénote la dérivée du polynôme p est une application linéaire.

On vérifie en effet que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall p_1, p_2 \in \mathbb{R}_3[x]$:

$$\begin{aligned}L(\alpha p + \beta q) &= \alpha p + \beta q + (1-x)(\alpha p' + \beta q') \\ &= \alpha(p + (1-x)p') + \beta(q + (1-x)q') \\ &= \alpha L(p) + \beta L(q).\end{aligned}$$

Avec le premier exemple ci-dessus, on a montré que toute matrice \mathbf{A} définit une application linéaire de la forme $L(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Inversement, on peut démontrer que toutes les applications linéaires de K^n vers K^m sont de la forme $L(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ pour une certaine matrice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

Proposition 4.2

Toute application linéaire $L : K^n \rightarrow K^m$ est de la forme $L(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ pour une certaine matrice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

Démonstration : À toute application linéaire $L : K^n \rightarrow K^m$, on associe la matrice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ dont les colonnes sont les images des vecteurs de la base canonique de K^n :

$$\mathbf{A} = (L(\mathbf{e}_1), \dots, L(\mathbf{e}_n)) \in K^{m \times n}$$

avec $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{\uparrow} 1, 0, \dots, 0)^\top$. Pour tout $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$, on a

$$L(\mathbf{x}) = L(x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n) = x_1 L(\mathbf{e}_1) + \dots + x_n L(\mathbf{e}_n) = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

□

Exemple 4.2. L'application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = (x_1, x_2) \rightarrow L(\mathbf{x}) = (3x_1 + x_2, x_2, 2x_1 - x_2)$ peut être réécrite comme

$$L(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Voici quelques exemples d'applications linéaires injectives/surjectives/bijectives (voir Définition 0.15).

Exemple 4.3. (Injectivité, surjectivité et bijectivité des applications linéaires)

1. L'application linéaire $L_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = (x_1, x_2) \rightarrow L_1(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, 0)$
 - est injective car deux vecteurs distincts de \mathbb{R}^2 ont toujours des images différentes ;
 - n'est pas surjective car par exemple le vecteur $(1, 2, 1)$ n'est l'image par l'application de aucun vecteur de \mathbb{R}^2 ;
 - n'est pas bijective car elle n'est pas surjective.
2. L'application linéaire $L_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \rightarrow L_2(\mathbf{x}) = (x_1, x_2)$
 - n'est pas injective car plusieurs vecteurs ont la même image, par exemple les vecteurs $(1, 2, 3)$ et $(1, 2, 4)$ ont la même image: $(1, 2)$;
 - est surjective car tout vecteur de \mathbb{R}^2 est l'image de au moins un vecteur de \mathbb{R}^3 ;
 - n'est pas bijective car elle n'est pas injective.
3. L'application linéaire $L_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \rightarrow L_3(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, x_3)$
 - est injective car deux vecteurs distincts de \mathbb{R}^3 ont toujours des images différentes ;
 - est surjective car tout vecteur de \mathbb{R}^3 est l'image d'un vecteur de \mathbb{R}^3 (en l'occurrence, le même vecteur) ;
 - est bijective car elle est injective et surjective.

4.2 Noyau et image

Définition 4.2 (Noyau et image)

À toute application linéaire $L : E \rightarrow F$, on associe deux ensembles particuliers

1. le *noyau* de L , défini par

$$\text{Ker}(L) = \{x \in E \mid L(x) = 0\};$$

2. l'*image* de L , défini par

$$\text{Im}(L) = \{L(x) \mid x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E \text{ tel que } y = L(x)\}.$$

Proposition 4.3

Soit une application linéaire $L : E \rightarrow F$, les ensembles $\text{Ker}(L)$ et $\text{Im}(L)$ sont des sous-espaces vectoriels de E et F respectivement.

Démonstration : On a par définition $\text{Ker}(L) \subset E$ et $\text{Im}(L) \subset F$, il reste donc à démontrer leur stabilité sous combinaison linéaire.

1. $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in K, \forall x_1, x_2 \in \text{Ker}(L)$, on a

$$L(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 L(x_1) + \alpha_2 L(x_2) = \alpha_1 0 + \alpha_2 0 = 0$$

et donc $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in \text{Ker}(L)$.

2. Soient $y_1, y_2 \in \text{Im}(L)$, par définition de $\text{Im}(L)$, il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $y_1 = L(x_1)$ et $y_2 = L(x_2)$. Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in K$, on a

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 L(x_1) + \alpha_2 L(x_2) = L(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2).$$

Comme E est un espace vectoriel, on a $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in E$ et on conclut que $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in \text{Im}(L)$.

□

Exemple 4.4. (Noyau et image)

1. Considérons le cas particulier des applications linéaires $L : K^n \rightarrow K^m$, par la Proposition 4.2, il existe une matrice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ tel que $L(x) = \mathbf{A}x$. On a

$$\text{Ker}(L) = \mathcal{N}(\mathbf{A}) \quad \text{et} \quad \text{Im}(L) = \mathcal{C}(\mathbf{A}).$$

2. Soient $E = \mathbb{R}_3[x]$ et l'application linéaire $L : E \rightarrow E : p \rightarrow L(p) = p + (1-x)p'$.

— $\text{Ker}(L)$:

Soit $p \in E$, un élément générique de E : $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, avec $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. On cherche $p \in E$ tel que $L(p) = \mathbf{0}$ où $\mathbf{0}$ dénote ici le polynôme nul (i.e. la fonction: $\mathbf{0}(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} L(p) &= (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) + (1-x)(3a_3x^2 + 2a_2x + a_1) \\ &= -2a_3x^3 + (3a_3 - a_2)x^2 + 2a_2x + (a_0 + a_1) \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Par identification, on obtient le système d'équations linéaires:

$$\begin{cases} 0 = -2a_3 \\ 0 = 3a_3 - a_2 \\ 0 = 2a_2 \\ 0 = a_0 + a_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = -a_1 \\ a_1 = a_1 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

Par conséquent, on a $p \in \text{Ker}(L) \Leftrightarrow p(x) = c(x-1)$ avec $c \in \mathbb{R}$. On a donc

$$\text{Ker}(L) = \text{sev}\langle x-1 \rangle, \quad \dim(\text{Ker}(L)) = 1.$$

— $\text{Im}(L)$:

Soit $p \in E$, un élément générique de E : $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, avec $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} L(p) &= (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) + (1-x)(3a_3x^2 + 2a_2x + a_1) \\ &= a_3(-2x^3 + 3x^2) + a_2(-x^2 + 2x) + a_1(1) + a_0(1) \end{aligned}$$

Par conséquent, on a:

$$\text{Im}(L) = \text{sev}\langle (-2x^3 + 3x^2), (-x^2 + 2x), 1 \rangle, \quad \dim(\text{Im}(L)) = 3.$$

Ces vecteurs sont linéairement indépendants car il s'agit de polynômes de degré différent.

Les notions de noyaux et d'images nous permettent de déterminer plus facilement l'injectivité et la surjectivité des applications linéaires.

Proposition 4.4

Une application linéaire $L : E \rightarrow F$ est

1. injective $\Leftrightarrow \text{Ker}(L) = \{0\} \Leftrightarrow \dim(\text{Ker}(L)) = 0$;
2. surjective $\Leftrightarrow \text{Im}(L) = F \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(L)) = \dim(F)$.

Démonstration :

1. Si L est injective, alors seul le vecteur nul de E peut être envoyé sur le vecteur nul de F , donc $\text{Ker}(L) = \{0\}$. Réciproquement, supposons que $\text{Ker}(L) = \{0\}$ et que $x_1, x_2 \in E$ ont la même image dans F

$$L(x_1) = L(x_2).$$

Alors $L(x_1 - x_2) = L(x_1) - L(x_2) = 0$, donc $x_1 - x_2 \in \text{Ker}(L)$. Comme $\text{Ker}(L) = \{0\}$, cela implique que $x_1 - x_2 = 0$, donc $x_1 = x_2$.

2. Résulte directement des définitions.

□

Exemple 4.5. (Injectivité, surjectivité et bijectivité des applications linéaires)

On reprend les fonctions de l'Exemple 4.3.

1. L'application linéaire $L_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = (x_1, x_2) \rightarrow L_1(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, 0)$
 - est injective car $\text{Ker}(L_1) = \{(0, 0)\}$ (le noyau ne contient que le vecteur nul de \mathbb{R}^2);
 - n'est pas surjective car $\text{Im}(L_1) = \{(a, b, 0) \mid \forall a, b \in \mathbb{R}\} \neq \mathbb{R}^3$;
 - n'est pas bijective car elle n'est pas surjective.
2. L'application linéaire $L_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \rightarrow L_2(\mathbf{x}) = (x_1, x_2)$
 - n'est pas injective car $\text{Ker}(L_2) = \{(0, 0, a) \mid \forall a \in \mathbb{R}\} = \text{sev}((0, 0, 1)) \neq \{(0, 0, 0)\}$;
 - est surjective car $\text{Im}(L_2) = \mathbb{R}^2$;
 - n'est pas bijective car elle n'est pas injective.
3. L'application linéaire $L_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \rightarrow L_3(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, x_3)$
 - est injective car $\text{Ker}(L_3) = \{(0, 0, 0)\}$;
 - est surjective car $\text{Im}(L_3) = \mathbb{R}^3$;
 - est bijective car elle est injective et surjective.
4. L'application $L : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x] : p \rightarrow L(p) = p + (1-x)p'$ de l'Exemple 4.4
 - n'est pas injective car $\dim(\text{Ker}(L)) = 1 \neq 0$;
 - n'est pas surjective car $\dim(\text{Im}(L)) = 3 \neq 4 = \dim(\mathbb{R}^3)$;
 - n'est pas bijective car elle est ni injective, ni surjective.

4.3 Équation linéaire

La notion suivante est étroitement liée à celle d'application linéaire.

— Définition 4.3 (Équation linéaire) —

Une *équation linéaire* est une équation de la forme

$$L(x) = b$$

où $L : E \rightarrow F$ est une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F , et $b \in F$. Résoudre cette équation consiste à trouver tous les vecteurs $x \in E$ qui sont envoyés sur b par L . On parle d'équation linéaire *homogène* et *non-homogène* respectivement quand $b = 0$ et $b \neq 0$.

Une telle équation satisfait le *principe de superposition des solutions*.

— Proposition 4.5 (Principe de superposition des solutions) —

Soit $L : E \rightarrow F$, une application linéaire et les deux équations linéaires de la forme

$$L(x) = b_1 \quad (1) \quad \text{et} \quad L(x) = b_2 \quad (2)$$

avec $b_1, b_2 \in F$. Si $x_1, x_2 \in E$ sont solutions de (1) et (2) respectivement, alors pour $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ le vecteur $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in E$ est solution de l'équation linéaire

$$L(x) = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2.$$

Démonstration : Découle directement du fait que L est linéaire.

□

Le noyau et l'image ont une interprétation naturelle en termes d'équations linéaires: en effet, $\text{Ker}(L)$ est l'ensemble des solutions de l'équation linéaire homogène $L(x) = 0$, tandis que $\text{Im}(L)$ est l'ensemble des

seconds membres $b \in F$ pour lesquels l'équation $L(x) = b$ admet une solution. En particulier, l'équation $L(x) = b$ admet une solution si et seulement si $b \in \text{Im}(L)$. La structure de l'ensemble des solutions est alors donnée par la proposition suivante.

Proposition 4.6 (*Solutions d'une équation linéaire*)

Soit $L : E \rightarrow F$ une application linéaire et $b \in F$. Supposons que l'équation linéaire $L(x) = b$ admette $u \in E$ comme solution. L'ensemble des solutions de cette équation est alors l'ensemble

$$u + \text{Ker}(L) = \{u + v \mid v \in \text{Ker}(L)\}.$$

Démonstration : Pour tout $v \in \text{Ker}(L)$, on a $L(u + v) = L(u) + L(v) = b + 0$, donc tout élément de $u + \text{Ker}(L)$ est solution de $L(x) = b$.

Inversement, si s est solution de $L(x) = b$, alors

$$L(s) = b = L(u),$$

donc $L(s - u) = 0$ et $s - u \in \text{Ker}(L)$. Enfin, $s = u + (s - u) \in u + \text{Ker}(L)$. □

Étant donné une solution particulière $u \in E$ de l'équation $L(x) = b$, on obtient donc la solution générale de cette équation sous la forme

$$u + \alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_n t_n,$$

où (t_1, \dots, t_n) est une base de $\text{Ker}(L)$ (supposé de dimension finie) et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des scalaires arbitraires.

En particulier, si L est injective, alors toute équation $L(x) = b$ admet au plus une solution. Elle en admet exactement une lorsque $b \in \text{Im}(L)$, elle n'en admet pas si $b \notin \text{Im}(L)$.

Exemple 4.6. *Considérons le cas particulier des applications linéaires $L : K^n \rightarrow K^m$, par la Proposition 4.2, il existe une matrice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ tel que $L(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Alors l'équation linéaire*

$$L(x) = b \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Par conséquent, les systèmes d'équations linéaires décrits dans le Chapitre 2 sont un cas particulier d'équations linéaires lorsque l'on considère les applications linéaires $L : K^n \rightarrow K^m$. Et la Proposition 4.6 se réduit alors à la Proposition 3.22.

4.4 Rang et nullité

Définition 4.4 (*Rang et nullité d'une application linéaire*)

Le *rang* d'une application linéaire $L : E \rightarrow F$ est la dimension de l'image de L :

$$\text{rang}(L) = \dim(\text{Im}(L)).$$

La *nullité* de L est la dimension du noyau de L :

$$\text{null}(L) = \dim(\text{Ker}(L)).$$

Théorème 4.1 (*Théorème du rang*)

Soit $L : E \rightarrow F$, une application linéaire. On a

$$\text{rang}(L) + \text{null}(L) = \dim(E).$$

Démonstration : Soit (e_1, \dots, e_m) une base de $\text{Ker}(L)$, que l'on prolonge en base de E , soit (e_1, \dots, e_n) . On a donc $\text{null}(L) = m$ et $\dim(E) = n$. Pour établir le théorème, on va prouver que $(L(e_{m+1}), \dots, L(e_n))$ est une base de $\text{Im}(L)$. Il en résultera: $\text{rang}(L) = n - m = \dim(E) - \text{null}(L)$, comme annoncé.

Montrons que la suite $(L(e_{m+1}), \dots, L(e_n))$

- est une suite génératrice de $\text{Im}(L)$. Comme cette famille est constituée d'éléments de $\text{Im}(L)$, il suffit de prouver que tout vecteur de $\text{Im}(L)$ en est une combinaison linéaire. Soit $y \in \text{Im}(L)$, on a donc $y = L(x)$ pour un certain vecteur $x \in E$. Exprimons x comme combinaison linéaire de la base de E ci-dessus

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

En appliquant L aux deux membres de cette égalité, et en tenant compte que

$$L(e_1) = \dots = L(e_m) = 0$$

puisque e_1, \dots, e_m sont dans le noyau de L , on obtient

$$y = L(x) = \alpha_{m+1} L(e_{m+1}) + \dots + \alpha_n L(e_n).$$

- Ce qui montre que tout vecteur de $\text{Im}(L)$ est bien combinaison linéaire de la suite $(L(e_{m+1}), \dots, L(e_n))$.
- est une suite libre. Soit

$$\beta_{m+1} L(e_{m+1}) + \dots + \beta_n L(e_n) = 0$$

pour $\beta_{m+1}, \dots, \beta_n \in K$. Il s'agit de prouver que tous les coefficients β_i sont nuls. Vu la linéarité de L , la relation ci-dessus peut aussi s'écrire

$$L(\beta_{m+1} e_{m+1} + \dots + \beta_n e_n) = 0.$$

Par conséquent, $\beta_{m+1} e_{m+1} + \dots + \beta_n e_n \in \text{Ker}(L)$. On peut donc exprimer ce vecteur comme combinaison linéaire de la base (e_1, \dots, e_m) de $\text{Ker}(L)$

$$\beta_{m+1} e_{m+1} + \dots + \beta_n e_n = \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_m e_m$$

pour certains scalaires $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in K$. En rassemblant tous les termes dans un membre, on trouve

$$(-\gamma_1) e_1 + \dots + (-\gamma_m) e_m + \beta_{m+1} e_{m+1} + \dots + \beta_n e_n = 0.$$

Comme (e_1, \dots, e_n) est une suite libre (c'est même une base de E), on tire de la relation précédente

$$\gamma_1 = \dots = \gamma_m = \beta_{m+1} = \dots = \beta_n = 0.$$

□

On vérifie en effet pour l'application $L : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x] : p \rightarrow L(p) = p + (1-x)p'$ de l'Exemple 4.4 que

$$\text{null}(L) + \text{rang}(L) = \dim(\text{Ker}(L)) + \dim(\text{Im}(L)) = 1 + 3 = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[x]).$$

Notons qu'en appliquant le Théorème 4.1 aux applications linéaires de $K^n \rightarrow K^m$, on obtient le Corollaire 3.7.

4.5 Construction d'applications linéaires

Une application linéaire $L : E \rightarrow F$ est complètement identifiée par l'image par L des vecteurs d'une base de E . En effet, si on connaît l'image de chaque vecteur de la base de $E : e = (e_1, \dots, e_n)$, alors on connaît l'image de tout vecteur de E :

$$x \in E : L(x) = \sum_{i=1}^n x_i L(e_i) \text{ où } x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

4.5.1 Principe de construction

— **Théorème 4.2** (*Propriété universelle de la base*) —

Soit E, F deux espaces vectoriels, e_1, \dots, e_n une base de E et v_1, \dots, v_n des vecteurs arbitraires de F . Il existe une et une seule application linéaire

$$L : E \rightarrow F$$

telle que $L(e_i) = v_i$ pour $i = 1, \dots, n$.

Cette application satisfait

$$\text{Im}(L) = \text{sev}\langle v_1, \dots, v_n \rangle$$

$$\text{Ker}(L) = \{x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \mid x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0\}.$$

De plus, l'application L est

- injective si et seulement si (v_1, \dots, v_n) est une suite libre ;
- surjective si et seulement si (v_1, \dots, v_n) est une suite génératrice de F ;
- bijective si et seulement si la suite (v_1, \dots, v_n) est une base de F .

Démonstration :

1. (*Existence de L*) Tout $x \in E$ s'écrit d'une et d'une seule manière comme combinaison linéaire de la base (e_1, \dots, e_n) , soit

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

On définit une application $L : E \rightarrow F$ en posant

$$L(x) = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n.$$

Il est clair que pour l'application L ainsi définie, on a bien: $L(e_i) = v_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Il suffit donc de prouver que L est linéaire. Soient

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \quad \text{et} \quad y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$$

des vecteurs de E . On a alors, par définition de L ,

$$L(x) = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \quad \text{et} \quad L(y) = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n.$$

Pour $\alpha, \beta \in K$,

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1) e_1 + \dots + (\alpha x_n + \beta y_n) e_n$$

et

$$\begin{aligned} L(\alpha x + \beta y) &= (\alpha x_1 + \beta y_1) v_1 + \dots + (\alpha x_n + \beta y_n) v_n \\ &= \alpha(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) + \beta(y_1 v_1 + \dots + y_n v_n) \\ &= \alpha L(x) + \beta L(y). \end{aligned}$$

Les descriptions de $\text{Im}(L)$ et de $\text{Ker}(L)$ résultent directement de la définition de L .

2. (*Unicité de L*) Si $B : E \rightarrow F$ est une application linéaire telle que $B(e_i) = v_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Alors pour tout $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in E$, on a

$$B(x) = x_1 B(e_1) + \dots + x_n B(e_n) = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = L(x).$$

3. (*Injectivité de L*) D'après la description de $\text{Ker}(L)$, on voit tout de suite que si la suite (v_1, \dots, v_n) est libre, alors L est injective. En effet, on a alors la relation $x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0$ entraîne $x_1 = \dots = x_n = 0$ et donc $\text{Ker}(L) = \{0\}$. Par la Proposition 4.4, on a que L est injective.

Inversement (par contradiction), si la suite (v_1, \dots, v_n) n'est pas libre, soit

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0,$$

avec les scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ n'étant pas tous nuls. Alors $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ est un vecteur non nul du noyau de L , donc L n'est pas injective.

4. (*Surjectivité de L*) Comme $\text{Im}(L) = \text{sev}\langle v_1, \dots, v_n \rangle$, on a $\text{Im}(L) = F$ si et seulement si (v_1, \dots, v_n) est une suite génératrice de F . □

4.5.2 Inversibilité des applications linéaires

On peut généraliser la définition d'inversibilité à gauche et à droite vue pour les matrices (Section 1.3) au cas général des applications linéaires.

Définition 4.5 (*Inversibilité d'une application linéaire*)

Une application linéaire $L : E \rightarrow F$ est dite

1. *inversible à gauche* si il existe une application linéaire $B : F \rightarrow E$ telle que $B \circ L = I_E$.
2. *inversible à droite* si il existe une application linéaire $B : F \rightarrow E$ telle que $L \circ B = I_F$.
3. *inversible* si elle est inversible à gauche et à droite.

Exemple 4.7. *Voici quelques exemples.*

1. Soit l'application linéaire:

$$L : K^2 \rightarrow K_2[x] : (a, b) \rightarrow L(a, b) = ax^2 + bx.$$

L'application linéaire $B : K_2[x] \rightarrow K^2 : p(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow B(p(x)) = (a, b)$ est un inverse à gauche de L . En effet, on a

$$(B \circ L)(a, b) = B(ax^2 + bx) = (a, b) = I(a, b).$$

2. Soit l'application linéaire: $L : K^3 \rightarrow K^2 : (x, y, z) \rightarrow L(x, y, z) = (x, y)$. L'application linéaire $B : K^2 \rightarrow K^3 : (x, y) \rightarrow B(x, y) = (x, y, \lambda)$ avec $\lambda \in K$, est telle que

$$(L \circ B)(x, y) = L(x, y, \lambda) = (x, y) = I(x, y),$$

ce qui prouve que B est un inverse à droite de L . De plus, chaque valeur de λ définit un inverse à droite. Donc de manière générale, un inverse à droite peut ne pas être unique.

Remarquez le lien entre les matrices **A** et **B** de l'Exemple 1.10 et les applications linéaires L et B .

Proposition 4.7

Si une application linéaire est inversible à gauche **et** à droite (c'est-à-dire si elle est inversible), alors elle admet un unique inverse à gauche, qui est aussi l'unique inverse à droite.

Démonstration : Soit $L : E \rightarrow F$ une application linéaire inversible à la fois à gauche et à droite. Supposons que $B : F \rightarrow E$ soit un inverse à gauche et que $C : F \rightarrow E$ soit un inverse à droite de L , de sorte que

$$B \circ L = I_E \quad \text{et} \quad L \circ C = I_F.$$

Il s'agit de prouver: $B(x) = C(x) \forall x \in E$. On considère pour cela la composition $B \circ L \circ C$. D'après l'ordre des opérations que l'on effectue, on a:

$$\begin{aligned} B \circ L \circ C &= B \circ (L \circ C) = B \circ I_F = B \\ B \circ L \circ C &= (B \circ L) \circ C = I_E \circ C = C \end{aligned}$$

donc $B = C$. De plus, tout inverse à gauche de L est égal à C et tout inverse à droite de L est égal à B , il y a donc un seul inverse à gauche, qui est aussi l'unique inverse à droite. \square

Ainsi, la Proposition 1.3 est un cas particulier de la Proposition 4.7 dans le cas des applications linéaires du type $L : K^n \rightarrow K^m$.

Si une application linéaire L est inversible, alors on désigne par L^{-1} son unique inverse.

Proposition 4.8

Une application linéaire L est

1. inversible à gauche $\Leftrightarrow L$ est injective ;
2. inversible à droite $\Leftrightarrow L$ est surjective ;
3. inversible $\Leftrightarrow L$ est bijective.

Démonstration : Pour la démonstration, nous supposons que les espaces de départ et d'arrivée sont de dimension finie, quoique l'énoncé soit vrai sans cette hypothèse.

Le principe de construction de la section précédente permet en particulier de construire des inverses à gauche ou à droite de certaines applications linéaires.

Soit $L : E \rightarrow F$ une application linéaire, soit (e_1, \dots, e_n) une base de E et soit $v_i = L(e_i)$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

1. Si L est inversible à gauche, soit B un inverse à gauche de L .
Soit $x, x' \in E$ tels que $L(x) = L(x')$, alors en appliquant B aux deux membres, on trouve

$$(B \circ L)(x) = (B \circ L)(x').$$

Comme $B \circ L = I_E$, on déduit $x = x'$ et donc L est injective.

Réciproquement, si L est injective, alors d'après le Théorème 4.2 la suite (v_1, \dots, v_n) est libre. Soit (v_1, \dots, v_m) ($m \geq n$) une base de F qui prolonge cette suite libre. Le Théorème 4.2 montre qu'il existe une application linéaire $B : F \rightarrow E$ telle que $B(v_i) = e_i$ pour $i = 1, \dots, n$ et $B(v_i) = 0$ pour $i = n + 1, \dots, m$. On a alors

$$(B \circ L)(e_i) = e_i = I_E(e_i) \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n.$$

Comme une application linéaire est déterminée de manière unique par les images des vecteurs d'une base, d'après le Théorème 4.2, on a donc $B \circ L = I_E$.

2. Si L est inversible à droite, soit B un inverse à droite de L . Pour tout $y \in F$, on peut trouver $x \in E$ tel que $L(x) = y$: il suffit en effet de choisir $x = B(y)$, car alors

$$L(x) = (L \circ B)(y) = I_F(y) = y,$$

cela montre que L est surjective.

Réciproquement, si L est surjective, alors le Théorème 4.2 montre que la suite (v_1, \dots, v_n) est génératrice. On peut donc en extraire une base de F . Pour la commodité des notations, supposons qu'une telle base est formée des premiers vecteurs de la suite, soit (v_1, \dots, v_m) (avec $m \leq n$). Le Théorème 4.2 montre qu'il existe une application linéaire $B : F \rightarrow E$ telle que $B(v_i) = e_i$ pour tout $i = 1, \dots, m$. On a alors

$$(L \circ B)(v_i) = v_i = I_F(v_i) \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, m.$$

d'où on conclut comme précédemment que $L \circ B = I_F$.

3. Trivial.

□

Remarquons que la construction des applications inverses à gauche ou à droite ci-dessus fait intervenir le choix d'une base de F qui prolonge ou qui est extraite de la suite (v_1, \dots, v_n) . Ce choix n'étant généralement pas unique, l'inverse à gauche ou à droite d'une application linéaire n'est pas unique, en général.

Corollaire 4.3

Soit $L : E \rightarrow F$ une application linéaire. On suppose $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = m$. Les conditions (1) à (4) sont équivalentes et, de même, les conditions (1') à (4') sont équivalentes

- | | |
|---------------------------------|----------------------------------|
| (1) L est injective | (1') L est surjective |
| (2) L est inversible à gauche | (2') L est inversible à droite |
| (3) $\text{null}(L) = 0$ | (3') $\text{null}(L) = n - m$ |
| (4) $\text{rang}(L) = n$ | (4') $\text{rang}(L) = m$ |

En particulier, si $n = m$, alors toutes les conditions ci-dessus sont équivalentes, et sont encore équivalentes à

- (i) L est bijective;
- (ii) L est inversible.

Démonstration : Par le Théorème 4.1, on a

$$\text{rang}(L) + \text{null}(L) = n,$$

ce qui établit l'équivalence de (3) et (4) d'une part et celle de (3') et (4') d'autre part.

D'après la Proposition 4.4, la condition (1) est équivalente à $\text{Ker}(L) = \{0\}$, et cette dernière condition est équivalente à (3). De même, la condition (1') est équivalente à $\text{Im}(L) = F$. Cette dernière condition est encore équivalente à $\text{rang}(L) = \dim(F)$, c'est-à-dire à (4'), par la propriété 4 de Proposition 3.10.

Enfin, la Proposition 4.8 établit l'équivalence entre (1) et (2) d'une part et (1') et (2') d'autre part. □

Ainsi, seules les applications linéaires reliant deux espaces de *même dimension* peuvent être inversibles. Par ailleurs, pour ces applications, l'inversibilité à gauche est équivalente à l'inversibilité à droite (et donc aussi à l'inversibilité de manière générale).

Il s'agit de la généralisation des résultats du Corollaire 3.5 et du Théorème 1.6 obtenu dans le cas particulier des applications linéaires du type $L(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$. La condition " $\dim(E) = \dim(F)$ " est équivalente, dans ce cas à " \mathbf{A} est une matrice carrée".

4.6 Représentation matricielle des applications linéaires

Comme on l'a vu, toute matrice peut être décrite comme une application linéaire et de ce fait, de nombreux résultats concernant les matrices se retrouvent être un cas particulier de ceux dérivés sur la notion abstraite d'application linéaire. Mais comme on va le voir dans cette section, le lien entre les matrices et les applications linéaires est encore bien plus étroit: inversement, toute application linéaire peut être décrite par une matrice.

4.6.1 Isomorphisme entre un espace vectoriel de dimension n et K^n

Soit une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ d'un espace vectoriel E . Par la Proposition 3.8, tout vecteur de E se décompose de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base. Par conséquent, à tout vecteur $x \in E$, on peut associer un unique vecteur noté ${}_e\mathbf{x} \in K^n$ qui est le vecteur constitué des coordonnées de x

dans la base e

$${}_e \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

avec $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Cette transformation peut être modélisée par une application linéaire

$$I_e : E \rightarrow K^n : x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

L'assertion inverse est également vraie: à tout vecteur $\mathbf{y} \in K^n$, on peut associer un unique vecteur $x \in E$: $x = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$. Cette transformation peut être modélisée par l'application linéaire inverse de I_e

$$I_e^{-1} : K^n \rightarrow E : \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \rightarrow y_1 e_1 + \dots + y_n e_n.$$

Par conséquent l'application linéaire I_e est bijective. Pour rappel, une application linéaire bijective est aussi appelée un *isomorphisme*.

C'est précisément cet isomorphisme entre E et K^n qui est à l'origine du lien étroit entre les applications linéaires et les matrices.

Exemple 4.8.

1. Soit $E = K^{2 \times 2}$, la suite

$$e = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de E , l'isomorphisme correspondant $I_e : K^{2 \times 2} \rightarrow K^4$ et son inverse $I_e^{-1} : K^4 \rightarrow K^{2 \times 2}$ sont définis par

$$I_e \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_e^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

2. Soit $E = K_2[x]$ et $e = (1, x, x^2)$ une base de E . L'isomorphisme correspondant $I_e : K_2[x] \rightarrow K^3$ et son inverse $I_e^{-1} : K^3 \rightarrow K_2[x]$ sont définis par

$$I_e(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_e^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + bx + cx^2.$$

4.6.2 La matrice associée à une application linéaire

Soit $L : E \rightarrow F$, une application linéaire avec E et F des espaces vectoriels de dimension n et m respectivement. Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base E et soit $f = (f_1, \dots, f_m)$ une base de F .

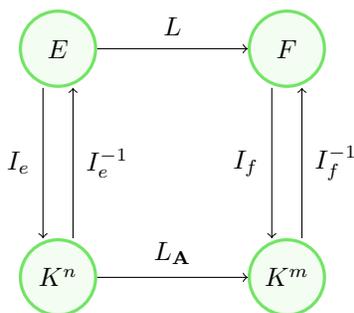
Nous pouvons construire les isomorphismes

$$\begin{aligned} I_e : E &\rightarrow K^n : x \rightarrow {}_e \mathbf{x} \\ I_e^{-1} : K^n &\rightarrow E : (x_1, \dots, x_n)^\top \rightarrow x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \\ I_f : F &\rightarrow K^m : y \rightarrow {}_f \mathbf{y} \\ I_f^{-1} : K^m &\rightarrow F : (y_1, \dots, y_m)^\top \rightarrow y_1 f_1 + \dots + y_m f_m. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant construire une application linéaire

$$L_{\mathbf{A}} : K^n \xrightarrow{I_e^{-1}} E \xrightarrow{L} F \xrightarrow{I_f} K^m : \mathbf{x} \rightarrow L_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = (I_f \circ L \circ I_e^{-1})(\mathbf{x})$$

qui vérifie le diagramme suivant.



Cette application correspond à l'application d'une matrice

$$L_{\mathbf{A}} : K^n \rightarrow K^m : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{A}\mathbf{x}$$

où $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$. On adopte la notation $\mathbf{A} = {}_f\mathbf{L}_e$.

La matrice ${}_f\mathbf{L}_e$ est l'unique matrice $\in K^{m \times n}$ telle que

$$\boxed{\forall x \in E : {}_f\mathbf{y} = {}_f\mathbf{L}_e \cdot {}_e\mathbf{x} \quad \text{où } y = L(x), {}_e\mathbf{x} = I_E(x), {}_f\mathbf{y} = I_F(y).} \quad (4.1)$$

La matrice associée s'obtient en choisissant comme vecteur $x \in E$ les vecteurs e_1, \dots, e_n de la base e de E , on a

$$\begin{aligned} {}_f\mathbf{L}(e_i) &= {}_f\mathbf{L}_e \cdot {}_e\mathbf{e}_i, \\ &= {}_f\mathbf{L}_e \cdot i\text{-ème vecteur de la base canonique de } K^n, \\ &= [{}_f\mathbf{L}_e]_{:,i} \quad (\text{la } i\text{-ème colonne de } {}_f\mathbf{L}_e). \end{aligned}$$

C'est-à-dire, la colonne i de la matrice associée à l'application pour les bases e et f est l'image par l'application du i -ème vecteur de la base e exprimé dans la base f

$${}_f\mathbf{L}_e = [{}_f\mathbf{L}(e_1), \dots, {}_f\mathbf{L}(e_n)].$$

En conclusion, étant donné le choix d'une base e de E et d'une base f de F , on peut définir pour toutes *applications linéaires* de E vers F une *matrice associée* qui effectue la même transformation aux isomorphismes près.

On s'intéresse maintenant à la manière dont évolue la matrice associée à une application linéaire lorsqu'on applique des opérations à l'application. En particulier, on considère la multiplication d'une application linéaire par un scalaire ainsi que la somme et la composition de deux applications linéaires.

Proposition 4.9

1. Soit $L : E \rightarrow F$ une application linéaire et e, f des bases de E et F respectivement. Alors pour tout $\alpha \in K$, on a

$${}_f(\alpha \cdot \mathbf{L})_e = \alpha \cdot {}_f\mathbf{L}_e.$$

2. Soient $L_1 : E \rightarrow F$ et $L_2 : E \rightarrow F$ deux applications linéaires et e, f des bases de E et F respectivement.

On a

$${}_f(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2)_e = {}_f\mathbf{L}_1)_e + {}_f\mathbf{L}_2)_e.$$

3. Soient $L_1 : E \rightarrow F$ et $L_2 : F \rightarrow G$ deux applications linéaires, avec E, F et G des espaces vectoriels de dimension n, m, p respectivement. Soit e, f, g , des bases de E, F, G respectivement.

On a

$${}_g(\mathbf{L}_2 \circ \mathbf{L}_1)_e = {}_g(\mathbf{L}_2)_f \cdot {}_f\mathbf{L}_1)_e.$$

Démonstration : Vérifions seulement la dernière propriété (les deux autres se vérifient de manière semblable, quoique plus simple). Soit

$$e = (e_1, \dots, e_n), \quad f = (f_1, \dots, f_m) \text{ et } g = (g_1, \dots, g_p)$$

des bases de E, F, G respectivement.

Soit ${}_f\mathbf{L}_1)_e \in K^{m \times n}$, la matrice associée à L_1 définie comme

$${}_f\mathbf{L}_1)_e = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad \text{avec } L_1(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{i,j} f_i.$$

Soit ${}_g(\mathbf{L}_2)_f \in K^{p \times m}$, la matrice associée à L_2 définie comme

$${}_g(\mathbf{L}_2)_f = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,m} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p,1} & b_{p,2} & \dots & b_{p,m} \end{pmatrix}, \quad \text{avec } L_2(f_j) = \sum_{i=1}^p b_{i,j} g_i.$$

La fonction $L_2 \circ L_1 : E \rightarrow G$, est une application linéaire car la composition d'applications linéaires est une application linéaire (Proposition 4.1). De plus, $L_2 \circ L_1$ est une application d'un espace de dimension n vers un espace de dimension p , donc la matrice associée à $L_2 \circ L_1$ est de dimension $p \times n$. Pour calculer la matrice ${}_g(\mathbf{L}_2 \circ \mathbf{L}_1)_e$ associée à l'application $L_2 \circ L_1$, on calcule l'image par l'application des vecteurs de la base e de E et on les exprime dans la base g :

$$\begin{aligned} (L_2 \circ L_1)(e_j) &= L_2(L_1(e_j)) = L_2\left(\sum_{i=1}^m a_{i,j} f_i\right) = \sum_{i=1}^m a_{i,j} L_2(f_i) = \sum_{i=1}^m a_{i,j} \sum_{k=1}^p b_{k,i} g_k \\ &= \sum_{k=1}^p \left(\sum_{i=1}^m b_{k,i} a_{i,j}\right) g_k. \end{aligned}$$

Donc l'entrée (k, j) de la matrice associée de l'application $L_2 \circ L_1$ est donnée par

$$[{}_g(\mathbf{L}_2 \circ \mathbf{L}_1)_e]_{k,j} = \sum_{i=1}^m b_{k,i} a_{i,j} = [{}_g(\mathbf{L}_2)_f \cdot {}_f\mathbf{L}_1)_e]_{k,j}.$$

On reconnaît dans le deuxième membre l'expression de la matrice produit des matrices ${}_g(\mathbf{L}_2)_f$ et ${}_f\mathbf{L}_1)_e$, et la démonstration est donc achevée. \square

Remarque 4.1. (Interprétation du produit matriciel)

Étant donné deux matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, le produit matriciel est défini comme (Définition 1.2)

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j} \quad \forall i, j \in 1, \dots, n.$$

Pourquoi ? De la même manière que la somme de deux matrices est définie comme la somme des éléments composante par composante, nous pourrions définir le produit matriciel comme le produit des éléments composante par composante (appelé produit de Hardamard et noté \odot), à savoir

$$(\mathbf{A} \odot \mathbf{B})_{i,j} = A_{i,j} B_{i,j} \quad \forall i, j \in 1, \dots, n.$$

En effet, la multiplication par composantes est en quelque sorte la généralisation la plus "naturelle" de la multiplication réelle aux matrices: elle satisfait à tous les axiomes auxquels on peut s'attendre: associativité, existence de l'identité et des inverses (pour les matrices sans entrées 0), distributivité par rapport à l'addition et même la commutativité.

Alors que la multiplication matricielle n'est pas commutative, en général $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

La définition du produit matriciel résulte de la volonté de modéliser la composition de deux applications linéaires (Proposition 4.9), à savoir que la matrice associée à la composition de deux applications linéaires est le produit des matrices associées de ces applications linéaires.

Exemple 4.9. Considérons l'application linéaire

$$D : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x], \quad D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$$

et les bases $e = (1, x, x^2, x^3)$ de $\mathbb{R}_3[x]$ et $f = (1, x, x^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$. Remarquez que cette application linéaire correspond à la dérivation d'un polynôme.

Pour déterminer la matrice ${}_f\mathbf{D}_e$ il faut calculer

$$\begin{aligned} D(1) &= 0 &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ D(x) &= 1 &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ D(x^2) &= 2x &= 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ D(x^3) &= 3x^2 &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2 \end{aligned}$$

d'où

$${}_f\mathbf{D}_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Une fois la matrice ${}_f\mathbf{D}_e$ trouvée, nous pouvons l'utiliser pour calculer $D(p)$ sans utiliser la définition explicite de D . Calculons par exemple $D(p)$ pour $p(x) = 3 + 4x + 5x^2 + 6x^3 \in \mathbb{R}_3[x]$: puisque

$${}_e\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

on a

$${}_f\mathbf{D}(\mathbf{p}) = {}_f\mathbf{D}_e \cdot {}_e\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Finalement, $D(p) = 4 + 10x + 18x^2$.

Montrons pour terminer que le calcul du rang d'une application linéaire peut se faire par l'intermédiaire de la matrice associée de l'application par rapport à n'importe quelles bases.

Proposition 4.10

Soient e et f des bases d'espaces vectoriels E et F respectivement. Pour toute application linéaire $L : E \rightarrow F$,

$$\text{rang}(L) = \text{rang}({}_f\mathbf{L}_e).$$

Démonstration : Soit E et F des espaces vectoriels de dimension n et m respectivement. Décomposons la matrice ${}_f\mathbf{L}_e$ par colonnes

$${}_f\mathbf{L}_e = (\mathbf{a}_{:,1}, \dots, \mathbf{a}_{:,n}).$$

L'Eq. (4.1) montre qu'un vecteur quelconque $y \in F$ est dans $\text{Im}(L)$ si et seulement si il existe $(x_1, \dots, x_n)^\top \in K^n$ tel que

$$f(\mathbf{y}) = {}_f\mathbf{L}_e \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \mathbf{a}_{:,1} + \dots + x_n \mathbf{a}_{:,n}.$$

Dès lors, l'isomorphisme $I_f : F \rightarrow K^m$ qui envoie tout vecteur de F sur ses coordonnées par rapport à la base f , fait correspondre à $\text{Im}(L) \subset F$ le sous-espace de K^m engendré par les colonnes de ${}_f\mathbf{L}_e$:

$$I_f(\text{Im}(L)) = \text{sev}\langle \mathbf{a}_{:,1}, \dots, \mathbf{a}_{:,n} \rangle = \mathcal{C}({}_f\mathbf{L}_e).$$

Les dimensions de ces deux espaces sont donc égales, ce qui établit l'égalité du rang de L et du rang de la matrice ${}_f\mathbf{L}_e$ (vu comme dimension de l'espace engendré par les colonnes). \square

Exemple 4.10. Reprenons l'application D de l'Exemple 4.9. Pour calculer $\text{rang}(D) = \dim(\text{Im}(D))$, on peut calculer le rang de la matrice associée: $\text{rang}({}_f(\mathbf{D})_e)$. Comme la matrice ${}_f(\mathbf{D})_e \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ a 3 colonnes linéairement indépendantes, on a

$$\text{rang}(D) = \text{rang}({}_f(\mathbf{D})_e) = 3.$$

Le noyau (resp. image) d'une application linéaire et l'espace annulateur (resp. espace colonne) de la matrice associée à l'application sont "égaux" à un isomorphisme près. Ce résultat est formellement établi dans la proposition suivante.

Proposition 4.11

Soit une application linéaire $L : E \rightarrow F$, et soient e, f des bases respectivement de E et F . On a

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(L) &\Leftrightarrow {}_e\mathbf{x} \in \mathcal{N}({}_f\mathbf{L}_e); \\ y \in \text{Im}(L) &\Leftrightarrow {}_f\mathbf{y} \in \mathcal{C}({}_f\mathbf{L}_e). \end{aligned}$$

Exemple 4.11. Soit l'application linéaire $L : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x] : p \rightarrow L(p) = p'(x)$ et soient $e = (1, x, x^2, x^3)$ et $f = (1, x, x^2)$ des bases respectivement de $\mathbb{R}_3[x]$ et $\mathbb{R}_2[x]$. La matrice associée à l'application par rapport à ces bases est

$${}_f\mathbf{L}_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\mathcal{N}({}_f\mathbf{L}_e) = \text{sev}\langle (1, 0, 0, 0)^\top \rangle \text{ et } \text{Ker}(L) = \text{sev}\langle 1 \rangle,$$

et on vérifie en effet que $p \in \text{Ker}(L) \Leftrightarrow {}_e\mathbf{p} \in \mathcal{N}({}_f\mathbf{L}_e)$.

4.6.3 La matrice de changement de base

Il est intéressant de voir comment le vecteur colonne de coordonnée ${}_e(\mathbf{x})$ se modifie, pour un vecteur $x \in E$ donné, lorsque la base $e = (e_1, \dots, e_n)$ est remplacée par une autre base, $f = (f_1, \dots, f_n)$ du même espace.

Proposition 4.12 (Changement de base)

Soient les bases e et f d'un espace vectoriel E et soit le vecteur $x \in E$, on a

$${}_f(\mathbf{x}) = \mathbf{P} \cdot {}_e(\mathbf{x}),$$

où la matrice $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ est définie comme $\mathbf{P}_{:,i} = {}_f(e_i)$ pour $i = 1, \dots, n$.

Démonstration : Exprimons les vecteurs e_j dans la base f : il existe des scalaires $p_{ij} \in K$ déterminés de façon unique, tels que

$$e_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} f_i \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Définissons la matrice $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ avec $P_{ij} = p_{ij}$. Étant donné un vecteur quelconque $x \in E$, désignons par $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et β_1, \dots, β_n les coordonnées de x dans les bases e et f

$$x = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j = \sum_{i=1}^n \beta_i f_i.$$

En utilisant le lien entre e et f , on calcule

$$x = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j \left(\sum_{i=1}^n p_{ij} f_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} \alpha_j \right) f_i.$$

Puisque les coordonnées de x dans la base f sont définies de manière unique (Proposition 3.8), il vient, par identification

$$\beta_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} \alpha_j \quad \text{pour } i = 1, \dots, n.$$

Sous forme matricielle, cela s'écrit

$${}_f(\mathbf{x}) = \mathbf{P} \cdot {}_e(\mathbf{x}).$$

□

On appelle la matrice \mathbf{P} introduite ici la *matrice de changement de base* de la base e vers la base f .

Remarque 4.2. (Application identité) Dans le cas où $F = E$, et où $L = I_E$ est l'application identité sur E et si les bases e et f sont les mêmes, alors un simple calcul montre que l'on obtient la matrice identité :

$${}_e(\mathbf{I}_E)_e = \mathbf{I}_n.$$

Cependant, si $f \neq e$, alors la matrice ${}_f(\mathbf{I}_E)_e$ n'est pas la matrice identité.

On considère un espace vectoriel E de dimension n . Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ et $f = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases de E . On considère l'application linéaire particulière

$$I_E : E \rightarrow E : x \rightarrow I_E(x) = x.$$

La matrice associée par rapport aux bases e et f à cet endomorphisme est

$${}_f(\mathbf{I}_E)_e = [{}_f(I_E(e_1)), \dots, {}_f(I_E(e_n))] = [{}_f(e_1), \dots, {}_f(e_n)]$$

et vérifie la relation

$$\boxed{\forall x \in E : {}_f \mathbf{x} = {}_f(\mathbf{I}_E)_e \cdot {}_e \mathbf{x}}.$$

Il s'agit de la matrice de changement de base qui permet de passer de la représentation d'un vecteur $x \in E$ exprimé en base e à sa représentation en base f . La matrice de changement de base est donc la matrice associée à l'application linéaire identité en considérant les bases e et f .

Par ailleurs, si $L : E \rightarrow F$ est une application linéaire et si e, e' désignent deux bases de E et f, f' deux bases de F , alors les matrices associées de L par rapport aux bases e et f d'une part, e' et f' d'autre part sont liées par la formule:

$$\boxed{{}_{f'}(\mathbf{L})_{e'} = {}_{f'}(\mathbf{I}_F)_f \cdot {}_f(\mathbf{L})_e \cdot {}_e(\mathbf{I}_E)_{e'}}. \quad (4.2)$$

Cette formule se déduit en appliquant la Proposition 4.9(3) au cas où l'application composée est $L = I_F \circ L \circ I_E$.

Remarquons pour terminer que toute matrice de changement de base ${}_e(\mathbf{I}_E)_{e'}$ est inversible.

Proposition 4.13

Soient e et e' deux bases d'un espace vectoriel E de dimension n . La matrice de changement de base ${}_e(\mathbf{I}_E)_{e'} \in K^{n \times n}$ est inversible, et

$${}_e(\mathbf{I}_E)_{e'}^{-1} = {}_{e'}(\mathbf{I}_E)_e.$$

Démonstration : La Proposition 4.9(3) donne

$${}_e(\mathbf{I}_E)_{e'} \cdot {}_{e'}(\mathbf{I}_E)_e = \mathbf{I}_n \quad \text{et} \quad {}_{e'}(\mathbf{I}_E)_e \cdot {}_e(\mathbf{I}_E)_{e'} = \mathbf{I}_n.$$

□

Exemple 4.12. (Matrice de changement de base)

Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[x]$ des polynômes de degré 2. Soient les bases

$$e = (1, x, x^2) \text{ et } f = (x - 2, 3x^2, -4)$$

de $\mathbb{R}_2[x]$. On cherche la matrice ${}_f \mathbf{I}_e$ de changement de base de $\mathbb{R}_2[x]$ de la base e vers la base f .

La matrice ${}_f \mathbf{I}_e = [{}_f(e_1), {}_f(e_2), {}_f(e_3)]$. Il faut calculer ${}_f(e_1) = (a, b, c)^\top$ telle que

$$e_1 = a \cdot f_1 + b \cdot f_2 + c \cdot f_3$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a

$$1 = a(x - 2) + b(3x^2) + c(-4) = 3bx^2 + ax - (2a + 4c)$$

dont on déduit par identification que

$$\begin{cases} 0 = 3b \\ 0 = a \\ 1 = -(2a + 4c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \\ c = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

En procédant de la même manière, on trouve

$$e_1 = 0 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 - \frac{1}{4} \cdot f_3$$

$$e_2 = 1 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 - \frac{1}{2} \cdot f_3$$

$$e_3 = 0 \cdot f_1 + \frac{1}{3} \cdot f_2 + 0 \cdot f_3$$

d'où

$${}_f \mathbf{I}_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Prenons par exemple le polynôme $p(x) = 3x^2 - 2x + 1$. On a $e(\mathbf{p}) = (1, -2, 3)^\top$. Pour trouver $f(\mathbf{p})$, il suffit de calculer

$$f(\mathbf{p}) = {}_f\mathbf{I}_e \cdot e(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

On vérifie en effet que $-2 \cdot (x - 2) + 1 \cdot (3x^2) + \frac{3}{4} \cdot (-4) = 3x^2 - 2x + 1 = p(x)$.

Chapitre 5

Espaces Euclidiens

Dans les deux chapitres précédents, nous avons respectivement introduit les notions abstraites d'*espace vectoriel* et d'*application linéaire*.

Dans ce chapitre, nous allons abstraire les notions de *produit scalaire*, *norme*, *distance* et *projection orthogonale* avec lesquels vous êtes familier pour le cas particulier des vecteurs de \mathbb{R}^n . Ces notions sont illustrées pour les vecteurs de \mathbb{R}^2 dans la Fig. 5.1. Pour abstraire ces notions, nous allons les définir à partir des propriétés intuitives que ces notions doivent satisfaire.

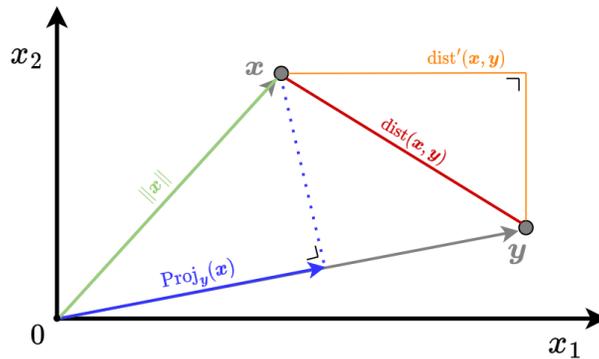


FIGURE 5.1 – En bleu, la projection orthogonale de x sur y . En vert, la norme de x . En rouge, la distance entre x et y (elle vous est connue sous le nom de distance *euclidienne*). Mais on peut définir d'autres notions de distance, comme par exemple la distance dite de *Manhattan* illustrée en orange.

Ensuite nous introduirons la notion d'*espace euclidien*, qui n'est rien d'autre qu'un espace vectoriel qui possède une notion de distance. Grâce aux espaces euclidiens on peut étudier de nombreux problèmes d'approximation dans les espaces vectoriels réels.

1. Nous motivons l'introduction de la notion d'espace euclidien à partir du problème de la recherche des solutions approchées d'un système qui n'admet pas de solutions exactes.
2. En utilisant le produit scalaire, dans un espace vectoriel on peut définir la distance entre deux vecteurs et l'orthogonalité entre vecteurs. Un espace euclidien est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.
3. La notion la plus importante qu'on peut introduire dans un espace euclidien est celle de projection orthogonale sur un sous-espace : la projection orthogonale minimise la distance.
4. Quelques problèmes d'approximation qu'on peut traiter grâce aux espaces euclidiens: les solutions approchées d'un système qui n'admet pas de solution exacte, la droite d'interpolation linéaire, la droite tangente au graphe d'une fonction dérivable, le polynôme de Taylor.

5.1 Motivation

Nous savons qu'un système

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{5.1}$$

admet au moins une solution si et seulement si le vecteur des termes indépendants est une combinaison linéaire des colonnes de la matrice des coefficients :

$$\mathbf{b} \in \mathcal{C}(\mathbf{A}).$$

Dans le cas où cette condition n'est pas vérifiée, le système n'admet pas de solution *exacte*, mais on peut chercher des solutions *approchées* (approximations). Pour cela, on remplace le vecteur \mathbf{b} par un vecteur \mathbf{b}' qui remplit les conditions suivantes

1. $\mathbf{b}' \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$;
2. parmi les vecteurs de $\mathcal{C}(\mathbf{A})$, \mathbf{b}' est le plus "proche" de \mathbf{b} .

Le nouveau système

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}' \tag{5.2}$$

admet au moins une solution exacte (comme $\mathbf{b}' \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$). De plus, comme le vecteur \mathbf{b}' est "proche" de celui du système original \mathbf{b} , les solutions *exactes* de Eq. (5.2) sont appelées les solutions *approchées* de Eq. (5.1).

Pour que tout cela puisse fonctionner, il faut donner un sens au mot "proche" et c'est pourquoi on doit définir une notion de *distance* entre deux vecteurs d'un espace vectoriel. Les *espace euclidiens* sont des espaces vectoriels où l'on peut parler de distance.

5.2 Produit scalaire, norme, distance

Nous commençons par introduire l'opération fondamentale de ce chapitre : le *produit scalaire*. Lorsque nous calculons le produit scalaire de deux vecteurs, le résultat, comme son nom l'indique, est un scalaire, plutôt qu'un vecteur.

Définition 5.1 (*Produit scalaire*)

Étant donné un espace vectoriel **réel**¹ E , un *produit scalaire* est une application (*forme*)

$$(\cdot | \cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{R}, \quad x, y \mapsto (x | y)$$

1. bilinéaire, c'est-à-dire linéaire par rapport à chaque variable :

$$\text{(linéarité à gauche)} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall x, y, z \in E : (\alpha x + \beta y | z) = \alpha(x | z) + \beta(y | z)$$

$$\text{(linéarité à droite)} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall x, y, z \in E : (x | \alpha y + \beta z) = \alpha(x | y) + \beta(x | z)$$

2. symétrique : $\forall x, y \in E : (x | y) = (y | x)$
3. définie positive : $\forall x \in E : (x | x) \geq 0$ et $(x | x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Remarque 5.1. Si une fonction est linéaire à gauche (resp. droite) et symétrique, alors elle est linéaire à droite (resp. gauche). Par conséquent pour démontrer qu'une forme est un produit scalaire, il suffit de démontrer qu'elle est linéaire à gauche, symétrique et définie positive.

Nous introduisons maintenant la notion de *norme* qui est utilisée comme une mesure de la "longueur" d'un vecteur. Sa définition ci-dessous caractérise l'idée intuitive que l'on se fait du concept de *longueur*.

1. On peut également définir la notion de produit scalaire pour des espaces vectoriels complexes moyennant des modifications de la définition. Toutefois dans ce cours, on ne travaillera qu'avec des produits scalaires définis pour des espaces vectoriels réels.

Définition 5.2 (Norme)

Une *norme* sur un espace vectoriel E est une application

$$\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$$

satisfaisant les conditions suivantes

1. homogénéité absolue : $\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall x \in E : \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
2. inégalité triangulaire : $\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
3. séparation : $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Notez que nous pouvons prouver qu'une *norme* est non-négative ce qui est en accord avec le concept de "longueur" d'un vecteur.

Proposition 5.1 (Non-négativité de la norme)

Soit une norme $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$, alors $\forall x \in E : \|x\| \geq 0$.

Démonstration : Soit $x \in E$, en utilisant le fait que $x + (-x) = 0$, on a

$$0 = \|0\| \leq \|x\| + \|-x\| = \|x\| + |-1| \|x\| = 2\|x\|$$

où on a utilisé successivement les conditions 3, 2 et 1 de la Définition 5.2. Il en résulte que $\|x\| \geq 0$. □

Exemple 5.1. *Considérons par exemple l'espace vectoriel \mathbb{R}^n . On peut construire beaucoup de normes différentes sur un même espace vectoriel. Dans ce cas, on peut distinguer les normes en leur ajoutant un indice.*

On peut définir la norme $\| \cdot \|_p$ pour $p \in [1, \dots, \infty[$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Les cas les plus souvent rencontrés étant $p = 1, 2, \infty$:

$$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|, \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

Proposition 5.2 (Inégalité de Cauchy)

Soit E , un espace vectoriel réel E muni du produit scalaire $(\cdot | \cdot)$, on a

$$\forall x, y \in E : |(x | y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

où on pose $\|x\| := \sqrt{(x | x)}$, $\|y\| := \sqrt{(y | y)}$.

Démonstration : Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq (x + \alpha y | x + \alpha y) = \alpha^2 \|y\|^2 + 2\alpha(x | y) + \|x\|^2$. Si on regarde cette expression comme un polynôme du deuxième degré par rapport à la variable α , il faut que son discriminant soit négatif ou nul :

$$\Delta = (x | y)^2 - \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0$$

d'où $(x | y)^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$ et donc $|(x | y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. □

A tout produit scalaire, on peut associer une norme particulière.

— **Proposition 5.3 (Norme induite)** —

Soit un espace vectoriel réel E . L'application

$$\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x|x)}$$

est une norme, appelée *norme induite par le produit scalaire* $(\cdot|\cdot)$.

Démonstration : On vérifie les 3 conditions de la Définition 5.2:

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall x \in E : \sqrt{(\alpha x|\alpha x)} = \sqrt{\alpha^2(x|x)} = |\alpha|\sqrt{(x|x)}$ (bilinéarité du produit scalaire)
2. $\forall x, y \in E :$

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (x+y|x+y) \\ &= (x|x) + 2(x|y) + (y|y) && \text{(produit scalaire bilinéaire/symétrique)} \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 && \text{(inégalité de Cauchy (Proposition 5.2))} \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

d'où $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

3. $\forall x \in E : \|x\| = \sqrt{(x|x)} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (produit scalaire défini positif)

□

Remarque 5.2. Comme nous l'avons vu, tout produit scalaire induit une norme. Cependant, toute norme n'est pas induite par un produit scalaire. Par exemple, pour l'espace vectoriel \mathbb{R}^n , la norme $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$ n'est pas induite par un produit scalaire.

Nous introduisons maintenant la notion abstraite de *distance* entre deux vecteurs.

— **Définition 5.3 (Distance)** —

Une *distance* sur un espace vectoriel E est une application

$$\text{dist}(\cdot, \cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{R}, x, y \mapsto \text{dist}(x, y)$$

satisfaisant les conditions suivantes

1. symétrie : $\forall x, y \in E : \text{dist}(x, y) = \text{dist}(y, x)$
2. inégalité triangulaire : $\forall x, y, z \in E : \text{dist}(x, z) \leq \text{dist}(x, y) + \text{dist}(y, z)$
3. séparation : $\text{dist}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Les conditions de la Définition 5.3 expriment les notions intuitives du concept de *distance*. Par exemple, que la distance entre des points distincts est strictement positive et que la distance de x à y est la même que la distance de y à x . L'inégalité triangulaire signifie que la distance parcourue directement entre x et z , n'est pas plus grande que la distance à parcourir en partant d'abord de x vers y puis de y vers z .

Notez que nous pouvons prouver qu'une *distance* est non-négative.

— **Proposition 5.4 (Non-négativité de la distance)** —

Soit une distance $\text{dist}(\cdot, \cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{R}, x, y \mapsto \text{dist}(x, y)$, alors $\forall x, y \in E : \text{dist}(x, y) \geq 0$.

Démonstration : Soient $x, y \in E$, on a

$$0 = \text{dist}(x, x) \leq \text{dist}(x, y) + \text{dist}(y, x) = \text{dist}(x, y) + \text{dist}(x, y) = 2 \text{dist}(x, y)$$

où on a utilisé successivement les conditions 3, 2 et 1 de la Définition 5.3. Il en résulte que $\text{dist}(x, y) \geq 0$.

□

De la même manière qu'un produit scalaire induit une norme, une norme induit une distance.

Proposition 5.5 (Distance induite)

Soit un espace vectoriel réel E . L'application

$$\text{dist}(\cdot, \cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{R}, x, y \rightarrow \text{dist}(x, y) = \|x - y\|$$

est une distance, appelée *distance induite par la norme* $\|\cdot\|$.

Démonstration : On vérifie les 3 conditions de la Définition 5.3:

1. $\forall x, y \in E : \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = \|y - x\|$ (homogénéité absolue de la norme)

2. $\forall x, y, z \in E :$

$$\begin{aligned} \|x - z\|^2 &= \|x - y + y - z\|^2 \\ &\leq \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \end{aligned} \quad (\text{inégalité triangulaire})$$

3. $\forall x, y \in E : \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$ (séparation de la norme)

□

Définition 5.4 (Espace euclidien)

Un *espace euclidien* est un espace vectoriel réel E de **dimension finie** muni d'un produit scalaire $(\cdot | \cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$. La norme et la distance utilisées sur ses éléments sont alors la norme et la distance induites par le produit scalaire $(\cdot | \cdot)$:

1. Norme de $x \in E : \|x\| := \sqrt{(x | x)}$

2. Distance entre $x, y \in E : \text{dist}(x, y) := \|x - y\| = \sqrt{(x - y | x - y)}$.

Exemple 5.2. Voici quelques exemples d'espaces euclidiens.

1. L'espace vectoriel \mathbb{R}^n muni du produit scalaire canonique

$$(x | y) = x^\top y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{pour } x = (x_1 \dots x_n)^\top \text{ et } y = (y_1 \dots y_n)^\top$$

est un espace euclidien.

Dans le cas particulier où $n = 2$, on obtient le seul espace euclidien étudié durant vos études secondaires pour lequel on peut démontrer

(a) $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$,

(b) $\text{dist}(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$,

(c) $(x | y) = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(x, y)$ où $\cos(x, y)$ désigne le cosinus de l'angle entre les vecteurs x et y .

Démonstration :

(a) Soit $x = (x_1, x_2)^\top : \|x\| = \sqrt{(x | x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

(b) Soit $x = (x_1, x_2)^\top, y = (y_1, y_2)^\top : \text{dist}(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.

(c) Soit $x = (x_1, x_2)^\top, y = (y_1, y_2)^\top$. Il faut montrer que

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \cdot \cos(x, y).$$

Puisque la norme d'un vecteur et l'angle entre deux vecteurs ne changent pas par rotation autour de l'origine, pour simplifier les calculs nous pouvons supposer que le vecteur x se trouve sur la demi-axe horizontal positif : $x_1 \geq 0$ et $x_2 = 0$. La formule à montrer devient alors

$$x_1 y_1 = x_1 \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \cdot \cos(x, y).$$

Après simplification, cela donne

$$\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} = \cos(x, y)$$

qui est vrai par définition du cosinus. □

2. On peut définir d'autres produits scalaires pour l'espace vectoriel \mathbb{R}^n . Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique (c'est-à-dire que $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$). Si on pose

$$(x | y) = (x_1 \quad \dots \quad x_n) \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

on a une fonction bilinéaire et symétrique. Elle est définie positive ssi la matrice \mathbf{A} est elle même définie positive dans un sens qui sera expliqué plus tard (Remarque 7.1). Notons que pour $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ on retrouve le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n .

3. Soit $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ des réels fixés, avec $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$. L'espace $\mathbb{R}_n[x]$ muni du produit scalaire

$$(P | Q) = \sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i)$$

est un espace euclidien.

4. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ deux réels fixés, avec $a < b$. L'espace des fonctions intégrables $\text{Int}([a, b], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(f | g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

est un espace euclidien.

Exemple 5.3. Soit $E = \mathbb{R}_2[x]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2. La forme suivante

$$(\cdot | \cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{R} : (p | q) = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

est un produit scalaire. En effet, on peut vérifier que les 3 conditions pour être un produit scalaire sont satisfaites.

— Bilinéaire : Soient $p, q, f \in E$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$(\alpha p + \beta q | f) = \sum_{i=-1}^1 (\alpha p + \beta q)(i)f(i) = \alpha \sum_{i=-1}^1 p(i)f(i) + \beta \sum_{i=-1}^1 q(i)f(i) = \alpha(p|f) + \beta(q|f);$$

$$(p | \alpha q + \beta f) = \sum_{i=-1}^1 p(i)(\alpha q + \beta f)(i) = \alpha \sum_{i=-1}^1 p(i)q(i) + \beta \sum_{i=-1}^1 p(i)f(i) = \alpha(p|q) + \beta(p|f).$$

— Symétrique : Trivial à partir de la définition (commutativité du produit entre réels).

— Défini positif : On vérifie que $(p|p) \geq 0 \forall p \in E$:

$$(p|p) = p^2(-1) + p^2(0) + p^2(1) \geq 0,$$

et que $(p|p) = 0 \Leftrightarrow p = \mathbf{0}$, où $\mathbf{0}$ dénote le polynôme nul ($\mathbf{0}(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$).

Soit $p \in E \Rightarrow \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. On a :

$$(p|p) = (\alpha - \beta + \gamma)^2 + \gamma^2 + (\alpha + \beta + \gamma)^2.$$

Donc

$$(p|p) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Par conséquent: $(p|p) = 0 \Leftrightarrow p = \mathbf{0}$ où $\mathbf{0}$ dénote le polynôme nul.

5.3 Orthogonalité et projection orthogonale

Définition 5.5 (Orthogonalité)

Soit E un espace euclidien.

1. Deux vecteurs $x, y \in E$ sont *orthogonaux* si $(x | y) = 0$ (notation : $x \perp y$).
2. Soit V un sous-ensemble de E . Le *complément orthogonal* de V est

$$V^\perp = \{x \in E \mid x \perp v \text{ pour tout } v \in V\}.$$

Exemple 5.4. Dans \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire canonique, soit $y = (a, b)$ et soit $V = \text{sev}\langle y \rangle$. Alors

$$V^\perp = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid ax_1 + bx_2 = 0\}$$

est la droite passant par l'origine orthogonale à la droite V de direction y .

Pour vérifier qu'un vecteur $x \in V^\perp$, il faut par définition vérifier que $(x | v) = 0$ pour tout $v \in V$. Ce qui nécessite un nombre infini de vérifications. Toutefois, si V est un espace vectoriel finiment engendré de dimension n , il suffit seulement de vérifier le résultat de n produits scalaires comme l'établit la proposition suivante.

Proposition 5.6

Soit E un espace euclidien et V un sous-espace vectoriel de E . Soit $x \in E$, on a

$$x \in V^\perp \Leftrightarrow (x | v_i) = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, n$$

où (v_1, \dots, v_n) est une base quelconque de V .

Démonstration :

- Si $x \in V^\perp$, on a $\forall v \in V : (x | v) = 0$. Dès lors, comme les vecteurs de la base (v_1, \dots, v_n) appartiennent à V , on a : $(x | v_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$.
- Réciproquement, on suppose que $(x | v_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$. Dès lors, comme tout vecteur $v \in V$ s'écrit $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$, on a

$$(x | v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (x | v_i) = 0.$$

□

Proposition 5.7

Soit E un espace euclidien et V un sous-espace vectoriel de E , on a :

1. V^\perp est un s.e.v. de E .
2. Si $x \in V \cap V^\perp$ alors $x = 0$.
3. $E^\perp = \{0\}$, $\{0\}^\perp = E$.

Démonstration : La preuve est omise dans le cadre de ce cours.

□

On introduit maintenant la notion la plus importante de ce chapitre: la *projection orthogonale*.

Définition 5.6 (*Projection orthogonale*)

Soit E un espace euclidien et V un s.e.v. de E . La *projection orthogonale* de E sur V est une application

$$P_V: E \rightarrow E$$

telle que pour tout $x \in E$:

1. $P_V(x) \in V$,
2. $x - P_V(x) \in V^\perp$.

On peut démontrer que si la projection orthogonale existe, alors elle est unique.

Proposition 5.8 (*Unicité de la projection orthogonale*)

Soit E un espace euclidien et soit V un s.e.v. de E . Si

$$f: E \rightarrow E \quad \text{et} \quad g: E \rightarrow E$$

sont deux fonctions telles que pour tout $x \in E$

1. $f(x) \in V$ et $g(x) \in V$
2. $x - f(x) \in V^\perp$ et $x - g(x) \in V^\perp$

alors $f = g$.

Démonstration : On a $f(x) - g(x) = f(x) - x + x - g(x)$. Or, le terme de gauche est dans V et celui de droite est dans V^\perp . Donc $f(x) - g(x) \in V \cap V^\perp$. Par la Proposition 5.7, cela donne $f(x) - g(x) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = g(x)$. \square

Proposition 5.9

Soit E un espace euclidien et soit V un s.e.v. de E . Soit $P_V: E \rightarrow E$ la projection orthogonale de E sur V .

1. P_V est une application linéaire,
2. $\text{Ker}(P_V) = V^\perp$,
3. $\text{Im}(P_V) = V = \{x \in E \mid P_V(x) = x\}$,
4. $P_V \circ P_V = P_V$.

Démonstration :

1. On doit démontrer que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E: P_V(\alpha x + \beta y) = \alpha P_V(x) + \beta P_V(y)$.
Pour cela, grâce à la Proposition 5.8 il suffit de montrer que

$$\alpha P_V(x) + \beta P_V(y) \in V \quad \text{et} \quad \alpha x + \beta y - (\alpha P_V(x) + \beta P_V(y)) \in V^\perp.$$

La première condition est satisfaite car $P_V(x), P_V(y) \in V$ et V est un s.e.v. par hypothèse.

La deuxième condition est satisfaite car $\alpha x + \beta y - (\alpha P_V(x) + \beta P_V(y)) = \alpha(x - P_V(x)) + \beta(y - P_V(y))$ et $x - P_V(x), y - P_V(y) \in V^\perp$, qui est un s.e.v. par la Proposition 5.7.

2. D'abord montrons que $\text{Ker}(P_V) \subset V^\perp$. Soit $x \in \text{Ker}(P_V)$, on a $P_V(x) = 0$. Par définition de la projection orthogonale, $x - P_V(x) \in V^\perp$. Et donc $x \in V^\perp$.
Montrons que $V^\perp \subset \text{Ker}(P_V)$. Soit $x \in V^\perp$. Par définition de la projection orthogonale, on a $x - P_V(x) \in V^\perp$. Comme V^\perp est un s.e.v, $P_V(x) \in V^\perp$. Par conséquent on a $P_V(x) \in V \cap V^\perp$, et par Proposition 5.7 on a $P_V(x) = 0$.
3. Comme $\forall x \in E$, on a $P_V(x) \in V$, on a immédiatement $\text{Im}(P_V) \subset V$.

Soit $x \in V$, comme $P_V(x) \in V$ on a $x - P_V(x) \in V$. De plus $x - P_V(x) \in V^\perp$. Par conséquent $x - P_V(x) \in V \cap V^\perp$ et par la Proposition 5.7, on a $x - P_V(x) = 0$ et donc $x = P_V(x) \in \text{Im}(P_V)$.

4. Soit $x \in E$, on a $P_V(x - P_V(x)) = P_V(x) - P_V(P_V(x)) = 0$ car P_V est une application linéaire et car $\text{Ker}(P_V) = V^\perp$. Et donc $P_V(P_V(x)) = P_V(x)$.

□

Proposition 5.10

Soit E un espace euclidien et V un s.e.v. de E . Si la projection orthogonale P_V de E sur V existe, alors :

1. $E = V \oplus V^\perp$,
2. la projection orthogonale P_{V^\perp} de E sur V^\perp existe et $P_{V^\perp}(x) = x - P_V(x)$,
3. $V = (V^\perp)^\perp$.

Démonstration :

1. Tout vecteur de E se décompose comme somme d'un vecteur de V et d'un vecteur de V^\perp :

$$x = P_V(x) + (x - P_V(x)).$$

Donc $E = V + V^\perp$ et cette somme est directe car $V \cap V^\perp = \{0\}$ (voir Proposition 5.7).

2. Montrons qu'on peut poser $P_{V^\perp}(x) = x - P_V(x)$. Pour cela, vérifions les deux conditions de la Définition 5.6 avec V^\perp à la place de V . Évidemment $x - P_V(x) \in V^\perp$. En outre, $x - (x - P_V(x)) = P_V(x) \in V \subset (V^\perp)^\perp$ (voir Proposition 5.7).
3. Il faut montrer que $(V^\perp)^\perp \subset V$ (l'inclusion $V \subset (V^\perp)^\perp$ est toujours valable, voir Proposition 5.7). Soit $x \in (V^\perp)^\perp$. Par le point 1 nous pouvons écrire

$$x = a + b$$

avec $a \in V \subset (V^\perp)^\perp$ et $b \in V^\perp$. On a donc $x - a = b$ et, puisque $x - a \in (V^\perp)^\perp$ et $b \in V^\perp$, $x - a = 0$ (voir à nouveau Proposition 5.7). Cela donne $x = a$ et donc $x \in V$.

□

La propriété la plus importante de la projection orthogonale est qu'elle minimise la distance.

Proposition 5.11 (Minimisation de la distance)

Soit E un espace euclidien et soit V un s.e.v. de E . Soit $P_V : E \rightarrow E$ la projection orthogonale de E sur V . Soit $x \in E$ et $y \in V$. Si $y \neq P_V(x)$, alors

$$\text{dist}(x, P_V(x)) < \text{dist}(x, y).$$

Démonstration : Puisque la racine carrée est une fonction monotone croissante, il suffit de montrer que $\text{dist}^2(x, P_V(x)) < \text{dist}^2(x, y)$:

$$\begin{aligned} \text{dist}^2(x, y) &= \|x - y\|^2 = (x - y \mid x - y) \\ &= (x - P_V(x) + P_V(x) - y \mid x - P_V(x) + P_V(x) - y) \\ &= (x - P_V(x) \mid x - P_V(x)) + 2(x - P_V(x) \mid P_V(x) - y) + (P_V(x) - y \mid P_V(x) - y) \\ &= (x - P_V(x) \mid x - P_V(x)) + (P_V(x) - y \mid P_V(x) - y) \\ &> (x - P_V(x) \mid x - P_V(x)) = \|x - P_V(x)\|^2 \\ &= \text{dist}^2(x, P_V(x)) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé que

- $(x - P_V(x) \mid P_V(x) - y) = 0$ car $x - P_V(x) \in V^\perp$ et $P_V(x) - y \in V$
- $(P_V(x) - y \mid P_V(x) - y) > 0$ car $y \neq P_V(x)$.

□

Remarque 5.3. On note parfois la Proposition 5.11 de manière équivalente sous la forme suivante.

Soit E un espace euclidien et soit V un s.e.v. de E . La projection orthogonale de $x \in E$ sur V vérifie la relation suivante

$$P_V(x) = \operatorname{argmin}_{y \in V} \operatorname{dist}(x, y),$$

où argmin est l'argument minimum (voir Définition 0.19).

5.4 Bases orthonormées

Il reste à régler le problème de l'existence de la projection orthogonale. Pour cela nous allons utiliser la notion de famille orthonormée.

Définition 5.7

Soit E un espace euclidien et soit $e_1, \dots, e_n \in E$.

1. e_1, \dots, e_n est une *famille orthogonale* si $e_i \neq 0$ et si $e_i \perp e_j$ pour tout $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$.
2. e_1, \dots, e_n est une *famille orthonormée* si $\|e_i\| = 1$ et si $e_i \perp e_j$ pour tout $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$.

Exemple 5.5. La base canonique de \mathbb{R}^n est une famille orthonormée par rapport au produit scalaire canonique, on parle alors de base orthonormée.

Remarque 5.4.

1. Toute famille orthonormée est orthogonale (car si $\|e_i\| = 1$ alors $e_i \neq 0$).
2. Si un espace euclidien E admet une base orthonormée e_1, \dots, e_n alors le produit scalaire de E peut s'exprimer à travers le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n : si $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ et $y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$ alors

$$(x | y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

En particulier :

$$(x | e_i) = x_i.$$

En effet, par la bilinéarité du produit scalaire, nous avons :

$$(x | y) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \left| \sum_{j=1}^n y_j e_j \right. \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (e_i | e_j) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

car $(e_i | e_j) = 1$ si $i = j$ et $(e_i | e_j) = 0$ si $i \neq j$.

Proposition 5.12 (Existence de la projection orthogonale)

Soit E un espace euclidien, V un s.e.v. de E , et w_1, \dots, w_n une base orthonormée de V . Alors la projection orthogonale de E sur V existe et elle est donnée par

$$P_V(x) = (x | w_1) \cdot w_1 + \dots + (x | w_n) \cdot w_n.$$

Démonstration : Il faut montrer que $P_V(x)$ défini dans la Proposition 5.12 satisfait aux conditions de la Définition 5.6:

1. $P_V(x) \in V$ car il est une combinaison linéaire de w_1, \dots, w_n une base de V .

2. Pour montrer que $x - P_V(x) \in V^\perp$ il faut montrer que $(x - P_V(x) | v) = 0$ pour tout $v \in V$, et pour cela il suffit de montrer que $(x - P_V(x) | w_i) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$ (Proposition 5.6):

$$\begin{aligned}(x - P_V(x) | w_i) &= (x - \sum_{j=1}^n (x | w_j) w_j | w_i) \\ &= (x | w_i) - \sum_{j=1}^n (x | w_j) (w_j | w_i) \\ &= (x | w_i) - (x | w_i) = 0\end{aligned}$$

car $(w_i | w_j) = 1$ si $i = j$ et $(w_i | w_j) = 0$ si $i \neq j$.

□

La propriété précédente montre que l'existence de la projection orthogonale sur V dépend de l'existence d'une base orthonormée de V .

Proposition 5.13

Toute famille orthogonale est une famille libre.

Démonstration : Soit e_1, \dots, e_n une famille orthogonale et supposons que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0.$$

Alors pour tout $j = 1, \dots, n$ nous avons

$$0 = (0 | e_j) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i | e_j \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (e_i | e_j) = \alpha_j (e_j | e_j)$$

et donc $\alpha_j = 0$ car $(e_j | e_j) > 0$.

□

Proposition 5.14 (Existence d'une base orthonormée)

Soit E un espace euclidien et V un s.e.v. de E . Si V est finiment engendré et $V \neq \{0\}$, alors V admet une base orthonormée.

Démonstration : Par induction sur la dimension n de V .

Si $n = 1$, soit $v_1 \in V, v_1 \neq 0$. Alors

$$\frac{v_1}{\|v_1\|}$$

est une base orthonormée de V .

Si $n > 1$, soit v_1, \dots, v_n une base de V . Par hypothèse inductive le s.e.v. $W = \text{sev}\langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$ admet une base orthonormée w_1, \dots, w_{n-1} et donc, par la Proposition 5.12, la projection orthogonale P_W de E sur W existe. Posons

$$w_n = v_n - P_W(v_n)$$

et montrons que w_1, \dots, w_{n-1}, w_n est une famille orthogonale de vecteurs de V (et donc

$$w_1, \dots, w_{n-1}, \frac{w_n}{\|w_n\|}$$

est une base orthonormée de V). On a

- $w_n \in V$ car $w_n = v_n - P_W(v_n)$ avec $v_n \in V$ et $P_W(v_n) \in W \subset V$.
- $w_n \neq 0$ car $P_W(v_n)$ appartient à W mais v_n n'appartient pas à W (si $v_n \in W$, alors v_n est combinaison linéaire de v_1, \dots, v_{n-1} , ce qui est impossible car v_1, \dots, v_{n-1}, v_n est une famille libre). Donc $v_n \neq P_W(v_n)$, c'est-à-dire $v_n - P_W(v_n) \neq 0$.

- $w_i \perp w_n$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$ car $w_i \in W$ et $w_n = v_n - P_W(v_n) \in W^\perp$. □

Remarque 5.5. La Proposition 5.14 est valable même si $V = \{0\}$. Dans ce cas l'unique base de V est constituée par la famille vide, qui est une famille orthonormée par convention.

Corollaire 5.1

Soit E un espace euclidien et V un s.e.v. finiment engendré de E . La projection orthogonale $P_V : E \rightarrow E$ de E sur V existe et, par conséquent, $E = V \oplus V^\perp$.

Démonstration : C'est une conséquence des Propositions 5.12, 5.14 et 5.10. □

Remarque 5.6. (Procédure de Gram-Schmidt) D'après la Proposition 5.12 pour calculer la projection orthogonale P_V il nous faut une base orthonormée de V . Comme démontré dans la Proposition 5.14, une telle base existe si V est de dimension finie. Explicitons la construction inductive utilisée dans la preuve de la Proposition 5.14.

Soit v_1, \dots, v_n une base quelconque de V , on pose :

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} \\ w_2 &= \frac{v_2 - (v_2|w_1) \cdot w_1}{\|v_2 - (v_2|w_1) \cdot w_1\|} \\ w_3 &= \frac{v_3 - (v_3|w_1) \cdot w_1 - (v_3|w_2) \cdot w_2}{\|v_3 - (v_3|w_1) \cdot w_1 - (v_3|w_2) \cdot w_2\|} \\ \dots & \\ w_n &= \frac{v_n - \sum_{i=1}^{n-1} (v_n|w_i) \cdot w_i}{\|v_n - \sum_{i=1}^{n-1} (v_n|w_i) \cdot w_i\|} \end{aligned}$$

Les vecteurs w_1, \dots, w_n sont une base orthonormée de V . Cette méthode pour construire une base orthonormée est la méthode de Gram-Schmidt.

En résumé, étant donné un espace vectoriel E et un sous-espace vectoriel V de E , la procédure générale pour calculer la projection orthogonale d'un vecteur $x \in E$ sur V est :

1. déterminer une base quelconque v de V ;
2. construire une base orthonormée w de V en appliquant la procédure de Gram-Schmidt à la base v ;
3. utiliser la formule de projection de la Proposition 5.12.

Exemple 5.6. On reprend l'Exemple 5.3, où $E = \mathbb{R}_2[x]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et le produit scalaire

$$(\cdot | \cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{R} : (p | q) = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1). \tag{5.3}$$

Soit $V = \{p \in E \mid p(1) = 0\}$, un sous-espace vectoriel de E et soit $q(x) = x$. On souhaite calculer $P_V(q)$, la projection orthogonale de q sur V par rapport au produit scalaire Eq. (5.3).

1. On calcule une base de V . Soit $p(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, un élément générique de E . On a

$$p \in V \Leftrightarrow p(1) = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0 \Leftrightarrow p(x) = ax^2 + bx - a - b = a(x^2 - 1) + b(x - 1).$$

Par conséquent, on a $V = \text{sev}\langle x^2 - 1, x - 1 \rangle$. La suite $v = (v_1, v_2) = (x^2 - 1, x - 1)$ est une base de V car des polynômes de degré différents sont forcément linéairement indépendants.

2. On calcule une base orthonormée w de V en appliquant la procédure de Gram-Schmidt à la base v :

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{x^2 - 1}{\|x^2 - 1\|} = x^2 - 1; \\ w_2 &= \frac{v_2 - (v_2|w_1)w_1}{\|v_2 - (v_2|w_1)w_1\|} = \frac{x - x^2}{2}. \end{aligned}$$

3. On peut calculer la projection orthogonale :

$$P_V(q) = (q | w_1) \cdot w_1 + (q | w_2) \cdot w_2 = 0 \cdot (x^2 - 1) + 1 \cdot \left(\frac{x - x^2}{2}\right) = \frac{x - x^2}{2}.$$

5.5 Solutions approchées et équations normales

Nous pouvons revenir au problème de départ décrit dans la Section 5.1 pour voir comment la projection orthogonale permet de trouver les solutions approchées d'un système qui n'a pas de solutions exactes. Comme on l'a dit dans l'introduction de ce chapitre, pour déterminer une solution approchée d'un système linéaire

$$S : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

qui n'admet pas de solution exacte, on va remplacer \mathbf{b} par un vecteur \mathbf{b}' qui vérifie les conditions suivantes

1. $\mathbf{b}' \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$;
2. parmi les vecteurs de $\mathcal{C}(\mathbf{A})$, \mathbf{b}' est le plus "proche" de \mathbf{b} .

Les solutions approchées sont alors les solutions du système

$$S' : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}'.$$

On choisit de remplacer \mathbf{b} par sa projection orthogonale sur l'espace colonne de \mathbf{A} :

$$\mathbf{b}' = P_{\mathcal{C}(\mathbf{A})}(\mathbf{b}).$$

En effet, on a

1. $P_{\mathcal{C}(\mathbf{A})}(\mathbf{b}) \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$ par définition de la projection orthogonale;
2. par la Proposition 5.11, la projection orthogonale minimise la distance:

$$\forall \mathbf{y} \in \mathcal{C}(\mathbf{A}), \mathbf{y} \neq P_{\mathcal{C}(\mathbf{A})}(\mathbf{b}) : \text{dist}(\mathbf{b}, P_{\mathcal{C}(\mathbf{A})}(\mathbf{b})) < \text{dist}(\mathbf{b}, \mathbf{y}).$$

Comme la projection orthogonale minimise la distance

$$P_V(\mathbf{b}) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{y} \in \mathcal{C}(\mathbf{A})} \|\mathbf{b} - \mathbf{y}\|,$$

la solution approchée est la solution du problème d'optimisation suivant

$$\hat{\mathbf{x}} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|.$$

Le choix du produit scalaire utilisé pour la projection orthogonale de \mathbf{b} sur $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ impacte donc le critère d'optimisation de la solution approchée $\hat{\mathbf{x}}$. Dans le cas particulier où le produit scalaire utilisé est le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^m , la solution approchée obtenue est la solution du problème

$$\hat{\mathbf{x}} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\| = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m (b_i - (\mathbf{A}\mathbf{x})_i)^2$$

et c'est pourquoi, la solution ainsi obtenue est appelée solution approchée *au sens des moindres carrés*.

Exemple 5.7. Calculons les solutions approchées au sens des moindres carrés du système

$$S : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\text{avec } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. S n'a pas de solutions exactes car $\mathbf{b} \notin \mathcal{C}(\mathbf{A})$. En effet, $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = 2 < 3 = \operatorname{rang}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$, ce qui signifie que \mathbf{b} n'est pas combinaison linéaire des colonnes de \mathbf{A} .

2. Puisque $\text{rang}(\mathbf{A}) = 2$, les colonnes de \mathbf{A} sont linéairement indépendantes, elle sont donc une base de $\mathcal{C}(\mathbf{A})$. Nous pouvons appliquer la méthode de G.S. (Remarque 5.6) pour obtenir une base orthonormée de $\mathcal{C}(\mathbf{A})$:

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

3. La projection orthogonale de \mathbf{b} sur $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ est donc

$$\mathbf{b}' = (\mathbf{b} | \mathbf{w}_1) \cdot \mathbf{w}_1 + (\mathbf{b} | \mathbf{w}_2) \cdot \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. On obtient ainsi un nouveau système

$$\mathcal{S}' : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}'.$$

Les solutions approchées du système de départ \mathcal{S} sont les solutions exactes du nouveau système \mathcal{S}' . Dans cet exemple le nouveau système \mathcal{S}' admet une solution unique (car $\text{rang}(\mathbf{A}) = 2$) qui est

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer les solutions approchées d'un système

$$\mathcal{S} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

on peut éviter de calculer explicitement la projection orthogonale \mathbf{b}' de \mathbf{b} sur $\mathcal{C}(\mathbf{A})$, et même de calculer une base orthonormée de $\mathcal{C}(\mathbf{A})$. En effet, \mathbf{x} est la solution approchée de \mathcal{S} ssi $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}'$, c'est-à-dire ssi le vecteur $\mathbf{A}\mathbf{x}$ est la projection orthogonale de \mathbf{b} sur $\mathcal{C}(\mathbf{A})$. D'après la Définition 5.6 cela revient à satisfaire deux conditions :

1. $\mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$
2. $\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathbf{A})^\perp$.

La première condition est toujours vérifiée et la deuxième revient à

$$\begin{aligned} (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \perp \mathbf{c} \quad \text{pour tout } \mathbf{c} \in \mathcal{C}(\mathbf{A}) &\Leftrightarrow (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x} | \mathbf{A}_{\cdot j}) = 0 \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, n \quad (\text{Proposition 5.6}) \\ &\Leftrightarrow (\mathbf{A}_{\cdot j} | \mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{A}_{\cdot j} | \mathbf{b}) \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

et dans le cas particulier où le produit scalaire utilisé à la forme

$$(\cdot | \cdot) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}^\top \mathbf{D} \mathbf{y}$$

pour une certaine matrice $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, on a

$$\Leftrightarrow \mathbf{A}^\top \mathbf{D} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^\top \mathbf{D} \mathbf{b}. \tag{5.4}$$

Théorème 5.2 (Équations normales)

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($m \geq n$) et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, les deux systèmes suivants admettent les mêmes solutions

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = P_{\mathcal{C}(\mathbf{A})}(\mathbf{b}) \tag{1} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b} \tag{2}$$

où $P_{\mathcal{C}(\mathbf{A})}(\mathbf{b})$ est la projection orthogonale de \mathbf{b} sur l'espace colonne de \mathbf{A} par rapport au produit scalaire canonique de \mathbb{R}^m . Ce dernier système d'équations est connu sous le nom d'équations normales.

Démonstration : Il s'agit du cas particulier de l'Eq. (5.4) avec $\mathbf{D} = \mathbf{I}_m$. □

Exemple 5.8. Reprenons l'Exemple 5.7 en utilisant cette deuxième méthode. Les solutions approchées au sens des moindres carrés de \mathcal{S} sont les solutions du système

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b}$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

L'unique solution de ce système est $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = 0$.

5.5.1 Projection orthogonale sur un sev de \mathbb{R}^m

Comme on va le voir dans cette section, dans le cas particulier où on veut calculer la projection orthogonale par rapport au produit scalaire canonique sur un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^m , il n'est pas nécessaire de calculer explicitement une base orthonormée avec la procédure de Gram-Schmidt.

Exemple 5.9. Soient l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ et le sous-espace vectoriel $V = \text{sev}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \text{sev}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$.

On veut calculer $P_V(\mathbf{b})$, la projection orthogonale de \mathbf{b} sur V par rapport au produit scalaire canonique de \mathbb{R}^4 :

$$(\cdot | \cdot) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} : (\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{y}.$$

Les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ étant linéairement indépendants, ils forment une base $v = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ de V . Toutefois cette base n'est pas orthonormée. On applique alors la procédure de Gram-Schmidt à la base v pour obtenir une base orthonormée $w = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ de V . On a

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^\top \\ \mathbf{w}_2 &= \frac{\mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 | \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 | \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{52}}(-5, -1, 1, 5)^\top. \end{aligned}$$

Enfin, on calcule

$$P_V(\mathbf{b}) = (\mathbf{b} | \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{b} | \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 = \frac{1}{2}(-7, -3, -1, 3)^\top. \quad (5.5)$$

Dans le cas particulier où on a un sous-espace vectoriel V de \mathbb{R}^m , et que l'on souhaite calculer la projection orthogonale (par rapport au produit scalaire canonique de \mathbb{R}^m) d'un vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, il n'est pas nécessaire de calculer une base orthonormée de V au moyen de la procédure de Gram-Schmidt et d'ensuite utiliser la formule de projection de la Proposition 5.12. Il suffit de

- réécrire V comme l'espace colonne d'une matrice \mathbf{A} , i.e. de trouver une suite génératrice de V et définir \mathbf{A} comme la matrice ayant ces vecteurs en colonnes de sorte que $V = \mathcal{C}(\mathbf{A})$;
- résoudre le système d'équations normales $\mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b}$;
- choisir une solution du système d'équations normales \mathbf{x} et calculer $P_V(\mathbf{b}) = P_{\mathcal{C}(\mathbf{A})}(\mathbf{b}) = \mathbf{A} \mathbf{x}$.

Exemple 5.10. Reprenons l'Exemple 5.9. On définit la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ de sorte que $V = \mathcal{C}(\mathbf{A})$. Les

colonnes de \mathbf{A} étant linéairement indépendantes, elles forment une base de $\mathcal{C}(\mathbf{A})$. Pour rappel, les solutions des deux systèmes d'équations suivants sont les mêmes

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = P_{\mathcal{C}(\mathbf{A})}(\mathbf{b}) \quad \text{et} \quad \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b}. \quad (5.6)$$

Dans notre cas, le système d'équations normales (le second système) s'écrit

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Ce système admet une unique solution, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Enfin par (5.6), on a

$$P_{\mathcal{C}(\mathbf{A})}(\mathbf{b}) = \mathbf{Ax} = \frac{1}{2}(-7, -3, -1, 3)^\top$$

où on retrouve bien la même solution Eq. (5.5).

5.5.2 Application: régression linéaire

Enfin, nous terminons ce chapitre avec une application du calcul des solutions approchées d'un système d'équations linéaires: la recherche du polynôme de degré n qui approxime au mieux une famille de m points du plan, avec $n \leq m$.

Nous nous limitons ici à un exercice de recherche de la droite qui approxime au mieux trois points non alignés du plan (une telle droite est appelée *droite de régression linéaire*).

Exemple 5.11. On souhaite déterminer la droite $d(x) = mx + p$ qui approxime "au mieux" les trois points

$$P_1 = (-1, -1), P_2 = (1, 2), P_3 = (2, 1).$$

Si nous imposons à la droite $d(x) = mx + p$ de passer par les trois points P_1, P_2, P_3 , nous obtenons le système $\mathcal{S}: \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ suivant

$$\mathcal{S}: \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui est évidemment impossible comme les 3 points ne sont pas alignés. Nous devons donc calculer des solutions approchées et pour cela, nous devons remplacer \mathbf{b} par sa projection orthogonale \mathbf{b}' sur l'espace $\mathcal{C}(\mathbf{A})$.

Comme on l'a démontré précédemment (Proposition 5.11), c'est le choix du produit scalaire qui va définir le sens de "au mieux", c'est-à-dire le critère d'optimisation utilisé pour calculer la régression linéaire.

Pour l'illustrer, on va calculer la solution du problème de régression pour 3 produits scalaires différents de la forme

$$(\cdot | \cdot): \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}^\top \mathbf{D}_i \mathbf{y}$$

où \mathbf{D}_i est une matrice diagonale pour $i = 1, 2, 3$.

La solution approchée s'obtient en résolvant le système suivant (Eq. (5.4))

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{DA} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\top \mathbf{Db}$$

et est la solution du problème d'optimisation suivant

$$\hat{\mathbf{x}} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|^2 = \operatorname{argmin}_{p, m \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^3 D_{ii} (b_i - (p + mx_i))^2 = \operatorname{argmin}_{p, m \in \mathbb{R}} D_{11} e_1^2 + D_{22} e_2^2 + D_{33} e_3^2$$

où on pose $e_i = b_i - d(x_i) = b_i - (p + mx_i)$, l'erreur commise par la droite au point P_i .

Sur les Fig. 5.2, Fig. 5.3 et Fig. 5.4, on montre les droites de régression obtenues pour les matrices

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{D}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

respectivement.

On peut faire les observations suivantes:

- Pour la Fig. 5.2, comme il s'agit du produit scalaire canonique de \mathbb{R}^3 , la solution obtenue est la solution au sens des moindres carrés et elle minimise $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$.
- Pour la Fig. 5.3, la droite minimise $e_1^2 + 3e_2^2 + e_3^2$. C'est pourquoi, la droite passe plus près du point P_2 .
- Inversement, pour la Fig. 5.4, la droite minimise $e_1^2 + e_2^2 + 3e_3^2$. C'est pourquoi, la droite passe plus près du point P_3 .

Ainsi, le choix de la matrice \mathbf{D}_i (et donc du produit scalaire) permet de donner davantage d'importance à un point particulier et ainsi de forcer la droite à passer plus près de celui-ci.

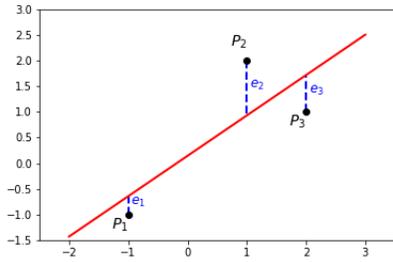


FIGURE 5.2 – Droite de régression obtenue avec \mathbf{D}_1 .

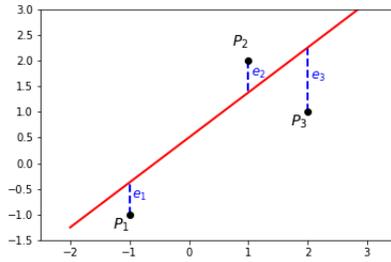


FIGURE 5.3 – Droite de régression obtenue avec \mathbf{D}_2 .

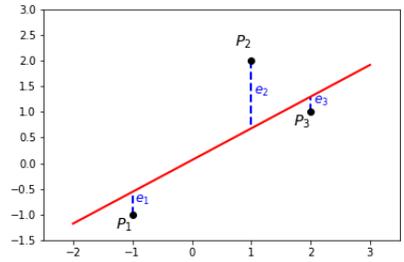


FIGURE 5.4 – Droite de régression obtenue avec \mathbf{D}_3 .

Chapitre 6

Valeurs et vecteurs propres

Les matrices peuvent être interprétées comme des applications linéaires. Considérons une transformation linéaire en deux dimensions définie par la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

On s'intéresse à la manière dont la matrice agit sur les vecteurs suivants

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On peut interpréter $\text{sev}\langle \mathbf{v}_i \rangle$, le sous-espace engendré par un vecteur \mathbf{v}_i , comme la droite passant par l'origine et son extrémité.

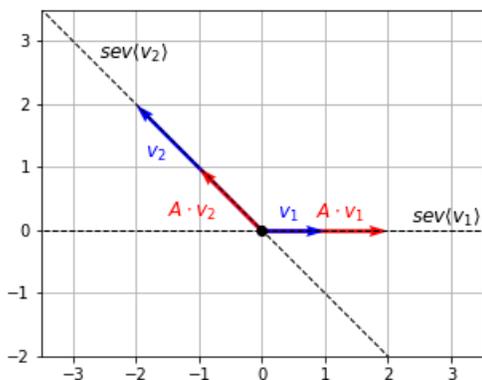


FIGURE 6.1 – $\mathbf{A}\mathbf{v}_i \in \text{sev}\langle \mathbf{v}_i \rangle$, $i = 1, 2$.

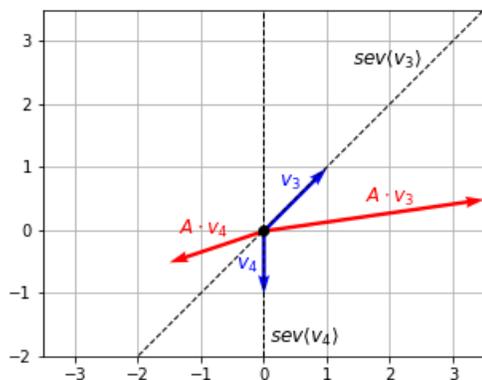


FIGURE 6.2 – $\mathbf{A}\mathbf{v}_i \notin \text{sev}\langle \mathbf{v}_i \rangle$, $i = 3, 4$.

Comme on peut le voir sur la Fig. 6.2, la plupart des transformations de vecteurs sont envoyées en dehors de leur sous-espace vectoriel.

Mais certains vecteurs particuliers restent sur le propre sous-espace vectoriel après la transformation, signifiant que l'effet que la matrice a sur ces vecteurs est juste une contraction ou un étirement, comportement similaire à celui d'un scalaire sur un vecteur. Par exemple, sur la Fig. 6.1, on peut voir que le vecteur \mathbf{v}_1 est simplement étiré (multiplié par 2) et que le vecteur \mathbf{v}_2 est simplement contracté (multiplié par $\frac{1}{2}$):

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_1, \mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_2.$$

L'ensemble des vecteurs ayant la propriété de rester dans leur propre sous-espace vectoriel engendré sont appelés des *vecteurs propres*, et le scalaire par lequel ces vecteurs sont multipliés est appelé *valeur propre*. En somme, les vecteurs propres sont des vecteurs qui restent dans la même direction après une transformation linéaire, bien qu'ils puissent être étirés ou compressés.

Dans ce chapitre, nous allons étudier en profondeur les valeurs et vecteurs propres, et découvrir comment les calculer pour une matrice donnée. Nous examinerons des propriétés importantes des valeurs et vecteurs propres, telles que la relation entre les valeurs propres et le déterminant de la matrice, ainsi que les relations entre les vecteurs propres associés à différentes valeurs propres. Enfin, nous verrons également comment les valeurs propres et vecteurs propres sont utilisés pour résoudre des problèmes de transformation, tels que la diagonalisation de matrices.

6.1 Valeurs propres et vecteurs propres

— **Définition 6.1** (*Valeurs/vecteurs propres d'une matrice carrée*) —

Soit $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$.

1. Un scalaire $\lambda \in K$ est dit *valeur propre* de \mathbf{A} s'il existe $\mathbf{x} \in K^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tel que

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Un tel \mathbf{x} est dit *vecteur propre* de \mathbf{A} de valeur propre λ (ou associé à la valeur propre λ).

2. Soit $\lambda \in K$, l'*espace propre* associé à λ est défini par

$$E(\lambda) = \{\mathbf{x} \in K^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\} = \mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n).$$

Autrement dit,

$$E(\lambda) = \{\text{vecteurs propres associés à } \lambda\} \cup \{\mathbf{0}\}.$$

Remarque 6.1. (Valeurs/vecteurs propres) *Dans la Définition 6.1 ci-dessus, une valeur propre λ et un vecteur propre \mathbf{x} d'une matrice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ doivent être définis dans le même corps que celui de la matrice:*

$$\lambda \in K \text{ et } \mathbf{x} \in K^n.$$

Toutefois dans de nombreux cas, on peut relaxer cette contrainte et autoriser que les valeurs propres et vecteurs propres soient définis dans un autre corps \bar{K} qui est une extension¹ du corps K :

$$\lambda \in \bar{K} \text{ et } \mathbf{x} \in \bar{K}^n.$$

Dans le cadre de ce cours, lorsque la matrice est définie sur le corps $K = \mathbb{R}$, on considérera l'extension algébrique $\bar{K} = \mathbb{C}$. C'est-à-dire que lorsque $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, les valeurs et vecteurs propres de \mathbf{A} sont respectivement l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{C}^n$ tels que $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

Il reste à trouver une méthode pour déterminer les valeurs propres.

1. On ne s'attarde pas sur la définition formelle d'*extension* de corps. Une *extension* d'un corps commutatif K est un corps \bar{K} qui contient K comme sous-corps. Par exemple, \mathbb{C} , le corps des nombres complexes, est une extension de \mathbb{R} , le corps des nombres réels, lequel est lui-même une extension de \mathbb{Q} , le corps des nombres rationnels.

Proposition 6.1 (Polynôme caractéristique)

Soit $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$. Les valeurs propres de \mathbf{A} sont les solutions de l'équation

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = 0 \quad (6.1)$$

où $\mathbf{I}_n \in K^{n \times n}$ est la matrice identité. La fonction de la variable λ

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n): K \rightarrow K$$

est un polynôme de degré n dit *polynôme caractéristique* de \mathbf{A} dont la factorisation est

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) &= (-1)^n (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n) \\ &= (\lambda_1 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda) \end{aligned}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de \mathbf{A} .

Démonstration :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } \mathbf{A} &\Leftrightarrow \exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0}: \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \\ &\Leftrightarrow \exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0}: \mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{I}_n\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0}: (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n \text{ n'est pas inversible} \\ &\Leftrightarrow \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n) = 0. \end{aligned}$$

La preuve que $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)$ est un polynôme de degré n dont le coefficient du terme de degré n est $(-1)^n$ est laissée en exercice (suggestion: à faire par induction sur n en utilisant la formule du Corollaire 1.11 avec $j = 1$). \square

Exemple 6.1. On peut facilement trouver une transformation linéaire en deux dimensions qui n'a pas de vecteurs propres réels. Par exemple, la rotation par un angle de 90 degrés représentée par la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

n'a pas de vecteurs propres réels puisque qu'elle envoie tous les vecteurs en dehors de leur propre sous-espace vectoriel engendré. Si on essaie de calculer les valeurs propres de cette matrice en utilisant la formule Eq. (6.1), on obtient

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_2) = \lambda^2 + 1 = 0.$$

Par conséquent, ses valeurs propres sont $\lambda_1 = -i$ et $\lambda_2 = i$. Le fait qu'il n'y pas de solutions réelles indique qu'il n'existe pas de vecteurs propres réels. La matrice \mathbf{A} n'admet donc que des valeurs et vecteurs propres complexes (non réels).

Exemple 6.2. Voici quelques exemples de calcul des valeurs et espaces propres.

1. Soit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -10 & 15 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_2) = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = (\lambda - 5)(\lambda - 10)$$

dont les racines sont $\lambda_1 = 5$ et $\lambda_2 = 10$. On cherche une base des espaces propres $E(\lambda_1)$ et $E(\lambda_2)$.

Un vecteur $\mathbf{v} \in E(\lambda_1)$ si et seulement si

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}_2)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow v_2 = v_1.$$

On a donc $E(\lambda_1) = \text{sev}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Un vecteur $\mathbf{v} \in E(\lambda_2)$ si et seulement si

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}_2)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -10 & 5 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow v_2 = 2v_1.$$

On a donc $E(\lambda_2) = \text{sev}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$.

2. Soit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$ dont les racines sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$. Les valeurs propres d'une matrice diagonale sont les éléments diagonaux de la matrice.

Un vecteur $\mathbf{v} \in E(\lambda_1)$ si et seulement si

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}_3)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow v_3 = 0.$$

On a donc $E(\lambda_1) = \text{sev}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Un vecteur $\mathbf{v} \in E(\lambda_2)$ si et seulement si

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}_3)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow v_1 = v_2 = 0.$$

On a donc $E(\lambda_2) = \text{sev}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Proposition 6.2

Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ tel que $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$ où $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ est inversible, alors les valeurs propres de \mathbf{B} sont exactement les valeurs propres de \mathbf{A} . De plus, un vecteur $\mathbf{v} \in K^n$ est un vecteur propre de \mathbf{B} associé à la valeur propre λ si et seulement si $\mathbf{P}\mathbf{v}$ est un vecteur propre de \mathbf{A} associé à la valeur propre λ .

Démonstration : Comme

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} &\Leftrightarrow \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{P}\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{P}\mathbf{v}) \end{aligned}$$

et comme $\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{P}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ si \mathbf{P} est inversible. □

Notons que le contraire n'est pas vrai. Les matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ont le même polynôme caractéristique $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$ et donc les mêmes valeurs propres et pourtant elles ne sont pas semblables. En effet, pour toute matrice \mathbf{P} inversible, on a $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{A} \neq \mathbf{B}$.

On va maintenant établir le lien entre valeurs propres, trace et déterminant d'une matrice. Ces liens sont souvent utiles pour calculer les valeurs propres d'une matrice.

Définition 6.2 (Trace)

La trace de $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ est la somme des éléments sur la diagonale principale de \mathbf{A} :

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

Proposition 6.3 (Cyclicité de la trace)

1. Soit $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times m}$: $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$;
2. Soit $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ et une matrice inversible $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$: $\text{tr}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) = \text{tr}(\mathbf{A})$.

Démonstration :

1.

$$\text{tr}(\mathbf{AB}) = \sum_{i=1}^m (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n A_{ij}B_{ji} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m B_{ji}A_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n (BA)_{jj} = \text{tr}(\mathbf{BA}).$$

2. En utilisant le résultat précédent, on a

$$\text{tr}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) = \text{tr}((\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{P}) = \text{tr}(\mathbf{P}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A})) = \text{tr}(\mathbf{PP}^{-1}\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A}).$$

□

Proposition 6.4

Soit $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ et soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ les valeurs propres (non nécessairement distinctes) de \mathbf{A} . On a

1. $\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$
2. $\text{tr}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$.

Démonstration : En utilisant la factorisation du polynôme caractéristique (Proposition 6.1), on a

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + c_1 \lambda + c_0 = (\lambda_1 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de \mathbf{A} .

1. Considérons c_0 , le terme constant. En évaluant le polynôme caractéristique simplement en $\lambda = 0$, on obtient

$$p(0) = c_0 = \det(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}_n) = \det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n.$$

2. Considérons c_{n-1} , le coefficient du terme en λ^{n-1} . Il peut être calculé de deux façons.

Premièrement, il peut être obtenu en développant $p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$. Le terme en λ^{n-1} est

$$\lambda_1(-\lambda)^{n-1} + \dots + \lambda_n(-\lambda)^{n-1} = (-1)^{n-1}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)\lambda^{n-1}.$$

Donc $c_{n-1} = (-1)^{n-1}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$.

Secondement, le coefficient c_{n-1} peut être calculé en développant $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Une façon de calculer ce déterminant est d'utiliser la formule explicite basée sur les quasi-diagonales (Théorème 1.14). On multiplie les éléments en position $(1, j_1), (2, j_2) \dots, (n, j_n)$ pour chaque permutation possible j_1, \dots, j_n de $1, \dots, n$. Si la permutation est impaire, alors le produit est multiplié par -1 . Le déterminant est alors la somme de ces $n!$ produits. L'un de ces produits est $(a_{11} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$. Tous les autres produits peuvent contenir au plus $n - 2$ éléments de la diagonale de la matrice, et sont donc des polynômes de degré au plus $n - 2$. Par conséquent, on peut écrire

$$p(\lambda) = (a_{11} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) + q(\lambda)$$

où $q(\lambda)$ est un polynôme de degré au plus $n - 2$. Puisque $q(\lambda)$ est de degré au plus $n - 2$, il n'a pas de terme en λ^{n-1} , et donc le terme en λ^{n-1} de $p(\lambda)$ doit être le terme en λ^{n-1} de $(a_{11} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$. En utilisant le même argument utilisé précédemment pour $p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$, on déduit que le coefficient du terme de degré $n - 1$ de $(a_{11} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$ est $(-1)^{n-1}(a_{11} + \dots + a_{nn})$.

Par conséquent,

$$c_{n-1} = (-1)^{n-1}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) = (-1)^{n-1}(a_{11} + \dots + a_{nn}).$$

Et on conclut

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + \dots + a_{nn} = \lambda_1 + \dots + \lambda_n.$$

□

Notons que le polynôme caractéristique a la forme suivante

$$p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{tr}(\mathbf{A}) \lambda^{n-1} + c_{n-2} \lambda^{n-2} \dots + c_1 \lambda + \det(\mathbf{A})$$

avec $c_1, \dots, c_{n-2} \in K$.

Par conséquent, dans le cas particulier d'une matrice $\mathbf{A} \in K^{2 \times 2}$, on a $p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(\mathbf{A})\lambda + \det(\mathbf{A})$.

Proposition 6.5

Des vecteurs propres associés à des valeurs propres *distinctes* sont linéairement indépendants.

Démonstration : Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_q$, les valeurs propres distinctes de \mathbf{A} et soit $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_q$, les vecteurs propres associés. Nous allons démontrer le résultat par une preuve par l'absurde. Supposons donc que ces q vecteurs ne sont pas linéairement indépendants. Appelons r le nombre de vecteurs qui sont linéairement indépendants parmi ces q vecteurs. Nous avons donc $r < q$. Pour simplifier les notations, supposons que ces r vecteurs soient les vecteurs $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$. Le vecteur \mathbf{x}_q sera donc combinaison linéaire de ces r vecteurs, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in K$ tel que

$$\mathbf{x}_q = \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{x}_i.$$

Comme nous avons $\mathbf{A}\mathbf{x}_q = \lambda_q \mathbf{x}_q$, nous déduisons que $\mathbf{A}(\sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{x}_i) = \lambda_q (\sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{x}_i)$, soit encore $\sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{A}\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^r \alpha_i \lambda_i \mathbf{x}_i = \lambda_q (\sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{x}_i)$. Par conséquent, on a

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i (\lambda_q - \lambda_i) \mathbf{x}_i = \mathbf{0}.$$

Les vecteurs $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$ étant linéairement indépendants, on déduit $\alpha_i (\lambda_q - \lambda_i) = 0$ pour $i = 1, \dots, r$. De plus, comme $\lambda_i \neq \lambda_q$, on a $\alpha_i = 0$ pour $i = 1, \dots, r$. On a donc $\mathbf{x}_q = \mathbf{0}$, ce qui contredit le fait que \mathbf{x}_q est un vecteur propre. □

Définition 6.3 (*Multiplicités algébriques et géométriques*)

Soit $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ et soit λ , une valeur propre de \mathbf{A} .

1. La *multiplicité algébrique* de λ (notée $m_a(\lambda)$) est sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)$:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_a(\lambda_1)} \dots (\lambda - \lambda_q)^{m_a(\lambda_q)}$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ sont les valeurs propres *distinctes* de \mathbf{A} .

2. La *multiplicité géométrique* de λ (notée $m_g(\lambda)$) est la dimension de $E(\lambda) = \mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)$.
D'après le Théorème du rang (Corollaire 3.7) nous avons

$$m_g(\lambda) = \dim(E(\lambda)) = \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)) = n - \dim(\text{Im}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)) = n - \text{rang}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n).$$

Par définition, λ est une valeur propre de \mathbf{A} si et seulement si $m_g(\lambda) \geq 1$ (c'est-à-dire si il existe un vecteur propre associé à λ).

D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, tout polynôme à coefficients complexes de degré n admet n racines complexes (non nécessairement distinctes). Par conséquent si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ou $\mathbb{C}^{n \times n}$, alors les valeurs propres distinctes de \mathbf{A} (racine du polynôme caractéristique de degré n) $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ sont dans \mathbb{C} et vérifient la relation suivante

$$\sum_{i=1}^q m_a(\lambda_i) = n.$$

Théorème 6.1

Soit $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ et soit λ , une valeur propre de \mathbf{A} . On a

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \leq n.$$

Démonstration : Par définition, on a $m_g(\lambda) \geq 1$ et $m_a(\lambda) \leq n$. Il reste à prouver que $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.

Soit k , la multiplicité géométrique de la valeur propre λ . Soit $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ une base de $E(\lambda)$. D'après la Proposition 3.10, il existe $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n \in K^n$ tel que $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ est une base de K^n . On pose $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$, où $\mathbf{P} = (\mathbf{v}_1 \ \dots \ \mathbf{v}_n)$. Alors,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \mathbf{B} &= \mathbf{A} \mathbf{P} \\ &= (\lambda \mathbf{v}_1 \ \dots \ \lambda \mathbf{v}_k \ \mathbf{A} \mathbf{v}_{k+1} \ \dots \ \mathbf{A} \mathbf{v}_n). \end{aligned} \tag{6.2}$$

On considère la colonne i (pour $i = 1, \dots, k$) de l'Eq. (6.2). On a $\sum_{j=1}^n B_{ji} \mathbf{v}_j = \lambda \mathbf{v}_i$ ou de manière équivalente,

$$(B_{ii} - \lambda) \mathbf{v}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n B_{ji} \mathbf{v}_j = \mathbf{0}.$$

Or comme les vecteurs \mathbf{v}_j ($j = 1, \dots, n$) sont linéairement indépendants, on a $B_{ii} = \lambda$ et $B_{ji} = 0$ pour $j = 1, \dots, n, j \neq i$.

Par conséquent, on a $\mathbf{B}_{:i} = \lambda \mathbf{e}_i$ pour $i = 1, \dots, k$ où \mathbf{e}_i dénote la i -ème colonne de la matrice \mathbf{I}_n . D'où la matrice \mathbf{B} a la forme

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix}$$

avec $\mathbf{M} \in K^{k \times k}$ la matrice diagonale avec tous les éléments de la diagonale égaux à λ , $\mathbf{0} \in K^{(n-k) \times k}$ la matrice nulle, $\mathbf{E} \in K^{k \times (n-k)}$ et $\mathbf{C} \in K^{(n-k) \times (n-k)}$. Par conséquent, le polynôme caractéristique est

$$\det(\mathbf{A} - \lambda' \mathbf{I}_n) = \det(\mathbf{B} - \lambda' \mathbf{I}_n) = (\lambda - \lambda')^k \det(\mathbf{C} - \lambda' \mathbf{I}_n)$$

d'où $m_g(\lambda) = k \leq m_a(\lambda)$. □

6.2 Diagonalisabilité

— Définition 6.4 (Diagonalisable dans un corps \bar{K}) —

Une matrice carrée $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ est *diagonalisable dans un corps \bar{K}* si il existe $\mathbf{P} \in \bar{K}^{n \times n}$ inversible et $\mathbf{D} \in \bar{K}^{n \times n}$ diagonale telles que

$$\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$$

où \bar{K} est une *extension* du corps commutatif K .

Une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ peut ne pas être diagonalisable dans le corps \mathbb{R} au sens que

il n'existe pas $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible et $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonale telles que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$

mais être diagonalisable dans \mathbb{C} au sens que

il existe $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ inversible et $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonale telles que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$.

Exemple 6.3. La matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ suivante est diagonalisable dans \mathbb{C} comme le montre la factorisation suivante

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

mais n'est pas diagonalisable dans \mathbb{R} comme on le montrera plus tard.

Pour montrer qu'une matrice carrée est diagonalisable, il faut trouver une base de vecteurs propres.

— Théorème 6.2 —

La matrice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ est diagonalisable si et seulement si elle admet n vecteurs propres linéairement indépendants. De plus, si \mathbf{A} est diagonalisable: $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$, alors

1. les éléments diagonaux de \mathbf{D} sont les valeurs propres de \mathbf{A} ;
2. les colonnes de \mathbf{P} sont les vecteurs propres de \mathbf{A} rangés dans l'ordre où apparaissent les valeurs propres dans la matrice diagonale \mathbf{D} .

Démonstration :

- Supposons que la matrice \mathbf{A} soit diagonalisable: $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ avec \mathbf{P} inversible. Posons $\mathbf{P} = (\mathbf{x}_1 \ \dots \ \mathbf{x}_n)$ où \mathbf{x}_i désigne la i -ème colonne de \mathbf{P} . Les matrices \mathbf{A} et \mathbf{D} ont les mêmes valeurs propres (Proposition 6.2). Par conséquent, on a $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de \mathbf{A} . On a donc

$$\mathbf{AP} = \mathbf{Pdiag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Leftrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}_1 \ \dots \ \mathbf{x}_n) = (\mathbf{x}_1 \ \dots \ \mathbf{x}_n) \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

On a $\mathbf{Ax}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$ pour $i = 1, \dots, n$. Cela montre que les n colonnes de la matrices \mathbf{P} sont des vecteurs propres de \mathbf{A} et qu'ils sont linéairement indépendants puisque $\text{rang}(\mathbf{P}) = n$ car \mathbf{P} est inversible.

- Réciproquement, si les n vecteurs propres $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ de \mathbf{A} sont linéairement indépendants, on considère la matrice $\mathbf{P} = (\mathbf{x}_1 \ \dots \ \mathbf{x}_n)$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} &= \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{Ax}_1 \ \dots \ \mathbf{Ax}_n) = \mathbf{P}^{-1}(\lambda_1 \mathbf{x}_1 \ \dots \ \lambda_n \mathbf{x}_n) \\ &= \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_1 \ \dots \ \mathbf{x}_n) \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Pdiag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \\ &= \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n). \end{aligned}$$

□

— Corollaire 6.3 —

Si \mathbf{A} est diagonalisable, alors $\text{rang}(\mathbf{A})$ est égal au nombre de valeurs propres non nulles de \mathbf{A} .

Démonstration : La preuve est omise dans le cadre de ce cours. \square

Corollaire 6.4 (*Condition suffisante de diagonalisabilité*)

Si $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ admet n valeurs propres distinctes, alors \mathbf{A} est diagonalisable.

Démonstration : Par la Proposition 6.5, la matrice \mathbf{A} à donc n vecteurs propres linéairement indépendants et par le Théorème 6.2, \mathbf{A} est donc diagonalisable. \square

La condition du Corollaire 6.4 est une condition suffisante pour la diagonalisabilité, mais elle n'est pas nécessaire. Par exemple, la matrice \mathbf{I}_n est diagonalisable, mais elle admet $\lambda = 1$ comme unique valeur propre.

Proposition 6.6 (*Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité*)

Soit $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ et soit $\lambda_1, \dots, \lambda_q \in K$ les valeurs propres distinctes de \mathbf{A} . Sont équivalentes:

1. \mathbf{A} est diagonalisable ;
2. $E(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E(\lambda_q) = K^n$;
3. $m_g(\lambda_1) + \dots + m_g(\lambda_q) = n$;
4. $m_a(\lambda_1) + \dots + m_a(\lambda_q) = n$ et $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$ pour tout $i = 1, \dots, q$.

Démonstration :

1 \Leftrightarrow 2: \mathbf{A} est diagonalisable ssi tout vecteur de K^n est combinaison linéaire de vecteurs propres de \mathbf{A} (Théorème 6.2) ssi $K^n = E(\lambda_1) + \dots + E(\lambda_q)$, et on sait déjà que cette somme est directe (Proposition 6.5).

2 \Leftrightarrow 3: Puisque chaque $E(\lambda_i)$ est un s.e.v. de K^n , on a:

$$\begin{aligned} K^n = E(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E(\lambda_q) &\Leftrightarrow \dim(K^n) = \dim(E(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E(\lambda_q)) \\ &\Leftrightarrow n = \dim(E(\lambda_1)) + \dots + \dim(E(\lambda_q)) \\ &\Leftrightarrow n = m_g(\lambda_1) + \dots + m_g(\lambda_q). \end{aligned}$$

4 \Rightarrow 3: Trivial.

3 \Rightarrow 4: Par le Théorème 6.1, on a

$$n = m_g(\lambda_1) + \dots + m_g(\lambda_q) \leq m_a(\lambda_1) + \dots + m_a(\lambda_q) \leq n$$

(la dernière inégalité est valable car les λ_i sont les racines d'un polynôme de degré n). Cela donne

$$m_a(\lambda_1) + \dots + m_a(\lambda_q) = n$$

et aussi

$$m_g(\lambda_1) + \dots + m_g(\lambda_q) = m_a(\lambda_1) + \dots + m_a(\lambda_q).$$

Cette dernière égalité avec la condition $m_g(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i)$ donne $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$ pour tout $i = 1, \dots, q$. \square

6.3 Relation de similitude

Définition 6.5 (*Relation de similitude*)

Deux matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ sont dites *semblables*, noté $\mathbf{A} \sim_{sim} \mathbf{B}$, si il existe une matrice \mathbf{P} inversible telle que $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$.

La relation de similitude \sim_{sim} est une relation d'équivalence au sens de la Définition 0.6, on peut en effet démontrer qu'elle est réflexive, symétrique et transitive.

Comme on l'a vu, certaines matrices ne sont pas diagonalisables (c'est le cas si et seulement si il existe une valeur propre λ telle que $m_g(\lambda) < m_a(\lambda)$). Toutefois, toute matrice peut être factorisée en une matrice bloc-diagonale, dite sous forme de *Jordan*. Il s'agit de la factorisation sous forme canonique de Jordan.

— Théorème 6.5 (Élément canonique de la relation de similitude - Théorème de Jordan) —

Toute matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ peut être factorisée par transformation de similitude en une forme bloc-diagonale, appelée la *forme canonique de Jordan*:

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{J} = \text{diag} \{ \mathbf{J}_{n_1}(\lambda_1), \dots, \mathbf{J}_{n_p}(\lambda_p) \} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{J}_{n_p}(\lambda_p) \end{pmatrix}$$

où $\mathbf{J}_{n_i}(\lambda_i) \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$ sont des blocs dit de Jordan de la forme

$$\mathbf{J}_{n_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

avec $n_1 + \dots + n_p = n$ et où \mathbf{P} est une matrice inversible.

Démonstration : La preuve est omise dans le cadre de ce cours. □

Voici quelques remarques importantes sur la forme de Jordan.

- La matrice \mathbf{J} est triangulaire supérieure avec les valeurs propres de \mathbf{A} sur la diagonale et telle que les entrées non nulles se trouvent exclusivement sur la super-diagonale.
- Plusieurs blocs de Jordan peuvent être associés à la même valeur propre.
- La forme de Jordan d'une matrice \mathbf{A} contient de nombreuses informations concernant les valeurs propres de \mathbf{A} :
 1. La multiplicité algébrique de λ est égale à la somme des dimensions des blocs de Jordan associés à λ , c'est-à-dire le nombre de fois que la valeur propre λ apparaît sur la diagonale de la matrice de Jordan.
 2. La multiplicité géométrique de λ est égale au nombre de blocs de Jordan associés à λ .
- De manière générale, la matrice \mathbf{J} n'est pas diagonale mais bloc-diagonale. Dans le cas particulier où la multiplicité algébrique est égale à la multiplicité géométrique pour chaque valeur propre ($m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$), la somme des dimensions des blocs de Jordan associé à une valeur propre est égale au nombre de ses blocs de Jordan. Il en résulte que les blocs de Jordan sont tous de dimension 1 et on a la factorisation

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{J}_1(\lambda_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire que la matrice \mathbf{J} est diagonale. Ainsi, dans le cas particulier où la matrice \mathbf{A} est diagonalisable, la factorisation de Jordan de \mathbf{A} est équivalente à la diagonalisation de \mathbf{A} .

Exemple 6.4. Soit la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$ et sa factorisation de Jordan $\mathbf{A} = \mathbf{PJP}^{-1}$ avec

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2 & & & & & & & \\ & 2 & 1 & & & & & \\ & & 2 & & & & & \\ & & & 3 & 1 & & & \\ & & & & 3 & 1 & & \\ & & & & & 3 & & \\ & & & & & & 4 & \\ & & & & & & & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1(2) & & & & & & & \\ & \mathbf{J}_2(2) & & & & & & \\ & & \mathbf{J}_3(3) & & & & & \\ & & & \mathbf{J}_1(4) & & & & \\ & & & & \mathbf{J}_1(4) & & & \end{pmatrix}.$$

De la forme de Jordan \mathbf{J} de \mathbf{A} , on peut déduire que la matrice \mathbf{A} a 3 valeurs propres distinctes ($\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 4$), à propos desquelles on peut déduire les affirmations suivantes:

- $m_a(\lambda_1) = 3$, $m_g(\lambda_1) = 2$;
- $m_a(\lambda_2) = 3$, $m_g(\lambda_2) = 1$;
- $m_a(\lambda_3) = 2$, $m_g(\lambda_3) = 2$.

Sur base du Théorème 6.5, on peut démontrer très facilement certains résultats démontrés précédemment comme le montre l'exemple suivant.

Proposition 6.7 (*Preuve alternative de la Proposition 6.4*)

Soit $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ et soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de \mathbf{A} . On a

1. $\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \dots \lambda_n$;
2. $\text{tr}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$.

Démonstration : Soit $\mathbf{A} = \mathbf{PJP}^{-1}$ la factorisation de Jordan de \mathbf{A} , où \mathbf{J} est la matrice de Jordan qui est triangulaire supérieure avec les valeurs propres de \mathbf{A} sur la diagonale.

1. Par le Corollaire 1.12.2 et comme le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux, on a

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{PJP}^{-1}) = \det(\mathbf{J}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

2. Par le Proposition 6.3.2, on a

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{PJP}^{-1}) = \text{tr}(\mathbf{J}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

□

Le rang, le polynôme caractéristique (en particulier le déterminant, les valeurs propres et la trace) sont des invariants de similitudes, mais ils sont non globaux, c'est-à-dire qu'ils ne suffisent pas toujours à détecter la non-similitude de deux matrices.

La Proposition suivante fournit un invariant total (Définition 0.9) de la relation de similitude: la forme canonique de Jordan.

Proposition 6.8 (*Invariant total de la relation de similitude*)

Deux matrices sont semblables si et seulement si elles ont la même forme de Jordan.

Dit autrement, soit $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$, les propositions suivantes sont équivalentes

1. $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ avec \mathbf{P} une matrice inversible;
2. $\mathbf{J}_\mathbf{A} = \mathbf{J}_\mathbf{B}$.

Démonstration :

1 \Rightarrow 2: La preuve est omise dans le cadre de ce cours.

2 \Rightarrow 1: Par le Théorème 6.5 et comme $\mathbf{J}_A = \mathbf{J}_B$, il existe des matrices $\mathbf{P}_A, \mathbf{P}_B$ inversibles telles que

$$\mathbf{P}_A^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_A = \mathbf{P}_B^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}_B.$$

Ce qui implique que $\mathbf{B} = \mathbf{P}_B \mathbf{P}_A^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_A \mathbf{P}_B^{-1} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$ avec $\mathbf{P} = \mathbf{P}_A \mathbf{P}_B^{-1}$ une matrice inversible. Ce qui implique que \mathbf{A} et \mathbf{B} sont semblables. □

6.4 Applications

La diagonalisation (voir même la factorisation sous forme de Jordan) des matrices carrées permet de simplifier le calcul des puissances de la matrice ainsi que le calcul de son exponentielle matricielle. Ces deux opérations ont notamment pour application respectivement la résolution d'équations de récurrence linéaires et d'équations différentielles linéaires comme nous le verrons dans le Chapitre 8.

6.4.1 Calcul des puissances d'une matrice

Le calcul des puissances d'une matrice carrée est en général assez fastidieux. Il y a néanmoins deux cas où ce calcul devient facile:

1. Si la matrice est une matrice diagonale

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & d_{nn} \end{pmatrix}$$

alors

$$\mathbf{D}^k = \begin{pmatrix} d_{11}^k & & \\ & \ddots & \\ & & d_{nn}^k \end{pmatrix}.$$

2. Si la matrice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ est diagonalisable

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1}$$

avec $\mathbf{D} \in K^{n \times n}$ diagonale et $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ inversible, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^k &= (\mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1})^k \\ &= \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1} \dots \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1} \\ &= \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{D} \dots \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1} \\ &= \mathbf{P} \mathbf{D}^k \mathbf{P}^{-1} \end{aligned}$$

et on se reconduit essentiellement au premier cas.

Si la matrice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ n'est pas diagonalisable, on peut toutefois utiliser sa forme de Jordan

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{J} \mathbf{P}^{-1}$$

avec $\mathbf{J} \in K^{n \times n}$ bloc-diagonale et $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ inversible, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^k &= (\mathbf{P} \mathbf{J} \mathbf{P}^{-1})^k \\ &= \mathbf{P} \mathbf{J} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{J} \mathbf{P}^{-1} \dots \mathbf{P} \mathbf{J} \mathbf{P}^{-1} \\ &= \mathbf{P} \mathbf{J} \mathbf{J} \dots \mathbf{J} \mathbf{P}^{-1} \\ &= \mathbf{P} \mathbf{J}^k \mathbf{P}^{-1} \\ &= \mathbf{P} \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{n_1}(\lambda_1)^k & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{J}_{n_p}(\lambda_p)^k \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} \end{aligned}$$

et cela se réduit au calcul des puissances des blocs de Jordan.

Proposition 6.9 (*La puissance d'un bloc de Jordan*)

La k -ème puissance d'un bloc de Jordan d'ordre n est donnée par

$$\mathbf{J}_n(\lambda)^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \cdots & \binom{k}{n-1}\lambda^{k-n+1} \\ & \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \cdots & \binom{k}{n-2}\lambda^{k-n+2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} \\ & & & & \lambda^k \end{pmatrix}$$

où

$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{(k-j)!j!} = \frac{k(k-1)\dots(k-j+1)}{1 \cdot 2 \dots j}.$$

6.4.2 Calcul de l'exponentielle d'une matrice

Définition 6.6 (*Exponentielle matricielle*)

La matrice exponentielle de $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ notée $e^{\mathbf{A}}$ est définie comme

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I}_n + \mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k.$$

On remarque la similitude avec le développement de Taylor de l'exponentielle scalaire

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k.$$

Le calcul de l'exponentielle d'une matrice carrée est en général assez fastidieux. Il y a néanmoins deux cas où ce calcul devient facile:

1. Si la matrice est une matrice diagonale

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & d_{nn} \end{pmatrix}$$

alors

$$e^{\mathbf{D}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{D}^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}d_{11}^k & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}d_{nn}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{d_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{d_{nn}} \end{pmatrix}.$$

2. Si la matrice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ est diagonalisable

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$$

avec $\mathbf{D} \in K^{n \times n}$ diagonale et $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ inversible, alors

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{D}^k \right) \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}e^{\mathbf{D}}\mathbf{P}^{-1}$$

et on se reconduit essentiellement au premier cas.

Si la matrice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ n'est pas diagonalisable, on peut toutefois utiliser sa forme de Jordan

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}$$

avec $\mathbf{J} \in K^{n \times n}$ bloc-diagonale et $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ inversible, alors

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{P}\mathbf{J}^k\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{J}^k \right) \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} e^{\mathbf{J}} \mathbf{P}^{-1} \\ &= \mathbf{P} \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{J}_{n_1}(\lambda_1)^k & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{J}_{n_p}(\lambda_p)^k \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} \\ &= \mathbf{P} \begin{pmatrix} e^{\mathbf{J}_{n_1}(\lambda_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\mathbf{J}_{n_p}(\lambda_p)} \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} \end{aligned}$$

et cela se réduit au calcul de l'exponentielle matricielle des blocs de Jordan.

— **Proposition 6.10** (*L'exponentielle matricielle d'un bloc de Jordan*) —

L'exponentielle matricielle d'un bloc de Jordan d'ordre n est donnée par

$$e^{t\mathbf{J}_n(\lambda)} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \frac{t^2}{2!}e^{t\lambda} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{t\lambda} \\ & e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}e^{t\lambda} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & e^{t\lambda} & te^{t\lambda} \\ & & & & e^{t\lambda} \end{pmatrix}.$$

Chapitre 7

Matrices symétriques et formes quadratiques

Dans ce chapitre, on va s'intéresser à deux notions étroitement liées: les *matrices symétriques* et les *formes quadratiques*.

Les *matrices symétriques* (Définition 1.4), c'est-à-dire les matrices

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} : \mathbf{A}^T = \mathbf{A}$$

sont une classe particulière de matrices qui joue un rôle important dans de nombreuses applications et pour laquelle le problème des valeurs propres se trouve simplifié.

En mathématiques, une *forme quadratique* est un polynôme homogène de degré deux avec un nombre quelconque de variables. Par exemple, les formes quadratiques d'une, deux et trois variables sont données par les formules suivantes:

$$\begin{aligned}q(x) &= ax^2 \\q(x, y) &= ax^2 + by^2 + 2cxy \\q(x, y, z) &= ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz.\end{aligned}$$

Une question intéressante est de pouvoir dire si le signe de q reste toujours le même sur son domaine de définition. Pour ce faire, on peut s'intéresser au graphe et regarder si celui-ci reste positif (notons bien qu'une forme quadratique ne peut pas être strictement positive puisque elle ne possède pas de termes indépendant et on aura donc toujours $q(\mathbf{0}) = 0$).

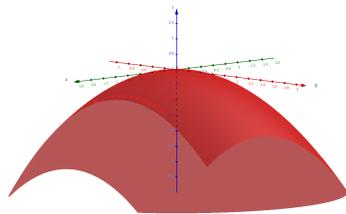


FIGURE 7.1 – Forme quadratique négative à deux variables:
 $q(x, y) = -x^2 - y^2$.

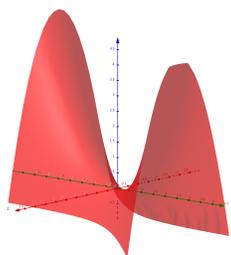


FIGURE 7.2 – Forme quadratique indéfinie à deux variables:
 $q(x, y) = -x^2 + xy$.

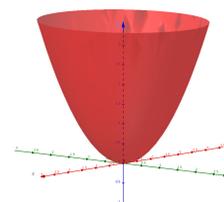


FIGURE 7.3 – Forme quadratique positive à deux variables:
 $q(x, y) = x^2 + y^2$.

A plus de 2 variables, le graphe devient trop difficile à visualiser et l'étude du signe d'une forme quadratique requiert plus de ruse. Comme nous allons le voir, ce problème se réduit au calcul des valeurs propres d'une matrice symétrique.

7.1 Matrices symétriques

Nous savons que les vecteurs propres relatifs à des valeurs propres différentes sont linéairement indépendants (Proposition 6.5). Dans le cas d'une matrice symétrique, une propriété plus forte est valable: ils sont orthogonaux. Pour rappel, des vecteurs orthogonaux sont de facto linéairement indépendants (Proposition 5.13).

Proposition 7.1

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, une matrice symétrique. Alors les vecteurs propres associés à des valeurs propres *distinctes* sont orthogonaux par rapport au produit scalaire canonique.

Démonstration : Soit $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ des vecteurs propres de \mathbf{A} associé respectivement aux valeurs propres distinctes λ_1, λ_2 . Nous avons

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_1^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{x}_2 = (\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{A}^\top \mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{A}\mathbf{x}_2).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{A}\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2) - (\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{A}\mathbf{x}_2) = (\lambda_1 \mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2) - (\mathbf{x}_1 \mid \lambda_2 \mathbf{x}_2) = \lambda_1 (\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2) - \lambda_2 (\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2) (\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2) \end{aligned}$$

d'où $(\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2) = 0$ car $\lambda_1 \neq \lambda_2$. □

Théorème 7.1

Les valeurs propres d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symétrique sont réelles.

Démonstration : Soit $\mathbf{x}^\top = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de \mathbf{A} . Posons $\bar{\mathbf{x}}^\top = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ où \bar{x}_i est le complexe conjugué de x_i . Puisque \mathbf{A} est symétrique, nous avons

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \bar{\mathbf{x}} = (\bar{\mathbf{x}}^\top \mathbf{A} \mathbf{x})^\top = (\bar{\mathbf{x}}^\top \lambda \mathbf{x})^\top = \mathbf{x}^\top \lambda \bar{\mathbf{x}}.$$

Puisque \mathbf{A} est à coefficients réels, en passant aux conjugués cela donne

$$\bar{\mathbf{x}}^\top \lambda \bar{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}^\top \lambda \bar{\mathbf{x}}} = \overline{\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{x}}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}^\top \lambda \mathbf{x}$$

ce qui revient, en utilisant $\bar{\mathbf{x}}^\top \mathbf{x} = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2$ à

$$\bar{\lambda} (|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2) = \lambda (|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2).$$

Puisque $|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 > 0$ (car $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$), l'égalité précédente implique $\bar{\lambda} = \lambda$ et donc $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Pour énoncer le théorème spectral nous avons besoin de la notion de matrice orthogonale.

Définition 7.1 (Matrice orthogonale)

Une matrice $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est *orthogonale* si $\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{I}$.

Autrement dit, \mathbf{Q} est orthogonale si ses colonnes forment une base de \mathbb{R}^n orthonormée par rapport au produit scalaire canonique.

Proposition 7.2

Toute matrice $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonale est inversible et $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\top$.

Démonstration : Par définition, \mathbf{Q}^\top est un inverse à gauche de \mathbf{Q} . Par Théorème 1.6, une matrice carrée est inversible si et seulement si elle est inversible à gauche. On déduit donc que \mathbf{Q} est inversible à droite. Enfin, par la Proposition 1.3, son inverse à gauche et à droite sont identiques, et on conclut que $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\top$. \square

Théorème 7.2 (Théorème Spectral)

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

1. Les vecteurs propres de \mathbf{A} peuvent être choisis pour former une base orthonormée (par rapport au produit scalaire canonique) de \mathbb{R}^n .
2. Il existe $\mathbf{Q}, \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, avec \mathbf{Q} orthogonale et \mathbf{D} diagonale, telles que

$$\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{D} \quad (\text{ou bien } \mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^\top).$$

3. \mathbf{A} est symétrique.

Démonstration :

(1) \Leftrightarrow (2) : Il s'agit d'un cas particulier du Théorème 6.2.

(2) \Rightarrow (3) : Si $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}$ avec \mathbf{Q} orthogonale, alors $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^\top$. Par conséquent

$$\mathbf{A}^\top = (\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^\top)^\top = (\mathbf{Q}^\top)^\top \mathbf{D}^\top \mathbf{Q}^\top = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^\top = \mathbf{A}$$

et donc \mathbf{A} est symétrique.

(3) \Rightarrow (2) : La preuve est par induction sur n .

Si $n = 1$ l'énoncé est vrai car on peut simplement prendre $\mathbf{Q} = (1)$ et $\mathbf{D} = \mathbf{A}$.

Supposons l'énoncé vrai pour $n - 1$ et démontrons-le pour n .

Soit une matrice symétrique $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Par le Théorème 7.1, \mathbf{A} admet au moins une valeur propre réelle λ_1 , et donc au moins un vecteur propre $\mathbf{q}_1 \in E(\lambda_1) = \mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})$ que nous pouvons supposer être normé ($\|\mathbf{q}_1\| = 1$). On étend la suite (\mathbf{q}_1) en une base orthonormale $(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n)$ de \mathbb{R}^n . Soit $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \dots \ \mathbf{q}_n)$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{Q} &= (\mathbf{A}\mathbf{q}_1 \ \mathbf{A}\mathbf{q}_2 \ \dots \ \mathbf{A}\mathbf{q}_n) \\ &= (\lambda_1 \mathbf{q}_1 \ \mathbf{A}\mathbf{q}_2 \ \dots \ \mathbf{A}\mathbf{q}_n) \\ &= \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{d}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

pour certains $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\mathbf{A}' \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ et $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n-1}$, le vecteur nul. Puisque \mathbf{Q} est orthogonale par construction, on a

$$\mathbf{Q}^\top \mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{d}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}' \end{pmatrix}.$$

En prenant la transposée des deux côtés, on a

$$\mathbf{Q}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{d} & \mathbf{A}'^\top \end{pmatrix}.$$

Mais comme $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$, on a $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{A}' = \mathbf{A}'^\top$.

Puisque \mathbf{A}' est une matrice symétrique de dimension $n - 1$, par hypothèse inductive, la matrice \mathbf{A}' est diagonalisable: il existe $\mathbf{Q}', \mathbf{D}' \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ avec \mathbf{Q}' orthogonale et \mathbf{D}' diagonale tel que $\mathbf{A}' = \mathbf{Q}'\mathbf{D}'\mathbf{Q}'^\top$.

Par conséquent,

$$\mathbf{Q}^\top \mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}'\mathbf{D}'\mathbf{Q}'^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}'^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}' \end{pmatrix}^\top.$$

Donc

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}' \end{pmatrix}^\top \mathbf{Q}^\top.$$

On pose $\mathbf{U} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}' \end{pmatrix}$ et $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}' \end{pmatrix}$, on a $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^\top$. Il reste à montrer que \mathbf{U} est une matrice orthogonale:

$$\mathbf{U}^\top \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}' \end{pmatrix}^\top \mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}'^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}'^\top \mathbf{Q}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-1} \end{pmatrix} = \mathbf{I}_n.$$

□

Exemple 7.1. Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. \mathbf{A} est symétrique réelle donc toutes les valeurs propres sont réelles. En effet,

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = -(\lambda + 2)^2(\lambda - 1)$$

et donc les valeurs propres sont $\lambda_1 = -2$ avec $m_a(\lambda_1) = 2$ et $\lambda_2 = 1$ avec $m_a(\lambda_2) = 1$.

2. \mathbf{A} est symétrique réelle donc \mathbf{A} est diagonalisable et il existe donc une base de vecteurs propres de \mathbb{R}^3 .

En effet, on trouve que

– $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) = \text{sev}\langle (-1, 1, 0)^\top, (-1, 0, 1) \rangle$ et donc $m_g(\lambda_1) = 2 = m_a(\lambda_1)$;

– $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) = \text{sev}\langle (1, 1, 1)^\top \rangle$ et donc $m_g(\lambda_2) = 1 = m_a(\lambda_2)$.

La matrice \mathbf{A} est donc diagonalisable sous la forme

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}, \quad \text{avec } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Mais comme la matrice \mathbf{A} est symétrique réelle, on peut obtenir un résultat de diagonalisation plus fort: $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^\top$. Pour obtenir la matrice \mathbf{Q} , il faut calculer une base orthonormée de vecteurs propres. Comme par la Proposition 7.1, des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont forcément orthogonaux, il nous suffit d'appliquer la procédure de Gram-Schmidt sur la suite $v = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ et de normer le vecteur \mathbf{v}_3 , où $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sont les colonnes de \mathbf{P} .

On applique la procédure de Gram-Schmidt sur la suite v pour obtenir une base orthonormée w de $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})$:

– $\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^\top$;

– $\mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 | \mathbf{w}_1) \mathbf{w}_1}{\|\mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 | \mathbf{w}_1) \mathbf{w}_1\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^\top$.

et on norme le vecteur \mathbf{v}_3 :

$$\mathbf{w}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^\top.$$

La matrice \mathbf{A} est donc diagonalisable sous la forme

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^\top, \quad \text{avec } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et } \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

où \mathbf{Q} est une matrice orthogonale par construction: $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\top$.

Le théorème spectral ne s'applique qu'aux matrices réelles. Par exemple la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

est symétrique mais elle n'est pas diagonalisable par une matrice orthogonale. En effet, elle n'est pas diagonalisable du tout, car elle admet une seule valeur propre $\lambda = 2$ avec $m_a(\lambda) = 2$ et $m_g(\lambda) = 1$.

Corollaire 7.3

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique et soit $\lambda_1, \dots, \lambda_q$, les valeurs propres distinctes de \mathbf{A} , on a

$$m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) \text{ pour } i = 1, \dots, q.$$

Démonstration : Par le Théorème spectral (Théorème 7.2), les matrices symétriques sont diagonalisables, par conséquent par la Proposition 6.6, on déduit que les multiplicités algébriques et géométriques de chaque valeur propre coïncident. \square

7.2 Formes quadratiques

Une *forme quadratique* est un polynôme homogène de degré 2 (c'est-à-dire qui ne contient que des termes de degré 2) avec un nombre quelconque de variables.

Définition 7.2 (Forme quadratique)

Une *forme quadratique* est une fonction $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \text{ avec } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & \dots & \frac{a_{1n}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{1n}}{2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Notons que la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ associée à la forme quadratique q dans la Définition 7.2 est symétrique.

Exemple 7.2. Voici la forme générale d'une forme quadratique à 3 variables.

$$q(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3.$$

On peut réécrire la forme quadratique sous la forme

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & \frac{a_{13}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} & \frac{a_{23}}{2} \\ \frac{a_{13}}{2} & \frac{a_{23}}{2} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, pour la forme quadratique

$$q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 - 4x_1x_2,$$

la matrice associée est

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

A toute forme quadratique, on peut définir la matrice symétrique associée et inversement, à toute matrice symétrique on peut associer une unique forme quadratique. On dit qu'il y a bijection entre l'espace des formes quadratiques et l'espace des matrices symétriques.

7.3 Caractérisation d'une forme quadratique

On caractérise les formes quadratiques en fonction du signe de leur image.

Définition 7.3

Soit une matrice symétrique $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et sa forme quadratique associée $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$.

On dit que la forme q et la matrice \mathbf{A} sont

1. *définies positives* si $q(\mathbf{x}) > 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (noté $\mathbf{A} \succ \mathbf{0}$);
2. *semi-définies positives* si $q(\mathbf{x}) \geq 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (noté $\mathbf{A} \succeq \mathbf{0}$);
3. *définies négatives* si $q(\mathbf{x}) < 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (noté $\mathbf{A} \prec \mathbf{0}$);
4. *semi-définies négatives* si $q(\mathbf{x}) \leq 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (noté $\mathbf{A} \preceq \mathbf{0}$);
5. *indéfinies* s'il existe un $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $q(\mathbf{x}) > 0$ et un $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tel que $q(\mathbf{y}) < 0$.

Remarque 7.1. Si on revient à l'Exemple 5.2.2, on voit que la forme bilinéaire et symétrique

$$(- | -): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{y}$$

est définie positive (et donc elle est un produit scalaire) si et seulement si la matrice \mathbf{A} est définie positive.

D'après la Définition 7.3, vérifier le signe d'une forme quadratique $q(\mathbf{x})$ nécessiterait la fastidieuse analyse de calculer le signe de $q(\mathbf{x})$ pour une infinité de vecteurs $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Heureusement, les valeurs propres de la matrice associée à la forme quadratique suffisent pour caractériser la forme quadratique.

Proposition 7.3

Soit $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ une forme quadratique avec \mathbf{A} la matrice symétrique associée.

1. q est définie positive \Leftrightarrow les valeurs propres de \mathbf{A} sont strictement positives.
2. q est semi-définie positive \Leftrightarrow les valeurs propres de \mathbf{A} sont positives ou nulles.
3. q est définie négative \Leftrightarrow les valeurs propres de \mathbf{A} sont strictement négatives.
4. q est semi-définie négative \Leftrightarrow les valeurs propres de \mathbf{A} sont négatives ou nulles.
5. q est indéfinie \Leftrightarrow \mathbf{A} admet au moins une valeur propre strictement positive et au moins une valeur propre strictement négative.

Démonstration : Puisque $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est symétrique, par le Théorème 7.2 nous savons qu'il existe une matrice orthogonale $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ formée par des vecteurs propres de \mathbf{A} telle que

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q}^\top$$

où $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice diagonale formée des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de \mathbf{A} .

Soit $\mathbf{x} = (x_1 \ \dots \ x_n)^\top$, nous avons

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q}^\top \mathbf{x} = (\mathbf{Q}^\top \mathbf{x})^\top \mathbf{D} (\mathbf{Q}^\top \mathbf{x}) = \mathbf{y}^\top \mathbf{D} \mathbf{y} \\ &= (y_1 \ \dots \ y_n) \mathbf{D} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \end{aligned}$$

où on a effectué le changement de variable $\mathbf{y} = \mathbf{Q}^\top \mathbf{x}$.

Voyons par exemple le premier cas:

1. Si q est une forme quadratique définie positive, alors $q(\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 > 0$ pour tout $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Nous pouvons choisir $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{e}_i$ et donc $\mathbf{y} = \mathbf{e}_i$, où \mathbf{e}_i est le i -ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n et nous obtenons $q(\mathbf{x}) = \lambda_i > 0$.

Réciproquement, si chaque λ_i est strictement positive et au moins un y_i est non nul, alors $q(\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 > 0$.

2,3,4,5. Les autres cas s'analysent de manière similaire. □

7.4 Relation de congruence

Définition 7.4 (Inertie)

L'*inertie* d'une matrice symétrique $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est le triplet

$$\text{In}(\mathbf{A}) = \{\text{ind}_+(\mathbf{A}), \text{ind}_-(\mathbf{A}), \text{ind}_0(\mathbf{A})\}$$

où

- $\text{ind}_+(\mathbf{A})$ est le nombre de valeurs propres strictement positives de \mathbf{A} ;
- $\text{ind}_-(\mathbf{A})$ est le nombre de valeurs propres strictement négatives de \mathbf{A} ;
- $\text{ind}_0(\mathbf{A})$ est le nombre de valeurs propres nulles de \mathbf{A} ;

en prenant en compte la multiplicité algébrique des valeurs propres.

Par exemple, si les valeurs propres d'une matrice sont 1, 1, 2, 3, 3, -1, -1, on dira que la matrice a cinq valeurs propres strictement positives et deux valeurs propres strictement négatives ($\text{ind}_+ = 5$, $\text{ind}_- = 2$, $\text{ind}_0 = 0$).

Définition 7.5 (Relation de congruence)

Deux matrices symétriques $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont dites *congruentes*, noté $\mathbf{A} \sim_{con} \mathbf{B}$, si il existe une matrice \mathbf{P} inversible telle que $\mathbf{B} = \mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P}$.

La relation de congruence \sim_{con} est une relation d'équivalence au sens de la Définition 0.6, on peut en effet démontrer qu'elle est réflexive, symétrique et transitive. Les deux Propositions suivantes fournissent des invariants (non totaux) de cette relation (Définition 0.9).

Théorème 7.4

Si deux matrices symétriques $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont congruentes alors

1. $\mathbf{A} \succ \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{B} \succ \mathbf{0}$;
2. $\mathbf{A} \succeq \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{B} \succeq \mathbf{0}$;
3. $\mathbf{A} \prec \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{B} \prec \mathbf{0}$;
4. $\mathbf{A} \preceq \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{B} \preceq \mathbf{0}$;
5. \mathbf{A} est indéfinie $\Leftrightarrow \mathbf{B}$ est indéfinie.

Démonstration : Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique et $\mathbf{B} = \mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P}$ avec \mathbf{P} inversible. Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{B} \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{x} = (\mathbf{P} \mathbf{x})^\top \mathbf{A} (\mathbf{P} \mathbf{x}) = \mathbf{y}^\top \mathbf{A} \mathbf{y}$$

où on a posé $\mathbf{y} = \mathbf{P} \mathbf{x}$. Comme la matrice \mathbf{P} est inversible, elle définit un changement de variable. □

Si \mathbf{A} et \mathbf{B} sont deux matrices *congruentes*, c'est-à-dire $\mathbf{B} = \mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P}$ pour une certaine matrice \mathbf{P} inversible, alors on a montré (Théorème 7.4) qu'elles ont la même caractérisation.

Par contre, en général \mathbf{A} et \mathbf{B} n'ont pas les mêmes valeurs propres ($\mathbf{A} \sim_{con} \mathbf{B} \not\Rightarrow \mathbf{A} \sim_{sim} \mathbf{B}$). En effet, les deux matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} ont les mêmes valeurs propres si la matrice de changement de base \mathbf{P} est orthogonale, car alors la formule précédente devient

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$$

et on peut appliquer la Proposition 6.2.

Avant d'obtenir un invariant total de la relation de congruence, on prouve que toute matrice symétrique est congruente à une matrice diagonale n'ayant que des 1, -1 et 0 sur la diagonale et ayant la même inertie.

Théorème 7.5 (*Élément canonique de la relation de congruence*)

Toute matrice symétrique $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est congruente à une matrice diagonale de même inertie que \mathbf{A} composée de 1, -1 , 0, c'est-à-dire, il existe $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible telle que

$$\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P} = \text{diag}(\mathbf{I}_{\text{ind}_+(\mathbf{A})}, -\mathbf{I}_{\text{ind}_-(\mathbf{A})}, \mathbf{0}_{\text{ind}_0(\mathbf{A})})$$

où

- $\mathbf{I}_{\text{ind}_+(\mathbf{A})}$ est la matrice identité de dimension $\text{ind}_+(\mathbf{A})$;
- $\mathbf{I}_{\text{ind}_-(\mathbf{A})}$ est la matrice identité de dimension $\text{ind}_-(\mathbf{A})$;
- $\mathbf{0}_{\text{ind}_0(\mathbf{A})}$ est la matrice nulle de dimension $\text{ind}_0(\mathbf{A})$.

Démonstration : Comme la matrice \mathbf{A} est symétrique, il existe $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonale telle que

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q}^\top$$

avec $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, la matrice diagonale composée des valeurs propres de \mathbf{A} . Nous pouvons supposer que les valeurs diagonales de \mathbf{D} sont ordonnées de la manière suivante: apparaissent d'abord toutes les valeurs positives, puis toutes les valeurs négatives, et enfin toutes les valeurs nulles, c'est-à-dire,

$$\mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{D}_+, \mathbf{D}_-, \mathbf{D}_0)$$

où

- $\mathbf{D}_+ \in \mathbb{R}^{\text{ind}_+(\mathbf{A}) \times \text{ind}_+(\mathbf{A})}$ est la matrice diagonale composée des valeurs propres strictement positives de \mathbf{A} ;
- $\mathbf{D}_- \in \mathbb{R}^{\text{ind}_-(\mathbf{A}) \times \text{ind}_-(\mathbf{A})}$ est la matrice diagonale composée des valeurs propres strictement négatives de \mathbf{A} ;
- $\mathbf{D}_0 \in \mathbb{R}^{\text{ind}_0(\mathbf{A}) \times \text{ind}_0(\mathbf{A})}$ est la matrice diagonale composée des valeurs propres nulles de \mathbf{A} .

Nous pouvons définir une matrice

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} \text{diag}(\mathbf{D}_+^{-\frac{1}{2}}, |\mathbf{D}_-|^{-\frac{1}{2}}, \mathbf{I}).$$

Cette matrice est inversible et

$$\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P} = \text{diag}(\mathbf{I}_{\text{ind}_+(\mathbf{A})}, -\mathbf{I}_{\text{ind}_-(\mathbf{A})}, \mathbf{0}_{\text{ind}_0(\mathbf{A})}).$$

□

Théorème 7.6 (*Loi d'inertie de Sylvester*)

Deux matrices symétriques congruentes ont la même inertie.

Démonstration : Soient \mathbf{A} et \mathbf{B} deux matrices symétriques congruentes $\mathbf{B} = \mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P}$ avec \mathbf{P} inversible. Les transformations de congruence préservent le rang de la matrice, c'est-à-dire $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{B})$. Comme le rang d'une matrice symétrique (ou de manière plus générale, d'une matrice diagonalisable) est égale au nombre de valeurs propres non nulles (Corollaire 6.3), on a

$$\text{ind}_0(\mathbf{A}) = \text{ind}_0(\mathbf{B}).$$

Par conséquent, il reste à démontrer que $\text{ind}_+(\mathbf{A}) = \text{ind}_+(\mathbf{B})$.

Soit $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{\text{ind}_+(\mathbf{A})}$ des vecteurs propres orthonormés de \mathbf{A} associés avec les valeurs propres strictement positives de \mathbf{A} : $\lambda_1, \dots, \lambda_{\text{ind}_+(\mathbf{A})}$.

Soit $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-\text{ind}_+(\mathbf{B})}$ des vecteurs propres orthonormés de \mathbf{B} associés avec les valeurs propres négatives et nulles de \mathbf{B} .

On définit les sous-espaces vectoriels suivants

$$\begin{aligned} V &= \text{sev}\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{\text{ind}_+(\mathbf{A})} \rangle, \quad \dim(V) = \text{ind}_+(\mathbf{A}); \\ W &= \text{sev}\langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-\text{ind}_+(\mathbf{B})} \rangle, \quad \dim(W) = n - \text{ind}_+(\mathbf{B}); \\ Z &= \mathbf{P}W = \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{z} = \mathbf{P}\mathbf{w} \text{ avec } \mathbf{w} \in W \} \end{aligned}$$

où $\dim(Z) = \dim(W)$ puisque \mathbf{P} est inversible.

On démontre que

- (i) $\forall \mathbf{v} \in V : \mathbf{v}^\top \mathbf{A} \mathbf{v} > 0$ si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$;
- (ii) $\forall \mathbf{w} \in W : \mathbf{w}^\top \mathbf{B} \mathbf{w} \leq 0$;
- (iii) $\forall \mathbf{z} \in Z : \mathbf{z}^\top \mathbf{A} \mathbf{z} \leq 0$.

Soit $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, c'est-à-dire $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_{\text{ind}_+(\mathbf{A})} \mathbf{v}_{\text{ind}_+(\mathbf{A})}$ avec $\alpha_1, \dots, \alpha_{\text{ind}_+(\mathbf{A})} \in \mathbb{R}$. On a

$$\mathbf{v}^\top \mathbf{A} \mathbf{v} = \alpha_1^2 \lambda_1 + \dots + \alpha_{\text{ind}_+(\mathbf{A})}^2 \lambda_{\text{ind}_+(\mathbf{A})} > 0.$$

On démontre (ii) de manière analogue. Soit $\mathbf{z} \in Z$, il existe $\mathbf{w} \in W$ tel que $\mathbf{z} = \mathbf{P}\mathbf{w}$. On a

$$\mathbf{z}^\top \mathbf{A} \mathbf{z} = \mathbf{w}^\top \mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{w} = \mathbf{w}^\top \mathbf{B} \mathbf{w} \leq 0.$$

Par conséquent, $V \cap Z = \{\mathbf{0}\}$ et donc

$$\dim(V + Z) = \dim(V) + \dim(Z) = \text{ind}_+(\mathbf{A}) + n - \text{ind}_+(\mathbf{B}) \leq n$$

car $V + Z \subset \mathbb{R}^n$. On a donc $\text{ind}_+(\mathbf{A}) \leq \text{ind}_+(\mathbf{B})$. Si on échange le rôle de \mathbf{A} et \mathbf{B} dans les arguments ci-dessus, on démontre que $\text{ind}_+(\mathbf{B}) \leq \text{ind}_+(\mathbf{A})$ et donc que

$$\text{ind}_+(\mathbf{A}) = \text{ind}_+(\mathbf{B}).$$

□

La loi d'inertie précise le Théorème 7.4 qui ne donne pas d'information sur le nombre de valeurs propres positives et négatives d'une matrice symétrique indéfinie.

Proposition 7.4 (Invariant total de la relation de congruence)

Deux matrices symétriques réelles sont congruentes si et seulement si elles ont la même inertie. Dit autrement, soit $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ deux matrices symétriques, les propositions suivantes sont équivalentes

1. $\mathbf{B} = \mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P}$ avec \mathbf{P} une matrice inversible;
2. $\text{ind}_+(\mathbf{A}) = \text{ind}_+(\mathbf{B}), \quad \text{ind}_-(\mathbf{A}) = \text{ind}_-(\mathbf{B}), \quad \text{ind}_0(\mathbf{A}) = \text{ind}_0(\mathbf{B})$.

De plus,

$$\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{ind}_+(\mathbf{A}) + \text{ind}_-(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{B}).$$

Démonstration :

1 \Rightarrow 2 : Théorème 7.6.

2 \Rightarrow 1 : Par le Théorème 7.5 et comme $\text{In}(\mathbf{A}) = \text{In}(\mathbf{B})$, il existe des matrices $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ inversibles telles que

$$\mathbf{P}_1^\top \mathbf{A} \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2^\top \mathbf{B} \mathbf{P}_2.$$

Ce qui implique que $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_2^\top)^{-1} \mathbf{P}_1^\top \mathbf{A} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2^{-1} = \mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P}$ avec $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2^{-1}$ une matrice inversible. Ce qui implique que \mathbf{A} et \mathbf{B} sont congruentes.

□

7.5 Algorithmes pour le calcul de l'inertie

Pour déterminer l'inertie d'une forme quadratique (d'une matrice symétrique), il faut calculer les valeurs propres de la matrice associée, ce qui peut être fastidieux. La loi d'inertie permet aussi de justifier d'autres méthodes qui sont utilisés pour déterminer l'inertie d'une forme quadratique sans calculer explicitement ses valeurs propres, comme par exemple la *factorisation LDL^T* et la méthode dite de *complétion des carrés*.

La première méthode est une méthode matricielle, i.e. opérant sur la matrice symétrique, alors que la seconde est une méthode algébrique, i.e. opérant sur la forme quadratique.

7.5.1 Factorisation LDL^T

Soit la forme quadratique $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ avec $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, la matrice symétrique associée.

La factorisation **LDL^T** consiste à trouver une matrice **L** inversible tel que $\mathbf{L}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{L}^{-1})^\top = \mathbf{D}$ une matrice diagonale. Il s'agit simplement de l'élimination de Gauss-Jordan appliquée au cas particulier des matrices symétriques. On démontre aisément que dans ce cas particulier, les opérations à droites sont les transposées des opérations à gauche, et le calcul de la factorisation en est donc grandement simplifié. Une telle factorisation n'est pas unique, et les éléments diagonaux de **D** ne sont pas forcément les valeurs propres de **A** (ils le seront si la matrice **L** est orthogonale). En revanche, par la loi d'inertie, l'inertie de la matrice **D** est équivalente à celle de **A**.

On illustre la méthode sur l'exemple suivant.

Exemple 7.3. Soit la forme quadratique de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 - 3x_2^2 + 6x_2x_3 + x_3^2.$$

La matrice associée à la forme quadratique q est

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir la matrice diagonale **D**, on effectue d'abord des opérations sur les lignes de la matrice **A**, ensuite on effectue les **mêmes** opérations sur les colonnes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -12 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} C_3 \leftarrow C_3 + \frac{1}{2}C_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Notons que l'on peut obtenir la matrice **L⁻¹** en appliquant les mêmes opérations sur les lignes de matrice identité:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

On déduit immédiatement que

$$\text{ind}_+(q) = 2, \quad \text{ind}_-(q) = 1, \quad \text{ind}_0(q) = 0$$

et donc que q est indéfinie.

7.5.2 Méthode de complétion des carrés

La méthode de complétion de carrés est une méthode algébrique permettant de réécrire un polynôme homogène du second degré comme une somme de carrés parfaits. Il s'agit simplement de la version algébrique de la factorisation \mathbf{LDL}^\top d'une matrice symétrique.

Exemple 7.4. On reprend la forme quadratique de l'Exemple 7.3. On fixe une variable, par exemple x_1 et on cherche les coefficients a, b, c tels que $q(x_1, x_2, x_3) - (ax_1 + bx_2 + cx_3)^2$ ne contient plus de terme en x_1 . On a $(ax_1 + bx_2 + cx_3)^2 = a^2x_1^2 + b^2x_2^2 + 2abx_1x_2 + c^2x_3^2 + 2acx_1x_3 + 2bcx_2x_3$. Par identification, on a :

$$\begin{cases} a^2 = 1 \Rightarrow \text{on choisit } a = 1 \\ 2ab = 6 \Rightarrow b = 3 \\ 2ac = -2 \Rightarrow c = -1 \end{cases}$$

$$q(x_1, x_2, x_3) - (x_1 + 3x_2 - x_3)^2 = -12(x_2^2 - x_2x_3).$$

Il faut donc recommencer avec la forme quadratique (plus simple) :

$$q_1(x_2, x_3) = x_2^2 - x_2x_3.$$

On fixe une variable, par exemple x_2 et on cherche les coefficients a, b tels que $q_1(x_2, x_3) - (ax_2 + bx_3)^2$ ne contient plus de terme en x_2 .

On a $(ax_2 + bx_3)^2 = a^2x_2^2 + b^2x_3^2 + 2abx_2x_3$.

Par identification, on a :

$$\begin{cases} a^2 = 1 \Rightarrow \text{on choisit } a = 1 \\ 2ab = -1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$q_1(x_2, x_3) - (x_2 - \frac{1}{2}x_3)^2 = -\frac{1}{4}x_3^2.$$

En combinant ces résultats :

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + 3x_2 - x_3)^2 - 12q_1(x_2, x_3) \\ &= (x_1 + 3x_2 - x_3)^2 - 12(x_2 - \frac{1}{2}x_3)^2 + 3x_3^2 \\ &= y_1^2 - 12y_2^2 + 3y_3^2 \end{aligned}$$

où on a posé :

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 3x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ y_3 = x_3. \end{cases}$$

Si on pose $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^\top$, on a la forme matricielle suivante :

$$q(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{y}^\top \mathbf{D} \mathbf{y} = \mathbf{x}^\top \mathbf{LDL}^\top \mathbf{x},$$

avec \mathbf{L}^\top la matrice du changement de variables :

$$\mathbf{L}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a obtenu une factorisation de la matrice associée \mathbf{A} de la forme quadratique q (on vérifie en effet que $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^\top$).

Par la loi d'inertie de Sylvester, on sait que l'inertie de la forme q associée à la matrice \mathbf{A} et l'inertie de la forme associée à la matrice \mathbf{D} sont identiques. La matrice \mathbf{D} étant diagonale, on déduit immédiatement que

$$\text{ind}_+(q) = 2, \quad \text{ind}_-(q) = 1, \quad \text{ind}_0(q) = 0$$

et donc que q est indéfinie.

Chapitre 8

Équations différentielles et de récurrence

Les équations différentielles et de récurrence sont des outils essentiels pour modéliser de nombreux phénomènes dans divers domaines tels que la physique, la biologie, l'économie et la finance.

Les *équations différentielles* décrivent l'évolution d'une grandeur en fonction de ses dérivées. Un exemple typique de cette dernière est la modélisation de l'évolution avec le temps t d'une population de bactéries $x(t)$, dont la croissance est souvent proportionnelle à la population, donnant naissance à une équation différentielle très classique: $x'(t) = ax(t)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Les *équations de récurrence* jouent en mathématiques discrètes un rôle analogue à celui des équations différentielles en analyse. Plus précisément, elles décrivent l'évolution d'une suite en fonction de ses termes précédents, lesquelles peuvent par exemple correspondre aux valeurs d'une quantité à différents pas de temps. Ainsi, l'évolution de notre population de bactéries mesurée à l'heure k peut être modélisée sur base de la mesure à l'heure précédente comme $x[k + 1] = bx[k]$ avec $b \in \mathbb{R}$.

Dans ce chapitre, nous étudierons en détails une classe particulière d'équations différentielles et d'équations de récurrence, mais très riche en applications: les *équations linéaires à coefficients constants d'ordre quelconque*. Nous verrons notamment que les équations d'ordre supérieur peuvent être représentées comme des équations vectorielles d'ordre 1, pour lesquelles nous pourrons exploiter les outils développés tout au long de ce cours.

8.1 Matrice compagnon

Dans cette section, on étudie quelques propriétés d'une matrice à la structure particulière que l'on appelle *matrice compagnon* d'un polynôme monique. Comme on va le voir plus tard, les matrices compagnons ont des propriétés très particulières qui vont nous permettre de calculer la solution d'équations différentielles et de récurrence.

Définition 8.1 (*Matrice compagnon*)

Soit un polynôme monique $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ de degré n . La *matrice compagnon* de p , notée $\mathbf{C}(p)$, est la matrice carrée d'ordre n définie comme suit :

$$\mathbf{C}(p) = \begin{pmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice compagnon $\mathbf{C}(p)$ a ceci de particulier que son polynôme caractéristique est égal au polynôme p au signe près, comme le montra la proposition suivante.

Proposition 8.1 (*Polynôme caractéristique matrice compagnon*)

La polynôme caractéristique de la matrice compagnon $\mathbf{C}(p) \in K^{n \times n}$ associée au polynôme

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

avec $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$ est

$$\det(\mathbf{C}(p) - \lambda\mathbf{I}) = (-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0) = (-1)^n p(\lambda).$$

Démonstration : Preuve par induction sur n .

— *Cas de base:* ($n = 1$)

La matrice compagnon est de la forme $\mathbf{C} = (-a_0)$ et par conséquent, $\det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}) = -\lambda - a_0 = -(\lambda + a_0)$.

— *Hypothèse inductive:*

Fixons un entier $n \geq 2$ et supposons que l'énoncé soit vrai pour tout $k < n$.

— *Étape inductive:*

Soit $\mathbf{C} \in K^{n \times n}$ une matrice compagnon, on a

$$\det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}_n) = \det \begin{pmatrix} -\lambda - a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & -\lambda \end{pmatrix}. \quad (8.1)$$

En appliquant la formule d'expansion de Laplace du déterminant (Eq. (1.15)) sur la dernière colonne de la matrice $\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}_n$, on a

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}_n) &= -a_0(-1)^{1+n} \det \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -\lambda \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} - \lambda(-1)^{(n+n)} \det(\mathbf{C}_{n-1} - \lambda\mathbf{I}_{n-1}) \\ &= (-1)^n a_0 - \lambda \det(\mathbf{C}_{n-1} - \lambda\mathbf{I}_{n-1}) \end{aligned}$$

où \mathbf{C}_{n-1} est une matrice compagnon d'ordre $n - 1$:

$$\mathbf{C}_{n-1} = \begin{pmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse inductive, on a

$$\det(\mathbf{C}_{n-1} - \lambda\mathbf{I}_{n-1}) = (-1)^{n-1}(\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \dots + a_2\lambda + a_1)$$

et donc

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}_n) &= (-1)^n a_0 - \lambda(-1)^{n-1}(\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \dots + a_2\lambda + a_1) \\ &= (-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0). \end{aligned}$$

□

Proposition 8.2

Les valeurs propres de la matrice compagnon $\mathbf{C}(p) \in K^{n \times n}$ associée au polynôme

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

avec $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$ sont toujours toutes de multiplicité géométrique égale à 1. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_q$, les valeurs propres distinctes de $\mathbf{C}(p)$, on a

$$m_g(\lambda_i) = 1 \text{ pour } i = 1, \dots, q.$$

Démonstration : Trivialement, les $n-1$ dernières lignes de la matrice $\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}_n$ (Eq. (8.1)) sont linéairement indépendantes et donc $\text{rang}(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}_n) \geq n - 1$. Par conséquent,

$$m_g(\lambda) = \dim(\text{Ker}(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}_n)) = n - \text{rang}(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}_n) \leq 1.$$

Comme $m_g(\lambda) \geq 1$, on a $m_g(\lambda) = 1$. □

Par la Proposition 6.6 et la Proposition 8.2, on déduit qu'une matrice compagnon $\mathbf{C}(p) \in K^{n \times n}$ est diagonalisable si et seulement si elle a n valeurs propres distinctes.

8.2 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Cette section est dédiée à la résolution d'équations différentielles, plus particulièrement linéaires et à coefficients constants. Comme son nom l'indique, une équation différentielle met en relation une fonction avec ses dérivées. L'exemple ci-dessous propose une des équations différentielles les plus courantes et classiques.

Exemple 8.1. Soit $x : \mathbb{R} \rightarrow K$ une fonction scalaire et soit $a \in K$ un coefficient scalaire, l'équation ci-dessous est une équation différentielle homogène linéaire scalaire à coefficients constants d'ordre 1 en x :

$$x'(t) = ax(t). \tag{8.2}$$

La solution de cette équation est donnée par $x(t) = ce^{at}$ avec $c \in K$; on a en effet $(ce^{at})' = a(ce^{at})$.

L'Eq. (8.2) de l'Exemple 8.1 admet plusieurs qualificatifs que nous explicitons ci-dessous.

Linéarité : Une équation différentielle est dite *linéaire* si elle se présente sous la forme d'une combinaison linéaire des différentes dérivées de x (c'est-à-dire sans faire intervenir de puissance ou d'autres fonctions dites *non linéaires*). Dans le cas contraire elle est dite *non linéaire*, comme par exemple les équations $x'(t) = ax^2(t)$ et $x'(t) = \sin(x(t))$.

Coefficients constants : Une équation différentielle dont les coefficients qui pondèrent les fonctions inconnues ne dépendent pas de t est dite à *coefficients constants*. L'équation $x'(t) = 3tx(t)$ n'est donc *pas* à coefficients constants (au contraire de l'Eq. (8.2)).

Homogénéité : Une équation différentielle est dite *homogène* si tous ces termes dépendent de la fonction x ou d'une de ses dérivées. À l'inverse, une équation présentant un terme indépendant est dite *non homogène*, comme par exemple $x'(t) = ax(t) + b$.

Dimension : Une équation différentielle dont la fonction x est de dimension 1 est dite *scalaire*. Dans le cas contraire elle est dite *vectorielle*. Par exemple l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - 5x_2(t) \end{cases} \quad (8.3)$$

dont la fonction inconnue est $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T : \mathbb{R} \rightarrow K^2$ est une équation différentielle vectorielle de dimension 2.

Ordre : L'*ordre* d'une équation différentielle dénote le degré maximal de différentiation auquel une fonction inconnue est soumise. Dans l'Exemple 8.1, Eq. (8.2) est d'ordre 1 car elle ne fait intervenir que la dérivée première de x . Par exemple, l'équation $x^{(3)}(t) + a_2x^{(2)}(t) + a_1x^{(1)}(t) = a_0x(t)$ est d'ordre 3.¹

Dans le cadre de ce cours nous nous limiterons aux équations différentielles linéaires à coefficients constants. Nous considérerons les cas homogène et non homogène ainsi que différents ordres et dimensions. En particulier, nous aborderons d'abord les équations différentielles vectorielles homogènes d'ordre 1, puis nous nous pencherons sur les équations scalaires d'ordre n . Nous montrerons notamment que ces dernières peuvent être reformulées comme des équations vectorielles d'ordre 1 à l'aide de la matrice compagnon.

8.2.1 Équations différentielles vectorielles d'ordre 1

— **Définition 8.2** (*Équation différentielle linéaire vectorielle d'ordre 1*) —

Un *système d'équations différentielles linéaires d'ordre 1* est un système différentiel de la forme

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

où les coefficients $a_{ij} \in K$ pour $i, j = 1, \dots, n$ et les fonctions $b_i : \mathbb{R} \rightarrow K$ pour $i = 1, \dots, n$ sont donnés. L'objectif est de déterminer les fonctions $x_i : \mathbb{R} \rightarrow K$ dérivables une fois telles que l'équation précédente est vérifiée pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Seules les dérivées premières des fonctions x_i interviennent dans l'équation donnée ci-dessus, il s'agit donc bien d'un système d'ordre 1. Observez de plus que l'équation est homogène si (et seulement si) $b_i(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $i = 1, \dots, n$. Posons

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Cette nouvelle notation matricielle permet de reformuler le système sous une forme proche de celle de l'Exemple 8.1 (dans le cas non homogène) comme suit :

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t). \quad (8.4)$$

Lorsque l'on impose des conditions initiales, le problème consistant à rechercher la solution d'une équation différentielle satisfaisant ces conditions initiales est appelé *problème de Cauchy*.

1. On note généralement x' et x'' les dérivées d'ordre 1 et 2, et $x^{(i)}$ la dérivée d'ordre i , si $i > 2$.

—**Définition 8.3** (*Problèmes de Cauchy (ou à conditions initiales)*)—

Soit l'équation différentielle vectorielle

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$$

avec $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, $\mathbf{b}(t)$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{x}_0 \in K^n$. Le problème \mathcal{P} suivant

$$\mathcal{P}: \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R} & \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) \\ & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (8.5)$$

est appelé *problème de Cauchy* où \mathbf{x}_0 est le *vecteur de conditions initiales* en t_0 .

—**Théorème 8.1** (*Unicité*)—

Tout problème de Cauchy de la forme Eq. (8.5) admet au plus une solution.

Démonstration : La preuve est omise dans le cadre de ce cours. □

L'existence des solutions du problème de Cauchy Eq. (8.5) **n'est pas** garantie pour tout terme indépendant $\mathbf{b}(t)$. Pour la suite de cette section, on considère des équations différentielles vectorielles homogènes ($\mathbf{b}(t) = \mathbf{0}$) pour lesquelles l'existence d'une solution est garantie.

—**Théorème 8.2** (*Existence*)—

Tout problème de Cauchy **homogène** de la forme Eq. (8.5) admet une solution.

Démonstration : La preuve est omise dans le cadre de ce cours. □

Dans le cas homogène, le problème de Cauchy (Eq. (8.5)) revient à résoudre

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

avec $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Cette équation est extrêmement similaire à (8.2), et sa solution l'est également, comme la proposition suivante le montre.

—**Proposition 8.3**—

Pour toute matrice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, la fonction vectorielle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : t \rightarrow f(t) = e^{\mathbf{A}t}$ est dérivable², et on a

$$f'(t) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}.$$

Démonstration : Pour rappel (Définition 6.6), on a

$$f(t) = e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (t\mathbf{A})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \mathbf{A}^k.$$

Par conséquent,

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} k t^{k-1} \mathbf{A}^k = \mathbf{A} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} \mathbf{A}^{k-1} \right) = \mathbf{A} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \mathbf{A}^k \right) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}.$$

De la même manière, en mettant en évidence la matrice \mathbf{A} à droite plutôt qu'à gauche dans l'équation précédente, on montre que $f'(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}$. □

² La dérivée d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ est simplement la matrice constituée de la dérivée de chacune de ses entrées: $[f'(t)]_{ij} = f'_{ij}(t)$ pour $i, j = 1, \dots, n$.

Corollaire 8.3

Soit $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, la solution du problème de Cauchy homogène $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ avec $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ est

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0.$$

Démonstration : Par la Proposition 8.3, on vérifie en effet que

$$\mathbf{x}'(t) = (e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0)' = (e^{\mathbf{A}t})' \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x}(t).$$

□

Remarque 8.1. La solution de $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ est $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0$ et non $\mathbf{x}_0 e^{\mathbf{A}t}$, qui n'est pas défini.

Par conséquent, la résolution d'un système différentiel linéaire d'ordre 1 se réduit au calcul de l'exponentielle de la matrice $(\mathbf{A}t)$ qui est étudié dans la Section 6.4.2.

Exemple 8.2. Soit le système d'équations différentielles linéaires suivant

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 4x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t) \end{cases}$$

avec $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$. On peut reformuler ce problème sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice \mathbf{A} est diagonalisable:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} \text{ avec } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on calcule facilement l'exponentielle matricielle de \mathbf{A} :

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^{-t} + e^{5t} & -2e^{-t} + 2e^{5t} \\ -e^{-t} + e^{5t} & e^{-t} + 2e^{5t} \end{pmatrix}.$$

La solution est

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^{-t} + e^{5t} & -2e^{-t} + 2e^{5t} \\ -e^{-t} + e^{5t} & e^{-t} + 2e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2e^{-t} + 2e^{5t} \\ e^{-t} + 2e^{5t} \end{pmatrix}.$$

8.2.2 Équations différentielles scalaires d'ordre n

Par opposition avec le cas *vectoriel* discuté précédemment, une équation différentielle *scalaire* implique une seule fonction inconnue.

Définition 8.4 (Équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre n)

Une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre n est une équation du type:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t),$$

ou bien

$$\sum_{j=0}^n a_j y^{(j)}(t) = f(t),$$

où les coefficients $a_j \in K$ (avec $a_n \neq 0$) et la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow K$ sont donnés. L'objectif est de déterminer une fonction $y: \mathbb{R} \rightarrow K$ dérivable n fois telle que l'équation précédente est vérifiée pour tout $t \in \mathbb{R}$.

L'équation de la définition ci-dessus fait intervenir les n premières dérivées de la fonction y , justifiant l'ordre n de cette dernière. De plus, les coefficients a_i ne dépendent pas de t , de sorte qu'elle est à coefficients constants. Finalement, observez que l'équation est homogène si (et seulement si) $f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exemple 8.3. *Considérons l'équation différentielle $y'' + iy' = e^t$. Une solution est donnée par la fonction $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $y(t) = e^{-it} + \frac{1}{2}(1-i)e^t$. En effet, calculer y' et y'' et les injecter dans l'équation mène à l'identité $e^t = e^t$, qui valide donc cette solution. Elle n'est toutefois pas unique : toute fonction du type $y(t) = A + Be^{-it} + \frac{1}{2}(1-i)e^t$ avec $A, B \in \mathbb{C}$ arbitraires est une solution acceptable pour cette équation. Fixons maintenant une condition initiale, par exemple en imposant $y(0) = \frac{1}{2}$ et $y'(0) = -\frac{i}{2}$. Dans ce cas, on peut identifier les paramètres A et B , et il n'y a plus qu'une seule fonction de type $y(t) = A + Be^{-it} + \frac{1}{2}(1-i)e^t$ qui satisfait également ces conditions: $y(t) = i - \frac{i}{2}e^{-it} + \frac{1}{2}(1-i)e^t$.*

Soit l'équation différentielle d'ordre n

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \quad (8.6)$$

normalisée de telle sorte que $a_n = 1$.

On peut réécrire (8.6) sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} y^{(n)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \\ y^{(n-2)}(t) \\ \vdots \\ y^{(1)}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} y^{(n-1)}(t) \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-3)}(t) \\ \vdots \\ y(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}(t)}. \quad (8.7)$$

Dès lors, en définissant le vecteur augmenté $\mathbf{x}(t) = (y^{(n-1)}(t), \dots, y'(t), y(t))^T$, (8.7) peut être reformulée sous la forme compacte

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t). \quad (8.8)$$

La matrice \mathbf{A} est la matrice compagnon associée au polynôme $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ (Définition 8.1) qui se déduit immédiatement de l'équation différentielle (Eq. (8.6))³.

On a donc reformulé notre équation différentielle scalaire d'ordre n (Eq. (8.6)) en un système d'équations différentielles d'ordre 1 (Eq. (8.8)) équivalent dont les solutions sont reliées par

$$y(t) = x_n(t).$$

On peut donc utiliser les résultats de la Section 8.2.1 où la matrice \mathbf{A} est la matrice compagnon de l'équation différentielle (Eq. (8.6)). Entre autres, le Théorème 8.1 garantit l'unicité de la solution et le Théorème 8.2 garantit son existence pour le cas homogène ($f(t) = 0$). De manière générale, l'existence d'une solution **n'est pas** garantie pour tout terme non homogène $f(t)$ ⁴.

Remarque 8.2. *On peut reformuler une équation différentielle linéaire (Définition 8.4) en une équation linéaire telle que décrite dans la Section 4.3. Soit l'équation différentielle*

$$\sum_{j=0}^n a_j y^{(j)}(t) = f(t), \quad (8.9)$$

3. On définit par abus de langage le *polynôme caractéristique de l'équation différentielle* (Eq. (8.6)) comme étant le polynôme caractéristique de la matrice compagnon (Eq. (8.7)) associée.

4. On verra plus loin une classe de fonction $f(t)$ (combinaison linéaire de polynôme-exponentielle) pour laquelle l'existence est garantie.

avec $a_j \in K$. On peut définir l'application linéaire

$$L : E \rightarrow F : L(y) = \sum_{j=0}^n a_j y^{(j)}(t)$$

avec $E = \{y : \mathbb{R} \rightarrow K \mid y \text{ est dérivable } n \text{ fois}\}$, l'espace vectoriel des fonctions dérivables n fois et F est l'espace des fonctions. On peut réécrire l'Eq. (8.9) en l'équation linéaire suivante

$$L(y) = f. \tag{8.10}$$

On peut réutiliser les résultats démontrés dans la Section 4.3 sur l'objet abstrait que sont les équations linéaires et les appliquer au cas particulier des équations différentielles. Il s'agit à nouveau d'un exemple du pouvoir unificateur de la notion d'espace vectoriel.

Proposition 8.4 (Ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire)

Les solutions y d'une équation différentielle scalaire d'ordre n

$$\sum_{j=0}^n a_j y^{(j)}(t) = f(t)$$

sont de la forme

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

où y_p est une solution particulière de cette équation et où y_h est une solution de l'équation différentielle homogène associée (obtenue en remplaçant $f(t)$ par 0 pour tout $t \in \mathbb{R}$).

Démonstration : Soit l'application linéaire L telle que défini dans la Remarque 8.2, en appliquant la Proposition 4.6, on a que l'ensemble des solutions \mathcal{S} est donné par

$$\mathcal{S} = \{y(t) = y_p(t) + y_h(t) \mid y_h \in \text{Ker}(L), L(y_p) = f\},$$

c'est-à-dire,

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^n a_j y_h^{(j)}(t) = 0 \\ \sum_{j=0}^n a_j y_p^{(j)}(t) = f(t). \end{cases}$$

□

Comme on va le voir, l'algèbre linéaire va nous permettre de calculer une base de $\text{Ker}(L)$, c'est-à-dire de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée. Hélas, il est plus difficile de trouver une solution particulière de l'équation non homogène (y_p), sauf dans quelques cas particulier de terme non homogène f .

Focalisons nous dans un premier temps sur le calcul de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle d'ordre n homogène.

Cas homogène

Considérons une équation différentielle linéaire homogène

$$\sum_{j=0}^n a_j y^{(j)}(t) = 0.$$

Comme on l'a dit, pour résoudre cette équation différentielle, on peut réutiliser les résultats de la Section 8.2.1, en particulier le Corollaire 8.3.

Mais grâce à la forme particulière des matrices compagnons et des propriétés qui en découlent, on peut calculer la solution sans devoir calculer explicitement l'exponentielle matricielle de \mathbf{A} .

Théorème 8.4 (*Solutions d'une équation différentielle homogène*)

Considérons l'équation différentielle homogène

$$\sum_{j=0}^n a_j y^{(j)}(t) = 0$$

soit $P \in \mathbb{C}_n[\lambda]$ son polynôme caractéristique et soit $\lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbb{C}$, les racines distinctes de P , avec les multiplicités respectives $m_1, \dots, m_q \in \mathbb{N}$. Alors, une base de l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 t}, & t e^{\lambda_1 t}, & \dots, & t^{m_1-1} e^{\lambda_1 t}, \\ \dots & & & \\ e^{\lambda_q t}, & t e^{\lambda_q t}, & \dots, & t^{m_q-1} e^{\lambda_q t} \end{array} \right\}.$$

Autrement dit, les solutions sont de la forme

$$y(t) = \sum_{i=1}^q p_i(t) e^{\lambda_i t}$$

où $p_i(t) \in \mathbb{C}_{m_i-1}[t]$ est un polynôme de degré $m_i - 1$.

Démonstration : Comme montré précédemment, on peut reformuler l'équation différentielle scalaire d'ordre n sous la forme vectorielle d'ordre 1 suivante

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

avec $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ et où $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est la matrice compagnon. Pour rappel, le nombre de blocs de Jordan associés à une valeur propre est égale à sa multiplicité géométrique et la somme des dimensions des blocs de Jordan associé à la même valeur propre est égal à sa multiplicité algébrique.

Comme par la Proposition 8.2, la matrice compagnon \mathbf{A} est telle que ses valeurs propres sont toutes de multiplicité géométrique égale à 1, on a

- il y a un seul bloc de Jordan associé à chaque valeur propre ;
- la dimension du bloc de Jordan associé à une valeur propre est égale à sa multiplicité algébrique.

Dit autrement, la factorisation de Jordan de \mathbf{A} est

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{J} = \text{diag} \{ \mathbf{J}_{m_1}(\lambda_1), \dots, \mathbf{J}_{m_q}(\lambda_q) \} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{m_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{J}_{m_q}(\lambda_q) \end{pmatrix}$$

avec $\mathbf{J}_{m_i}(\lambda_i) \in \mathbb{C}^{m_i \times m_i}$ où $m_i = m_a(\lambda_i)$.

On effectue le changement de variable $\mathbf{y}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(t)$ et on pose $\mathbf{y}_0 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0$. Dès lors, on obtient le système

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{J}\mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \end{cases}$$

On scinde le vecteur $\mathbf{y}(t) = (\mathbf{y}_1(t) \ \dots \ \mathbf{y}_q(t))^\top$ avec $\mathbf{y}_i(t)$ de dimension m_i et $\mathbf{y}_0 = (\mathbf{y}_1 \ \dots \ \mathbf{y}_q)^\top$ avec $\mathbf{y}_i \in \mathbb{C}^{m_i}$. On obtient alors les systèmes

$$\begin{cases} \mathbf{y}'_i(t) = \mathbf{J}_{m_i}(\lambda_i)\mathbf{y}_i(t) \\ \mathbf{y}_i(0) = \mathbf{y}_i. \end{cases} \quad \text{pour } i = 1, \dots, q$$

dont les solutions sont données par

$$\mathbf{y}_i(t) = e^{\mathbf{J}_{m_i}(\lambda_i)t}\mathbf{y}_i, \quad i = 1, \dots, q.$$

En utilisant la formule de la Proposition 6.10, on a

$$(\mathbf{y}_i(t))_j = \sum_{k=j}^{m_i} \frac{t^{k-j}}{(k-j)!} e^{t\lambda_i} (\mathbf{y}_i)_k = (\mathbf{y}_i(t))_j = \left(\sum_{k=j}^{m_i} \frac{t^{k-j}}{(k-j)!} (\mathbf{y}_i)_k \right) e^{\lambda_i t} \quad \text{pour } j = 1, \dots, m_i.$$

C'est-à-dire que l'entrée j de $\mathbf{y}_i(t)$ est de la forme $(\mathbf{y}_i(t))_j = q_{ij}(t)e^{\lambda_i t}$ où $q_{ij} \in \mathbb{C}_{m_i-j}[t]$ est un polynôme de degré $m_i - j$.

En effectuant le changement de variable inverse et en scindant $\mathbf{P} = (\mathbf{P}_1 \ \dots \ \mathbf{P}_q)$ avec $\mathbf{P}_i \in \mathbb{C}^{n \times m_i}$, on a

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^q \mathbf{P}_i \mathbf{y}_i(t).$$

Or ce qui nous intéresse est

$$y(t) = x_n(t) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{m_i} (\mathbf{P}_i)_{nj} (\mathbf{y}_i(t))_j = \sum_{i=1}^q \left(\sum_{j=1}^{m_i} (\mathbf{P}_i)_{nj} q_{ij}(t) \right) e^{\lambda_i t} = \sum_{i=1}^q p_i(t) e^{\lambda_i t}$$

où $p_i(t) \in \mathbb{C}_{m_i-1}[t]$ est un polynôme de degré $m_i - 1$. □

Exemple 8.4. *Considérons l'équation*

$$y'''(t) - (2+i)y'' + (1+2i)y' - iy = 0.$$

Le polynôme caractéristique est

$$p(\lambda) = \lambda^3 - (2+i)\lambda^2 + (1+2i)\lambda - i,$$

et ses racines sont $\lambda_1 = i$ avec $m_a(\lambda_1) = 1$, et $\lambda_2 = 1$ avec $m_a(\lambda_2) = 2$.

La solution générale est donc

$$y(t) = Ae^{it} + (Bt + C)e^t$$

avec $A, B, C \in \mathbb{C}$ arbitraires. En effet, d'après le Théorème 8.4, la solution générale est

$$y(t) = p_1(t)e^{it} + p_2(t)e^t$$

avec p_1 un polynôme arbitraire de degré 0 et p_2 un polynôme arbitraire de degré 1. Une base de l'espace des solutions est donnée par les trois fonctions (e^{it}, e^t, te^t) .

Exemple 8.5. *Considérons l'équation*

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

Le polynôme caractéristique est

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2,$$

et ses racines sont $\lambda_1 = -1 - i$ avec $m_a(\lambda_1) = 1$, et $\lambda_2 = -1 + i$ avec $m_a(\lambda_2) = 1$.

La solution générale est donc

$$y(t) = Ae^{(-1-i)t} + Be^{(-1+i)t}$$

avec $A, B \in \mathbb{C}$ arbitraires.

Cas non homogène

Considérons une équation différentielle linéaire non homogène

$$\sum_{j=0}^n a_j y^{(j)}(t) = f(t)$$

avec $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

Pour certains cas particulier de f , une solution existe et on peut même facilement trouver une solution particulière comme le déclare le théorème suivant.

Théorème 8.5 (Solution particulière)

Soit $f(t) = p(t)e^{rt}$ avec $r \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{C}_l[t]$. L'équation non homogène

$$\sum_{j=0}^n a_j y^{(j)}(t) = f(t)$$

admet toujours une solution de la forme

$$v(t) = t^m \cdot R_l(t) \cdot e^{rt}$$

où m est la multiplicité de r en tant que racine du polynôme caractéristique, et $R_l \in \mathbb{C}_l[t]$ est un polynôme de degré l à déterminer.

Démonstration : La preuve est omise dans le cadre de ce cours. □

On illustre finalement la méthodologie complète du calcul de la solution d'une équation différentielle non homogène avec l'exemple suivant.

Exemple 8.6. Cherchons l'unique solution du problème de Cauchy

$$\mathcal{P}: \begin{cases} y''' - 7y'' + 11y' - 5y = te^t \\ y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = \frac{15}{16}. \end{cases}$$

1. Solutions de l'équation homogène associée:

On cherche les solutions de

$$y''' - 7y'' + 11y' - 5y = 0.$$

Par la Proposition 8.1, le polynôme caractéristique est

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5.$$

Le polynôme caractéristique admet comme racines $\lambda = 5$ (racine simple) et $\lambda = 1$ (racine double). La solution générale de l'équation homogène associée est alors

$$y_h(t) = Ae^{5t} + (Bt + C)e^t,$$

avec $A, B, C \in \mathbb{C}$ arbitraires.

2. Solution particulière de l'équation non homogène:

Par le Théorème 8.5 et comme $r = 1$ est racine double du polynôme caractéristique, l'équation non homogène admet une solution particulière de la forme

$$y_p(t) = t^2 R(t) e^t,$$

avec $R \in \mathbb{C}_1[t]$. On peut donc écrire $y_p(t) = t^2(at + b)e^t$, et il faut déterminer les coefficients a et b . Pour cela, on calcule $y'_p(t), y''_p(t), y'''_p(t)$, on les remplace dans l'équation non homogène et on obtient

$(-24at + 6a - 8b)e^t = te^t$. Comme cette équation doit être vérifiée pour toute valeur de t , on en déduit les valeurs $a = -\frac{1}{24}, b = -\frac{1}{32}$. Finalement,

$$y_p(t) = t^2 \left(-\frac{1}{24}t - \frac{1}{32} \right) e^t.$$

3. Solution générale:

La solution générale de l'équation non homogène est

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ae^{5t} + (Bt + C)e^t + t^2 \left(-\frac{1}{24}t - \frac{1}{32} \right) e^t,$$

et il faut déterminer A, B, C pour que la condition initiale soit satisfaite. Pour cela, on calcule $y'(t), y''(t)$, on impose $y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = \frac{15}{16}$ et on obtient $A = 0, B = 0, C = 1$. L'unique solution du problème \mathcal{P} est donc la fonction

$$y(t) = \left(-\frac{1}{24}t^3 - \frac{1}{32}t^2 + 1 \right) e^t.$$

Remarque: les conditions initiales sont appliquées sur la solution générale et non sur la solution homogène.

Solutions réelles

L'exemple présenté dans l'Exemple 8.5 montre que même si les coefficients d'une équation différentielle sont réels, elle peut avoir des solutions complexes. Cependant, lorsqu'on utilise une équation différentielle pour modéliser un phénomène physique où la fonction inconnue représente une grandeur physique, on s'intéresse uniquement aux solutions *réelles* de l'équation différentielle.

Considérons à nouveau une équation différentielle linéaire et l'équation homogène associée

$$\sum_{j=0}^n a_j y^{(j)}(t) = f(t) \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^n a_j y^{(j)}(t) = 0.$$

Si tous les coefficients a_j sont réels et si f est une fonction réelle, c'est-à-dire $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, parmi les solutions complexes on peut identifier les solutions réelles.

Théorème 8.6 (Cas homogène)

Séparons les racines réelles et les racines non réelles distinctes du polynôme caractéristique

$$r_1, \dots, r_q \in \mathbb{R}, \quad s_1, \dots, s_t \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_t \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

avec multiplicité respective $m_1, \dots, m_q, n_1, \dots, n_t, n_1, \dots, n_t$. Posons $s_k = b_k + ic_k$.

Les solutions réelles de l'équation homogène sont les fonctions du type

$$y(t) = \sum_{j=1}^q P_j(t) e^{r_j t} + \sum_{k=1}^t (B_k(t) \cos(c_k t) + C_k(t) \sin(c_k t)) e^{b_k t}$$

avec $P_j \in \mathbb{R}_{m_j-1}[x]$ et $B_k, C_k \in \mathbb{R}_{n_k-1}[x]$ arbitraires.

Démonstration : On sait que la solution générale complexe de l'équation homogène est

$$y(t) = \sum_{j=1}^q P_j(t) e^{r_j t} + \sum_{k=1}^t Q_k(t) e^{s_k t} + \sum_{k=1}^t R_k(t) e^{\bar{s}_k t}$$

avec $P_j \in \mathbb{C}_{m_j-1}[t]$ et $Q_k, R_k \in \mathbb{C}_{n_k-1}[t]$ arbitraires. En utilisant la définition de l'exponentielle complexe $e^{b+ic} = e^b(\cos(c) + i \sin(c))$, on a

$$y(t) = \sum_{j=1}^q P_j(t)e^{r_j t} + \sum_{k=1}^t [(Q_k(t) + R_k(t)) \cos(c_k t) + i(Q_k(t) - R_k(t)) \sin(c_k t)]e^{b_k t}.$$

Pour que y soit réelle, il faut que $P_j \in \mathbb{R}_{m_j-1}[x]$ et que $Q_k = \overline{R_k}$. Si on pose $Q_k(t) = B_k(t) + iC_k(t)$, avec $B_k, C_k \in \mathbb{R}_{n_k-1}[x]$, et si on remplace dans la deuxième écriture de $y(t)$, on a la thèse. \square

Exemple 8.7. Reprenons l'Exemple 8.5. La solution générale complexe est $y(t) = Ae^{(-1-i)t} + Be^{(-1+i)t}$ avec $A, B \in \mathbb{C}$ arbitraires. La solution générale réelle est donc $y(t) = e^{-t}(D \cos(t) + E \sin(t))$, avec $D, E \in \mathbb{R}$ arbitraires.

Exemple 8.8. Considérons l'équation $y''' - y'' + y' - y = 0$. Les racines du polynôme caractéristique sont $1, i, -i$. La solution générale complexe est donc $y(t) = Ae^t + Be^{it} + Ce^{-it}$, avec $A, B, C \in \mathbb{C}$ arbitraires. La solution générale réelle est $y(t) = De^t + E \cos(t) + F \sin(t)$, avec $D, E, F \in \mathbb{R}$ arbitraires.

Pour trouver une solution réelle particulière de l'équation non homogène, les techniques dépendent de la fonction $f(t)$. Dans le cas particulier où $f(t) = p(t) \cos(bt)$ ou $f(t) = p(t) \sin(bt)$ avec $b \in \mathbb{R}$ et $p(t) \in \mathbb{R}_q[t]$, on peut facilement trouver une solution particulière réelle.

Théorème 8.7 (Cas non homogène)

Si $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une solution complexe de l'équation non homogène

$$\sum_{j=0}^n a_j y^{(j)}(t) = p(t)e^{ibt}$$

avec $a_j \in \mathbb{R}$ pour $j = 0, \dots, n$ et $b \in \mathbb{R}$, alors

1. $\Re(y): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution réelle de $\sum a_j y^{(j)}(t) = p(t) \cos(bt)$.
2. $\Im(y): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution réelle de $\sum a_j y^{(j)}(t) = p(t) \sin(bt)$.

Démonstration : Si $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une solution complexe de l'équation non homogène, alors

1. $\Re(y): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution réelle de $\sum a_j y^{(j)}(t) = \Re(f(t))$.
2. $\Im(y): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution réelle de $\sum a_j y^{(j)}(t) = \Im(f(t))$.

\square

Exemple 8.9. Considérons l'équation $y'' + 2y = \sin(t)$. Le polynôme caractéristique admet comme racines $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$. La solution générale réelle de l'équation homogène associée est donc $y_h(t) = A \cos(\sqrt{2}t) + B \sin(\sqrt{2}t)$, avec $A, B \in \mathbb{R}$ arbitraires (Théorème 8.6). Pour trouver une solution particulière réelle de l'équation non homogène, on utilise le fait que $\sin(t) = \Im(e^{it})$ et le Théorème 8.7. On peut donc d'abord chercher une solution particulière complexe de l'équation $y'' + 2y = e^{it}$. Celle-ci est $v(t) = e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$, et sa partie imaginaire est $y_p(t) = \Im(v(t)) = \sin(t)$. Finalement, la solution réelle générale de l'équation non homogène est donnée par $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = A \cos(\sqrt{2}t) + B \sin(\sqrt{2}t) + \sin(t)$, avec $A, B \in \mathbb{R}$ arbitraires.

8.3 Équations de récurrence linéaires à coefficients constants

Cette section est dédiée à la résolution d'équations de récurrence, plus particulièrement linéaires et à coefficients constants. Comme son nom l'indique, une équation de récurrence est une formule qui exprime un itéré de la suite en fonction d'un ou plusieurs termes qui la précèdent dans la suite.

Définition 8.5 (Suite)

Une *suite* sur un corps K est une séquence d'éléments appartenant à K :

$$u_0, u_1, u_2, \dots$$

avec $u_i \in K$ pour $i \in \mathbb{N}$.

On peut interpréter une suite u_0, u_1, u_2, \dots comme un fonction⁵ $x[k] : \mathbb{N} \rightarrow K$ (avec $x[k] = u_k$ pour $k \in \mathbb{N}$) où on peut interpréter k comme une variable "temporelle", prenant ses valeurs parmi les nombres naturels. On interprète alors le nombre $x[k] \in K$ comme la valeur de la fonction x à l'instant k .

L'exemple ci-dessous propose une des équations de récurrence les plus courantes et classiques.

Exemple 8.10. Soit $x : \mathbb{N} \rightarrow K$ une suite scalaire et soit $a \in K$ un coefficient scalaire, l'équation ci-dessous est une équation de récurrence homogène linéaire scalaire à coefficients constants d'ordre 1 en x :

$$x[k + 1] = ax[k]. \tag{8.11}$$

La solution de cette équation est donnée par $x[k] = ca^k$ avec $c \in K$; on a en effet $ca^{k+1} = a(ca^k)$.

L'Eq. (8.11) de l'Exemple 8.10 admet plusieurs qualificatifs que nous explicitons ci-dessous.

Linéarité : Une équation de récurrence est dite *linéaire* si elle se présente sous la forme d'une combinaison linéaire des différents itérés de la suite x (c'est-à-dire sans faire intervenir de puissance ou d'autres fonctions dites *non linéaires*). Dans le cas contraire elle est dite *non linéaire*, comme par exemple les équations $x[k+1] = a(x[k])^2$ et $x[k + 1] = \sin(x[k])$.

Coefficients constants : Une équation de récurrence dont les coefficients qui pondèrent les éléments de la suite ne dépendent pas de k est dite à *coefficients constants*. L'équation $x[k + 1] = 3kx[k]$ n'est donc *pas* à coefficients constants (au contraire de l'Eq. (8.11)).

Homogénéité : Une équation de récurrence est dite *homogène* si tous ces termes dépendent d'un itéré de la suite x . A l'inverse, une équation présentant un terme indépendant est dite *non homogène*, comme par exemple $x[k + 1] = ax[k] + b$.

Dimension : Une équation de récurrence dont la suite x est de dimension 1 est dite *scalaire*. Dans le cas contraire elle est dite *vectorielle*. Par exemple l'équation de récurrence suivante

$$\begin{cases} x_1[k + 1] = 3x_1[k] + 2x_2[k] \\ x_2[k + 1] = x_1[k] - 5x_2[k] \end{cases} \tag{8.12}$$

dont la suite inconnue est $x[k] = (x_1[k], x_2[k])^\top : \mathbb{N} \rightarrow K^2$ est une équation de récurrence vectorielle de dimension 2.

Ordre : Une équation de récurrence est dite d'*ordre* n lorsque le terme $k + n$ de la suite est donné en fonction des n précédents c'est-à-dire des termes de $k, k + 1, k + 2, \dots, k + n - 1$. Dans l'Exemple 8.10, Eq. (8.11) est d'ordre 1 car le terme $x[k + 1]$ ne dépend que du terme précédent $x[k]$. Par exemple, l'équation $x[k + 3] = a_2x[k + 2] + a_1x[k + 1] + a_0x[k]$ est d'ordre 3.

Dans le cadre de ce cours nous nous limiterons aux équations de récurrence linéaires à coefficients constants. Nous considérerons les cas homogène et non homogène ainsi que différents ordres et dimensions. En particulier, nous aborderons d'abord les équations de récurrence vectorielles homogènes d'ordre 1, puis nous pencherons sur les équations scalaires d'ordre n . Nous montrerons notamment que ces dernières peuvent être reformulées comme des équations de récurrence vectorielle d'ordre 1 à l'aide de la matrice compagnon.

5. On préfère la notation $x[k]$ à $x(k)$ pour insister sur le fait que son domaine de définition est \mathbb{N} et non \mathbb{R} .

8.3.1 Équations de récurrence vectorielles d'ordre 1

— **Définition 8.6** (*Équation de récurrence linéaire vectorielle d'ordre 1*) —

Un système d'équations de récurrence linéaire d'ordre 1 est un système de la forme

$$\begin{cases} x_1[k+1] = a_{11}x_1[k] + a_{12}x_2[k] + \dots + a_{1n}x_n[k] + b_1[k] \\ \vdots \\ x_n[k+1] = a_{n1}x_1[k] + a_{n2}x_2[k] + \dots + a_{nn}x_n[k] + b_n[k] \end{cases}$$

où les coefficients $a_{ij} \in K$ pour $i, j = 1, \dots, n$ et les suites $b_i: \mathbb{N} \rightarrow K$ pour $i = 1, \dots, n$ sont donnés. L'objectif est de déterminer les suites $x_i: \mathbb{N} \rightarrow K$ telles que l'équation précédente est vérifiée pour tout $k \in \mathbb{N}$.

L'équation ci-dessus est d'ordre 1 étant donné que la valeur de chacune des suites est définie exclusivement sur base de leurs valeurs à l'itéré précédent. Par ailleurs, observez que l'équation est homogène si (et seulement si) $b_i[k] = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $i = 1, \dots, n$. Posons

$$\mathbf{x}[k] = \begin{pmatrix} x_1[k] \\ \vdots \\ x_n[k] \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}[k+1] = \begin{pmatrix} x_1[k+1] \\ \vdots \\ x_n[k+1] \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b}[k] = \begin{pmatrix} b_1[k] \\ \vdots \\ b_n[k] \end{pmatrix}.$$

Cette nouvelle notation matricielle permet de reformuler le système sous une forme proche de celle de l'Exemple 8.10 (dans le cas non homogène) comme suit :

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{b}[k]. \tag{8.13}$$

Lorsque l'on impose des conditions initiales, le problème consistant à rechercher la solution d'une équation de récurrence satisfaisant ces conditions initiales est appelé *problème à conditions initiales*.

— **Définition 8.7** (*Problème à conditions initiales*) —

Soit l'équation de récurrence vectorielle

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{b}[k]$$

avec $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, $\mathbf{b}[k]$, $k_0 \in \mathbb{N}$ et $\mathbf{x}_0 \in K^n$. Le problème \mathcal{P} suivant

$$\mathcal{P}: \begin{cases} \forall k \in \mathbb{N} & \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{b}[k] \\ & \mathbf{x}[k_0] = \mathbf{x}_0 \end{cases} \tag{8.14}$$

est appelé *problème à conditions initiales* où \mathbf{x}_0 est le *vecteur de conditions initiales* en k_0 .

— **Théorème 8.8** (*Unicité*) —

Tout problème à conditions initiales de la forme Eq. (8.14) admet au plus une solution.

Démonstration : La preuve est omise dans le cadre de ce cours. □

L'existence des solutions du problème à conditions initiales Eq. (8.14) **n'est pas** garantie pour tout terme indépendant $\mathbf{b}[k]$. Pour la suite de cette section, on considère des équations de récurrence vectorielles homogènes ($\mathbf{b}[k] = \mathbf{0}$) pour lesquelles l'existence d'une solution est garantie.

Théorème 8.9 (Existence)

Tout problème à conditions initiales **homogène** de la forme Eq. (8.14) admet une solution.

Démonstration : La preuve est omise dans le cadre de ce cours. \square

Pour résoudre le problème à conditions initiales homogène (Eq. (8.14)), on va d'abord considérer le cas $n = 1$, c'est-à-dire l'équation de récurrence

$$x[k+1] = ax[k]$$

avec $a \in K$ et la condition initiale $x[0] = x_0 \in K$. La solution de cette équation est $x[k] = a^k x_0$.

On peut montrer un résultat similaire pour le cas matriciel.

Théorème 8.10

Soit $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, la solution du problème à conditions initiales homogène $\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k]$ avec $\mathbf{x}[0] = \mathbf{x}_0$ est

$$\mathbf{x}[k] = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0.$$

Démonstration : Trivial. \square

Notons que la solution est $\mathbf{x}[k] = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0$ et non $\mathbf{x}_0 \mathbf{A}^k$ qui n'est pas de dimension compatible.

Par conséquent, la résolution d'un système de récurrence linéaire d'ordre 1 se réduit au calcul des puissances de la matrice \mathbf{A} qui est étudié dans la Section 6.4.1.

Exemple 8.11. Soit le système d'équations de récurrence linéaires suivant

$$\begin{cases} x_1[k+1] = x_1[k] + 4x_2[k] \\ x_2[k+1] = 2x_1[k] + 3x_2[k] \end{cases}$$

avec $x_1[0] = 0$, $x_2[0] = 1$. On peut reformuler ce problème sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}} \begin{pmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice \mathbf{A} est diagonalisable:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} \text{ avec } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on calcule facilement les puissances de \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 5^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2(-1)^k + 5^k & -2(-1)^k + 2 \cdot 5^k \\ -(-1)^k + 5^k & (-1)^k + 2 \cdot 5^k \end{pmatrix}.$$

La solution est

$$\begin{pmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{pmatrix} = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2(-1)^k + 5^k & -2(-1)^k + 2 \cdot 5^k \\ -(-1)^k + 5^k & (-1)^k + 2 \cdot 5^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2(-1)^k + 2 \cdot 5^k \\ (-1)^k + 2 \cdot 5^k \end{pmatrix}.$$

8.3.2 Équations de récurrence scalaires d'ordre n

Par opposition avec le cas *vectoriel* discuté précédemment, une équation de récurrence *scalaire* implique une seule suite inconnue.

— **Définition 8.8** (*Équation de récurrence linéaire à coefficients constants d'ordre n*) —

Une *équation de récurrence linéaire à coefficients constants d'ordre n* est une équation du type:

$$a_n y[k+n] + a_{n-1} y[k+n-1] + \dots + a_1 y[k+1] + a_0 y[k] = f[k], \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

ou bien

$$\sum_{j=0}^n a_j y[k+j] = f[k], \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

où les coefficients $a_j \in K$ (avec $a_n \neq 0$) et la suite $f: \mathbb{N} \rightarrow K$ sont donnés. L'objectif est de déterminer une suite $y: \mathbb{N} \rightarrow K$ telle que l'équation précédente est vérifiée pour tout $k \in \mathbb{N}$.

L'équation ci-dessus caractérise la valeur de la suite y sur base des n précédentes valeurs, et est donc d'ordre n . De plus, les coefficients a_i ne dépendent pas de l'itéré k , l'équation est donc à coefficients constants. Finalement, observez que l'équation est homogène si (et seulement si) $f[k] = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Soit l'équation de récurrence d'ordre n

$$a_n y[k+n] + a_{n-1} y[k+n-1] + \dots + a_1 y[k+1] + a_0 y[k] = f[k] \quad (8.15)$$

normalisée de telle sorte que $a_n = 1$.

On peut réécrire (8.15) sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} y[k+n] \\ y[k+n-1] \\ y[k+n-2] \\ \vdots \\ y[k+1] \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} y[k+n-1] \\ y[k+n-2] \\ y[k+n-3] \\ \vdots \\ y[k] \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} f[k] \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}[k]} \quad (8.16)$$

qui à son tour, en définissant le vecteur augmenté $\mathbf{x}[k] = (y[k+n-1], \dots, y[k+1], y[k])^\top$, peut être réécrite sous forme compacte

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{b}[k]. \quad (8.17)$$

La matrice \mathbf{A} est la matrice compagnon associée au polynôme $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ (Définition 8.1) qui se déduit immédiatement de l'équation de récurrence (Eq. (8.15))⁶.

On a donc reformulé notre équation de récurrence scalaire d'ordre n (Eq. (8.15)) en un système d'équations de récurrence d'ordre 1 (Eq. (8.17)) équivalent dont les solutions sont reliées par

$$y[k] = x_n[k].$$

On peut donc utiliser les résultats de la Section 8.3.1 où la matrice \mathbf{A} est la matrice compagnon de l'équation de récurrence (Eq. (8.15)). Entre autres, le Théorème 8.8 garantit l'unicité de la solution et le Théorème 8.9 garantit son existence pour le cas homogène ($f[k] = 0$). De manière générale, l'existence d'une solution **n'est pas** garantie pour tout terme non homogène $f[k]$ ⁷.

6. On définit par abus de langage le *polynôme caractéristique de l'équation de récurrence* (Eq. (8.15)) comme étant le polynôme caractéristique de la matrice compagnon (Eq. (8.16)) associée.

7. On verra plus loin une classe de suite $f[k]$ (combinaison linéaire de polynôme-puissance) pour laquelle l'existence est garantie.

Remarque 8.3. On peut reformuler une équation de récurrence linéaire (Définition 8.8) en une équation linéaire telle que décrite dans la Section 4.3. Soit l'équation de récurrence

$$\sum_{j=0}^n a_j y[k+j] = f[k], \quad (8.18)$$

avec $a_j \in K$. On peut définir l'application linéaire

$$L : E \rightarrow F : L(y) = \sum_{j=0}^n a_j y[k+j]$$

avec $E = \{y : \mathbb{N} \rightarrow K\}$ et F , l'espace vectoriel des suites. On peut réécrire l'Eq. (8.18) en l'équation linéaire suivante

$$L(y) = f. \quad (8.19)$$

On peut réutiliser les résultats démontrés dans la Section 4.3 sur l'objet abstrait que sont les équations linéaires et les appliquer au cas particulier des équations de récurrence. Il s'agit à nouveau d'un exemple du pouvoir unificateur de la notion d'espace vectoriel.

Proposition 8.5 (Ensemble des solutions d'une équation de récurrence linéaire)

Les solutions y d'une équation de récurrence scalaire d'ordre n

$$\sum_{j=0}^n a_j y[k+j] = f[k]$$

sont de la forme

$$y[k] = y_h[k] + y_p[k]$$

où y_p est une solution particulière de cette équation et où y_h est une solution de l'équation de récurrence homogène associée (obtenue en remplaçant $f[k]$ par 0 pour tout $k \in \mathbb{N}$).

Démonstration : Soit l'application linéaire L telle que défini dans la Remarque 8.3, en appliquant la Proposition 4.6, on a que l'ensemble des solutions \mathcal{S} est donné par

$$\mathcal{S} = \{y[k] = y_p[k] + y_h[k] \mid y_h \in \text{Ker}(L), L(y_p) = f\},$$

c'est-à-dire,

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^n a_j y_h[k+j] = 0 \\ \sum_{j=0}^n a_j y_p[k+j] = f[k]. \end{cases}$$

□

Comme on va le voir, l'algèbre linéaire va nous permettre de calculer une base de $\text{Ker}(L)$, c'est-à-dire de l'ensemble des solutions de l'équation de récurrence homogène associée. Hélas, il est plus difficile de trouver une solution particulière de l'équation non homogène (y_p), sauf dans quelques cas particulier de terme non homogène f .

Focalisons nous dans un premier temps sur le calcul de l'ensemble des solutions d'une équation de récurrence d'ordre n homogène.

Cas homogène

Considérons une équation de récurrence linéaire homogène

$$\sum_{j=0}^n a_j y[k+j] = 0.$$

Comme on l'a dit, pour résoudre cette équation de récurrence, on peut réutiliser les résultats de la Section 8.3.1, en particulier le Théorème 8.10.

Mais grâce à la forme particulière des matrices compagnons et des propriétés qui en découlent, on peut calculer la solution sans devoir calculer explicitement les puissances matricielles de \mathbf{A} .

— Théorème 8.11 (Solutions d'une équation de récurrence homogène) —

Considérons l'équation de récurrence homogène

$$\sum_{j=0}^n a_j y[k+j] = 0, \forall k \in \mathbb{N}$$

soit $P \in \mathbb{C}_n[\lambda]$ son polynôme caractéristique et soit $\lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbb{C}$, les racines distinctes de P , avec les multiplicités respectives $m_1, \dots, m_q \in \mathbb{N}$. Alors, une base de l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{cccc} \lambda_1^k, & k\lambda_1^k, & \dots, & k^{m_1-1}\lambda_1^k, \\ \dots & & & \\ \lambda_q^k, & k\lambda_q^k, & \dots, & k^{m_q-1}\lambda_q^k, \end{array} \right\}.$$

Autrement dit, les solutions sont de la forme

$$y[k] = \sum_{i=1}^q p_i(k) \lambda_i^k$$

où $p_i(k) \in \mathbb{C}_{m_i-1}[k]$ est un polynôme de degré $m_i - 1$.

Démonstration : Comme montré précédemment, on peut reformuler l'équation de récurrence scalaire d'ordre n sous la forme vectorielle d'ordre 1 suivante

$$\begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] \\ \mathbf{x}[0] = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

avec $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ et où $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est la matrice compagnon. Pour rappel, le nombre de blocs de Jordan associés à une valeur propre est égal à sa multiplicité géométrique et la somme des dimensions des blocs de Jordan associés à la même valeur propre est égale à sa multiplicité algébrique.

Comme par la Proposition 8.2, la matrice compagnon \mathbf{A} est telle que ses valeurs propres sont toutes de multiplicité géométrique égale à 1, on a

- il y a un seul bloc de Jordan associé à chaque valeur propre ;
- la dimension du bloc de Jordan associé à une valeur propre est égale à sa multiplicité algébrique.

Dit autrement, la factorisation de Jordan de \mathbf{A} est

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{J} = \text{diag} \{ \mathbf{J}_{m_1}(\lambda_1), \dots, \mathbf{J}_{m_q}(\lambda_q) \} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{m_1}(\lambda_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{J}_{m_q}(\lambda_q) & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

avec $\mathbf{J}_{m_i}(\lambda_i) \in \mathbb{C}^{m_i \times m_i}$ où $m_i = m_a(\lambda_i)$.

On effectue le changement de variable $\mathbf{y}[k] = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}[k]$ et on pose $\mathbf{y}_0 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0$. Dès lors, on obtient le système

$$\begin{cases} \mathbf{y}[k+1] = \mathbf{J}\mathbf{y}[k] \\ \mathbf{y}[0] = \mathbf{y}_0. \end{cases}$$

On scinde le vecteur $\mathbf{y}[k] = (\mathbf{y}_1[k] \ \dots \ \mathbf{y}_q[k])^\top$ avec $\mathbf{y}_i[k]$ de dimension m_i et $\mathbf{y}_0 = (\mathbf{y}_1 \ \dots \ \mathbf{y}_q)^\top$ avec $\mathbf{y}_i \in \mathbb{C}^{m_i}$. On obtient alors les systèmes

$$\begin{cases} \mathbf{y}_i[k+1] = \mathbf{J}_{m_i}(\lambda_i)\mathbf{y}_i[k] \\ \mathbf{y}_i[0] = \mathbf{y}_i. \end{cases} \quad \text{pour } i = 1, \dots, q$$

dont les solutions sont données par

$$\mathbf{y}_i[k] = \mathbf{J}_{m_i}(\lambda_i)^k \mathbf{y}_i, \quad i = 1, \dots, q.$$

En utilisant la formule de la Proposition 6.9, on a

$$(\mathbf{y}_i[k])_j = \sum_{l=j}^{m_i} \binom{k}{l-j} \lambda_i^{k-(l-j)} (\mathbf{y}_i)_l = \left(\sum_{l=j}^{m_i} \binom{k}{l-j} \lambda_i^{-(l-j)} (\mathbf{y}_i)_l \right) \lambda_i^k \quad \text{pour } j = 1, \dots, m_i.$$

C'est-à-dire que l'entrée j de $\mathbf{y}_i[k]$ est de la forme $(\mathbf{y}_i[k])_j = q_{ij}(k)\lambda_i^k$ où $q_{ij} \in \mathbb{C}_{m_i-j}[k]$ est un polynôme de degré $m_i - j$.

En effectuant le changement de variable inverse et en scindant $\mathbf{P} = (\mathbf{P}_1 \ \dots \ \mathbf{P}_q)$ avec $\mathbf{P}_i \in \mathbb{C}^{n \times m_i}$, on a

$$\mathbf{x}[k] = \mathbf{P}\mathbf{y}[k] = \sum_{i=1}^q \mathbf{P}_i \mathbf{y}_i[k].$$

Or ce qui nous intéresse est

$$y[k] = x_n[k] = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{m_i} (\mathbf{P}_i)_{nj} (\mathbf{y}_i[k])_j = \sum_{i=1}^q \left(\sum_{j=1}^{m_i} (\mathbf{P}_i)_{nj} q_{ij}(k) \right) \lambda_i^k = \sum_{i=1}^q p_i(k) \lambda_i^k$$

où $p_i(k) \in \mathbb{C}_{m_i-1}[k]$ est un polynôme de degré $m_i - 1$. □

Exemple 8.12. *Considérons l'équation de récurrence d'ordre 3 suivante*

$$y[k+3] - 7y[k+2] + 16y[k+1] - 12y[k] = 0.$$

Le polynôme caractéristique est

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12,$$

et ses racines sont $\lambda_1 = 3$ avec $m_a(\lambda_1) = 1$, et $\lambda_2 = 2$ avec $m_a(\lambda_2) = 2$.

La solution générale est donc

$$y[k] = A\lambda_1^k + (Bk + C)\lambda_2^k$$

avec $A, B, C \in \mathbb{C}$ arbitraires. En effet, d'après le Théorème 8.11, la solution générale est

$$y[k] = p_1(k)\lambda_1^k + p_2(k)\lambda_2^k$$

avec p_1 un polynôme arbitraire de degré 0 et p_2 un polynôme arbitraire de degré 1. Une base de l'espace des solutions est donnée par les trois suites $(\lambda_1^k, \lambda_2^k, k\lambda_2^k)$.

Cas non homogène

Considérons une équation de récurrence linéaire non homogène

$$\sum_{j=0}^n a_j y[k+j] = f[k]$$

avec $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$.

Pour certains cas particulier de f , une solution existe et on peut même facilement trouver une solution particulière comme le déclare le théorème suivant.

Théorème 8.12 (Solution particulière)

Soit $f[k] = p[k]r^k$ avec $r \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{C}_l[k]$. L'équation non homogène

$$\sum_{j=0}^n a_j y[k+j] = f[k]$$

admet toujours une solution de la forme

$$y_p[k] = k^m \cdot R_l(k) \cdot r^k$$

où m est la multiplicité de r en tant que racine du polynôme caractéristique, et $R_l \in \mathbb{C}_l[k]$ est un polynôme de degré l à déterminer.

Démonstration : La preuve est omise dans le cadre de ce cours. □

On illustre finalement la méthodologie complète du calcul de la solution d'une équation de récurrence non homogène avec l'exemple suivant.

Exemple 8.13. Cherchons l'unique solution du problème à conditions initiales

$$\mathcal{P}: \begin{cases} y[k+3] - 7y[k+2] + 11y[k+1] - 5y[k] = k1^k \\ y[0] = 0, y[1] = \frac{5}{96}, y[2] = \frac{1}{1536}. \end{cases}$$

1. Solutions de l'équation homogène associée:

On cherche les solutions de

$$y[k+3] - 7y[k+2] + 11y[k+1] - 5y[k] = 0.$$

Par la Proposition 8.1, le polynôme caractéristique est

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5.$$

Le polynôme caractéristique admet comme racines $\lambda = 5$ (racine simple) et $\lambda = 1$ (racine double). La solution générale de l'équation homogène associée est alors

$$y_h[k] = A5^k + (Bk + C)1^k = A5^k + Bk + C,$$

avec $A, B, C \in \mathbb{C}$ arbitraires.

2. Solution particulière de l'équation non homogène:

Le terme non homogène est de la forme $k1^k$. Donc par le Théorème 8.12 et comme $r = 1$ est racine double du polynôme caractéristique, l'équation non homogène admet une solution particulière de la forme

$$y_p[k] = k^2 R[k]1^k,$$

avec $R \in \mathbb{C}_1[k]$. On peut donc écrire $y_p[k] = k^2(ak + b)$, et il faut déterminer les coefficients a et b . Pour cela, on calcule $y_p[k + 1], y_p[k + 2], y_p[k + 3]$, on les remplace dans l'équation non homogène et on obtient $(-24ak - 18a - 8b)1^k = k1^k$. Comme cette équation doit être vérifiée pour toute valeur de k , on en déduit les valeurs $a = -\frac{1}{24}, b = \frac{3}{32}$. Finalement,

$$y_p[k] = k^2 \left(-\frac{1}{24}k + \frac{3}{32} \right).$$

3. Solution générale:

La solution générale de l'équation non homogène est

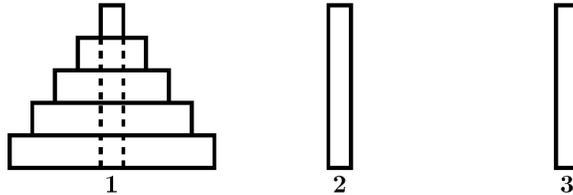
$$y[k] = y_h[k] + y_p[k] = A5^k + (Bk + C) + k^2 \left(-\frac{1}{24}k + \frac{3}{32} \right),$$

et il faut déterminer A, B, C pour que la condition initiale soit satisfaite. Pour cela, on impose $y[0] = 0, y[1] = \frac{5}{96}, y[2] = \frac{1}{1536}$ et on obtient $A = -1, B = 4, C = 1$. L'unique solution du problème \mathcal{P} est donc la suite

$$y[k] = -5^k + (5k + 1) + k^2 \left(-\frac{1}{24}k + \frac{3}{32} \right).$$

Notons que les conditions initiales sont appliquées sur la solution générale et non sur la solution homogène.

Exemple 8.14. Le problème des tours de Hanoï donne lieu au type d'équation qui nous occupe ici. Considérons k disques de diamètres différents. Ces disques peuvent être empilés les uns sur les autres, autour de trois axes, avec la restriction qu'aucun disque ne peut se trouver au-dessus d'un disque plus petit. Dans l'état initial, les k disques se trouvent autour de l'axe 1. On désire déplacer les disques, un par un, de telle façon qu'ils se trouvent finalement autour de l'axe 3. On demande de minimiser le nombre de déplacements.



Soit $y[k]$, le nombre minimum de déplacements pour le problème des k disques. La solution optimale relative à $k + 1$ disques se déduit de celle relative à k disques, comme suit.

1. Déplacer les k disques supérieurs de l'axe 1 vers l'axe 2, en $y[k]$ étapes ;
2. Déplacer le disque inférieur restant vers l'axe 3, en 1 étape ;
3. Déplacer les k disques de l'axe 2 vers l'axe 3, en $y[k]$ étapes.

Dès lors, $y[k + 1] = y[k] + 1 + y[k]$, il vient l'équation de récurrence que voici

$$y[k + 1] = 2y[k] + 1$$

avec la valeur initiale $y[0] = 0$. On obtient ainsi $y[1] = 1, y[2] = 3, y[3] = 7, y[4] = 15$, etc. Cherchons l'unique solution du problème à conditions initiales correspondant

$$\mathcal{P}: \begin{cases} y[k + 1] - 2y[k] = 1 \\ y[0] = 0. \end{cases}$$

1. **Solutions de l'équation homogène associée:**

On cherche les solutions de

$$y[k+1] - 2y[k] = 0.$$

Par la Proposition 8.1, le polynôme caractéristique est

$$\lambda - 2.$$

Le polynôme caractéristique admet comme racine $\lambda = 2$ (racine simple). La solution générale de l'équation homogène associée est alors

$$y_h[k] = a2^k,$$

avec $a \in \mathbb{C}$ arbitraire.

2. **Solution particulière de l'équation non homogène:**

Par le Théorème 8.12 et comme $r = 1$ n'est pas racine du polynôme caractéristique, l'équation non homogène admet une solution particulière de la forme

$$y_p[k] = b,$$

avec $b \in \mathbb{C}$ et il faut déterminer le coefficient b . Pour cela, on remplace dans l'équation non homogène et on obtient $b - 2b = 1$. On en déduit la valeur $b = -1$.

3. **Solution générale:**

La solution générale de l'équation non homogène est

$$y[k] = y_h[k] + y_p[k] = a2^k - 1,$$

et il faut déterminer a pour que la condition initiale soit satisfaite. Pour cela, on impose $y[0] = 0$ et on obtient $a = 1$. L'unique solution du problème \mathcal{P} est donc la suite

$$y[k] = 2^k - 1.$$

Chapitre 9

Conclusion

En conclusion, l'algèbre linéaire est une discipline fondamentale des mathématiques qui trouve des applications dans une grande variété de domaines, allant de la physique à l'informatique en passant par la finance et la biologie. Les concepts clés de l'algèbre linéaire, tels que les espaces vectoriels, les transformations linéaires et les matrices, sont utilisés pour modéliser des problèmes réels et résoudre des équations complexes.

Au cours de ce premier cours dédié à l'algèbre linéaire, nous avons exploré les concepts clés de l'algèbre linéaire, y compris les vecteurs, les matrices, les systèmes d'équations linéaires, les espaces vectoriels, les transformations linéaires, les valeurs propres et les vecteurs propres, et les diagonalisations. Nous avons appris comment utiliser les outils mathématiques de l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes concrets et pour construire des modèles qui nous aident à comprendre le monde qui nous entoure.

L'algèbre linéaire est une discipline en constante évolution, qui continue de s'enrichir de nouvelles théories et de nouvelles applications. Les progrès récents dans le domaine, tels que l'apprentissage automatique et l'analyse de données, ont ouvert de nouvelles perspectives pour l'algèbre linéaire, qui se trouve au cœur de nombreuses applications modernes.

Enfin, il est important de souligner que l'algèbre linéaire n'est pas seulement une collection de règles et de théories abstraites. Elle est une méthode puissante et flexible pour modéliser et résoudre des problèmes dans une grande variété de domaines. Nous espérons que ce cours vous a permis de développer vos compétences en algèbre linéaire et de vous donner une base solide pour poursuivre vos études dans ce domaine passionnant. Que vous choisissiez de vous spécialiser dans les mathématiques, la physique, l'informatique ou toute autre discipline, nous sommes convaincus que les compétences que vous avez acquises ici vous seront utiles tout au long de votre parcours académique et professionnel.